BURKINA FASO
****
UNIVERSITÉ NORBERT ZONGO
****
UNITÉ DE FORMATION ET DE RECHERCHE EN SCIENCES ET TECHNOLOGIES
****
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE MASTER DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

SUJET : Équation relativiste de la chaleur en une dimension d'espace

Présenté et soutenu par : BASSOLE Roger

Sous la direction de :
Dr Arouna OUEDRAOGO
Maître de Conférences en
Mathématiques Appliquées
Université Norbert ZONGO.

Et la co-direction de :
Dr Mohamed KARIMOU GAZIBO
Maître-Assistant en
Mathématiques Appliquées
Université Abdou MOUMOUNI de Niamey

Jury composé de :

Président : Dr Kounhinir SOMÉ, Maître de Conférences, Université Norbert ZONGO

Membres : Dr Frédéric Douny ZONGO, Ecole Normale Supérieur (Examinateur)

Dr Mohamed KARIMOU GAZIBO, Maître-Assistant, Université Abdou MOUMOUNI de Niamey (co-directeur)

Date de soutenance : le 30/10 /2023

Dédier :

A Dieu et à mes parents.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement mon directeur de mémoire, le Dr Arouna OUEDRAOGO pour sa disponibilité et ses précieux conseils qui m'ont été d'une grande aide dans la réalisation de ce manuscrit. Ensuite, ma profonde gratitude et mes chaleureux remerciements vont également à l'endroit de mon co-directeur, le Dr Mohamed KARIMOU GAZIBO pour le temps qu'il a consacré, pour m'apporter les outils méthodologiques indispensables à la conduite de ce mémoire et il m'a aussi offert la possibilité de réaliser ce travail dans de bonnes conditions et aussi pour ses bénéfiques conseils et explications. J'ai eu l'honneur de travailler sous sa direction. En outre, je ne saurai oublier les membres de l'Unité de Formation et de Recherche en Sciences et Technologies (UFR-ST) de manière générale et particulièrement le Directeur de la dite UFR, Dr Arouna OUEDRAOGO et le Directeur du Laboratoire de mathématiques, Informatique et Applications (L@MIA), Dr André CONSEIBO pour le travail qu'ils abattent chaque jour afin de nous offrir un cadre d'étude agréable.

Enfin, une reconnaissance particulière à mes parents qui m'ont apporté la confiance et l'encouragement dont j'avais besoin pour continuer mon parcourt d'études.

Le temps me fera défaut si je dois dresser une liste de toutes les personnes de près ou de loin, qui ont contribué d'une manière ou d'une autre sur le plan moral, intellectuel, financier, etc à l'élaboration de ce mémoire. Dieu vous le rendra.

Notations, symboles et abréviations.

Symboles	**signification**
EDP	: Équations aux Dérivées Partielles.
RHE	: Relativistic Heat Equation (Equation Relativiste de la Chaleur)
$\overline{\Omega}$	: la fermeture de Ω où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geqslant 1$ entier.
$\partial\Omega$	: Bord (ou frontière) de Ω.
∇u	: gradient de u
$D^\alpha u$	: $D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n}u = \dfrac{\partial^{\|\alpha\|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$ avec $\|\alpha\| = \sum_i^N \alpha_i, \alpha \in \mathbb{N}^n$.
dx	: La mesure de Lebesgue.
$\mathcal{H}^0$	: La mesure de Hausdorff dans $\mathbb{R}$.
$\frac{\partial u}{\partial \eta}$	: la dérivée normale de u
$u_x(resp\ u_t)$	: La dérivée de u par rapport à x (resp par rapport à t)
$D(\Omega)$	: Ensemble des fonctions indéfiniment différentiables dans Ω et à support compact.
$D'(\Omega)$	: Ensemble des distributions sur Ω (dual de $D(\Omega)$).
$C^k(\Omega)$	: Espace des fonctions k fois continument différentiables dans Ω (dit indéfiniment différentiable si $k = \infty$).
$C_c(\Omega)$	: Espace des fonctions continues à support compact sur Ω
$C_b^0(\Omega)$	: Espace des fonctions continues et bornées sur Ω.
$L^1(\Omega)$	: Espace des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurables telles que $\|f\|$ soit intégrable.
$L^p(\Omega)$	: Espace des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurables telles que $\int_\Omega \|f(x)\|^p dx < \infty$.
$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$	$= \{f$ mesurable sur K et $f \in L^p(K)$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$ $\}$.
$L^\infty(\Omega)$	$= \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et il existe une constante C telle que $\|f(x)\| < C$ p.p sur Ω $\}$.
$Supp(\varphi)$	: Support d'une fonction continue φ.
$W^{k,p}(\Omega)$	: Espace de Sobolev.
$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$	: Espace de toutes les fonctions Lipschitziennes et bornées sur $\mathbb{R}^n, n \geqslant 1$.
$H^1(\Omega)$	: Espace des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ et $u_x \in L^2(\Omega)$.
$H_0^1(\Omega)$	: Ensemble des fonctions $u \in H^1(\Omega)$ telles que $u = 0$ sur $\partial\Omega$.
$T_{[a,b]}$	: La fonction troncature.
$BV(\Omega)$	: Espace des fonctions à variation bornée sur Ω.
$\mathcal{M}(\Omega)$	: L'espace des mesures de Radon bornées sur Ω
$B(\Omega)$	: La tribu des Boréliens de Ω.

Du	$= D^a u + D^s u$ avec $D^a u = u_x \in \mathcal{L}^1$ où $\mathcal{L}^1$ est l'ensemble des fonctions $\mu - intégrables$ et $D^s u = D^j u + D^c u$ telle que $D^j u = (u_+ - u_-)\nu_u \mathcal{H}^0 \lfloor J_u$ où $\nu_u(x) = \frac{Du}{\lvert u \rvert}$ et $D^c u$ est la mesure de Cantor.
$T_{a,b}(r)$	$= \max(\min(b, r); a)$ avec $0 < a < b$.
$T^l_{a,b}(r)$	$= T_{a,b}(r) - l (l \in \mathbb{R})$.
T_k	$= T_{-k,k}$.
τ_r	$= \{T^l_{a,b} : 0 < a < b\}$
τ^+	$= \{T^l_{a,b} : 0 < a < b, l \in \mathbb{R}, T^l_{a,b} \geqslant 0\}$.
τ^-	$= \{T^l_{a,b} : 0 < a < b, l \in \mathbb{R}, T^l_{a,b} \leqslant 0\}$.
u^+	$= \max(u, 0)$.
u^-	$= -\min(u, 0)$.
$TBV^+(\mathbb{R})$	$= \{u \in L^1; T(u) \in BV(\mathbb{R}), \forall T \in \tau_r\}$.

Résumé

Dans ce mémoire, l'étude porte sur l'équation relativiste de la chaleur en une dimension d'espace de type $u_t = \nu \left(\frac{uu_x}{\sqrt{u^2 + (\frac{\nu}{c})^2 u_x^2}} \right)_x , x \in \mathbb{R}, t > 0$, dans son volet analytique. En effet, nous démontrons un résultat de régularité des solutions de cette équation avec des données initiales localement lipschitziennes sur son support. En outre, nous nous sommes inspirés de la notion de solution entropique des lois de conservation scalaire, afin d'étudier l'unicité de la solution de la RHE.

Mots clés : RHE, diffusion rapide, fonction régulière, solution entropique.

Abstract

In this paper, the study focuses on the relativistic heat equation in one space dimension of type $u_t = \nu \left(\frac{uu_x}{\sqrt{u^2 + (\frac{\nu}{c})^2 u_x^2}} \right)_x , x \in \mathbb{R}, t > 0$, in its analytical part. Indeed, we disprove a result of regularity of solutions of this equation with data locally Lipschitz on his support. Furthermore, we are inspired of the notion of entropy solution of scalar conservation law, in order to study uniqueness of the solution of RHE.

Key-words : RHE, speed diffusion, regular fonction, entropy solution.

Table des matières

Dédicace ii
Remerciements iii

Notations **iv**
Résumé vi
Abstract vi

Introduction **1**

1 Généralités :Quelques concepts généraux sur les équations aux dérivées partielles **4**
1.1 Éléments d'Analyse Mathématiques Réelles et Fonctionnelles 4
1.1.1 Les espaces normés 4
1.1.2 Compacité 5
1.1.3 Les distributions 6
1.1.3.1 Fonction d'une variable réelle 6
1.1.3.2 Fonctions de classe C^∞ à support compact 7
1.1.4 Les espaces L^p 9
1.1.5 Les espaces de Sobolev 11
1.1.6 Espace des fonctions à variation bornée 14
1.1.7 Mesure de Radon 14
1.1.7.1 Mesure de Radon positive 14
1.1.7.2 Mesures de Radon bornées 16
1.1.8 Les fonctions convexes 16
1.2 Quelques types d'équations aux dérivées partielles 18
1.2.1 Classifications des E.D.P 18

1.2.2 Équations aux dérivées partielles du second ordre 19

2 Introduction à la notion de solution entropique 21

2.1 Solutions faibles 22
2.1.1 Définitions 22
2.1.2 la condition de Rankine-Hugoniot 23
2.1.3 Non-unicité du problème de Cauchy 23
2.2 Approximation parabolique 24
2.2.1 Définition du problème 24
2.2.2 Régularité, existence globale, passage à la limite 25
2.3 Fonctions à variation bornée 26
2.3.1 Définition et exemples 26
2.3.2 Approximations par des fonctions régulières 28
2.4 Solutions entropiques 28

3 L'étude de l'unicité et de la régularité de la solution entropique de la RHE 30

3.1 Approche générale 30
3.2 Quelques formes d'équations obtenues à partir de RHE 31
3.3 Régularité des solutions de RHE 36
3.3.1 Grande ligne de la démonstration du Théorème (3.1.1) 39
3.3.1.1 **Première étape** : Considérons d'abord l'évolution de la norme L^1. 39
3.3.1.2 **Deuxième étape** :L^∞(limites sup et inf de v) indépendante de ε. 42
3.3.1.3 **Troisième étape** : v_x bornée sur L^p. 45
3.3.1.4 **Quatrième étape** : Existence de solutions régulières pour le problème de Cauchy approché (3.9) et (3.10). 45
3.3.1.5 **Cinquième étape** : Une borne de Lipschitz locale sur v_ε uniforme en ε. 47
3.3.1.6 **Sixième étape** : Régularité d'ordre supérieur en ε. . 52
3.3.1.7 **Septième étape** : Passage à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0^+$. 52

4 Régularité des solutions avec des données initiales **54**
4.1 Solution entropique de (3.1) à partir de (3.6) 54
4.2 Régularité des solutions avec des données initiales s'annulant au bord 61
4.2.1 Estimations locales. 61
4.2.2 Estimations globales 61

Conclusion **65**

Bibliographie **66**

Introduction

De nos jours, grâce aux ondes électromagnétiques, on arrive à communiquer sans fil de façon rapide et instantanée via les canaux tels que : la radio, la télévision, les réseaux sociaux, etc. Les scientifiques par le passé, ont cherché les voies et moyens pour modéliser mathématiquement les phénomènes de diffusion rapide.
Par définition, l'équation relativiste de la chaleur en une dimension d'espace, est une équation qui décrit les phénomènes de diffusion rapide [7]. Le terme chaleur est un concept principalement utilisé en philosophie, en physique et en biologie qui désigne la qualité de ce qui est chaud, la sensation produite par un corps chaud. Par extension la chaleur désigne l'augmentation de la température.
La diffusion des particules lumineuses dans notre galaxie (la voie lactée) autour d'un trou noir se fait à une vitesse proche de celle de la lumière. Source : illustration de la NASA. D'après cette source, la diffusion se fait uniquement autour de la zone du corps noir, car la vitesse de gravitation contraint les particules à y rester. Un corps noir (ou trou noir) est un objet céleste si compact que l'intensité de son champ gravitationnel empêche toute forme de matière ou de rayonnement de s'en échapper.
La variance relativiste de la chaleur est un problème délicat abordé par de nombreux physiciens peu après que l'Allemand Albert EINSTEIN pose pour la première fois le problème de la gravitation, il introduit également l'expression relativiste de la quantité de chaleur. Par ailleurs, les phénomènes de diffusion rapide sont modélisés par l'équation relativiste de la chaleur qui elle même est un cas particulier parmi tant d'autres équations :

$$u_t = \nu \left(\frac{u u_x}{\sqrt{u^2 + (\frac{\nu}{c})^2 u_x^2}} \right)_x , x \in \mathbb{R}, t > 0 \tag{1}$$

Cette équation est introduite par l'Israélien Philippe Rosenau [20] et plus tard par Brenier [11] qui lui s'était basé sur des idées de transport optimal. Elle converge

naturellement vers l'équation de la chaleur de manière formelle et rigoureuse [17], lorsque la vitesse de la lumière tend vers l'infini et que la solution u est positive. De nombreux autres modèles d'équations paraboliques dégénérées non linéaires avec saturation du flux lorsque le gradient n'est plus limité ont été proposés par Rosenau et ses collaborateurs [20], ainsi que par Bertsch et Dal Passo dans [10], [23]. La classe générale des équations de diffusion à flux limité a été étudiée dans [3], [5], [7] et [18]. Une théorie de l'existence et de l'unicité des solutions entropiques pour le problème de Cauchy associé à l'équation parabolique quasi-linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div} b(u, \nabla u) \tag{2}$$

a été développée dans [4] et [5]. En outre, (2) a fait l'objet d'étude de plusieurs chercheurs à savoir, Andreianov, Bénilan, Ouaro, Karimou Gazibo et Touré dans les articles suivants : [2], [12] , [28] et [29] . Ici, la fonction de flux est donnée par $b(z, \xi) = \nabla_\xi f(z, \xi) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction à croissance linéaire lorsque $\xi \longrightarrow +\infty$. La solution de (1) a été étudiée dans [7] et il a été démontré que la régularité maximale en temps que l'on peut entendre des solutions générales de (1) est que $u \in BV([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ pour $0 < t < T$. En supposant que les données initiales sont non négatives, on peut changer de variable pour observer que $\tilde{u}(t, x)$ est une solution de (1), si et seulement si $u(t, x) = \tilde{u}((\nu/c^2)t, (\nu/c)x)$ est une solution de

$$u_t = \left(\frac{u.u_x}{\sqrt{u^2 + u_x^2}} \right)_x \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0. \tag{3}$$

Le terme solution fait référence à la solution entropique pour laquelle la notion du bien posé, a été développée dans le corps de notre travail.

La régularité locale des solutions entropiques de (3) est obtenue en utilisant un changement de variables, au travers de sa fonction de distribution inverse.

En considérant que toutes les fonctions concernées sont bien définies et régulières, on obtient l'équation suivante :

$$\varphi_t = \frac{\varphi_{\eta\eta}}{\sqrt{\varphi_\eta^4 + \varphi_{\eta\eta}^2}} \tag{4}$$

avec φ la fonction de distribution inverse. Ce changement de variable a été utilisé pour la première fois pour les diffusions non linéaires dans [15], afin de montrer les propriétés de contractibilité des distances en théorie de transport optimal pour les équations de types milieux poreux.

Dans ce mémoire, nous revisitons le papier de Carrilo, Casselles et Moll [7], [14], [15] et [18] où il est question de démontrer un résultat de régularité des solutions entropiques de l'équation relativiste de la chaleur en une dimension d'espace. Nous n'aborderons que la partie analytique. Pour l'étude mathématique, ce présent mémoire est composé de quatre chapitres et articulé comme suit :

Dans le premier chapitre, il sera question d'abord de rappeler quelques concepts généraux dans le domaine des Équations aux Dérivées Partielles (E.D.P) dont on fera usage directement ou indirectement dans les autres chapitres.

Ensuite le deuxième chapitre est consacré à l'introduction de la notion de solution entropique. Quant au troisième chapitre, il porte sur l'étude de l'unicité et de la régularité de la solution entropique de la RHE. Enfin, le quatrième chapitre est réservé à la régularité des solutions avec des données initiales s'annulant au bord et la solution entropique de (3.1) à partir de (3.6).

Chapitre 1

Généralités :Quelques concepts généraux sur les équations aux dérivées partielles

1.1 Éléments d'Analyse Mathématiques Réelles et Fonctionnelles

1.1.1 Les espaces normés

Définition 1.1.1. (**Norme**)
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une norme sur E est une application, le plus souvent notée $\| \cdot \|$,

$$\| \cdot \| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$$

ayant les propriétés suivantes :
1) $a) \parallel x \parallel \geqslant 0, \forall x \in E \quad et \quad b) \parallel x \parallel = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
2) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||, \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ (homogénéité).
3) $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||, \forall x, y \in E$ (inégalité triangulaire).

Remarque 1.1.1. *Si on supprime le* 1) $\quad b$) *on dit que* $|| \cdot ||$ *est une semi− norme. Notons qu'alors 2) entraine néanmoins que* $\parallel 0 \parallel = 0$

Définition 1.1.2. A partir d'une norme on obtient une distance sur E en posant $d(x, y) = ||x - y||$.

Lemme 1.1.1. *(Lemme de Gronwall)*
Soient φ, ψ, y *trois fonctions continues sur un segment* $[a, b]$*, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité*

$\forall t \in [a,b], y(t) \leqslant \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)ds$
Alors
$\forall t \in [a,b], y(t) \leqslant \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right)ds$

Démonstration. En effet posons $F(t) = \int_a^t \psi(s)y(s)ds$.
En multipliant les deux membres de l'inégalité donnée en hypothèse par $\psi(t)$ on obtient :

$$F'(t) - \psi(t) \leqslant \varphi(t)\psi(t)$$

ce qui s'écrit aussi

$$G'(t) \leqslant \varphi(t)\psi(t)\exp\left(-\int_a^t \psi(s)ds\right)$$

avec $G(t) = F(t)\exp\left(-\int_a^t \psi(s)ds\right)$ Comme $G(a) = F(a) = 0$, on en déduit, par intégration

$$G(t) \leqslant \int_a^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left(-\int_s^t \psi(u)du\right)ds.$$

Or par hypothèse,

$$y(t) \leqslant \varphi(t) + G(t)\exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right),$$

d'où le résultat en utilisant l'inégalité ci-dessus. □

Corollaire 1.1.1. *Soient ψ et $y : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues vérifiant*

$$\exists c \geqslant 0 / \forall t \in [a,b], y(t) \leqslant c + \int_a^t \psi(s)y(s)ds$$

Alors

$$\forall t \in [a,b], y(t) \leqslant c\exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right).$$

Il s'agit du lemme de Gronwall dans le cas particulier où φ est constante égale à c, on a donc pour tout $t \in [a,b]$,

$$y(t) \leqslant c + \int_a^t c\psi(s)\exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right)ds = c + c\left[-\exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right)\right]_a^t = c\exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right).$$

1.1.2 Compacité

La compacité des espaces métriques ou plus généralement des espaces topologiques doit être comprise comme une propriété de finitude. La définition repose sur les notions de recouvrement ouvert et de sous-recouvrement.

Définition 1.1.3. Soit (X, A) un espace topologique. Un recouvrement ouvert de X est une famille $(V_j)_j \in J$ d'ouverts de réunion égale à X.
Un recouvrement ouvert d'une partie A de X est une famille $(V_j)_j \in J$ d'ouverts dont la réunion contient A.

Définition 1.1.4. Une partie A d'un espace métrique est compacte si et seulement si tout recouvrement ouvert de A admet un sous recouvrement fini.

Théorème 1.1.1. *Les parties compactes de* $\mathbb{R}$ *sont les parties fermées et bornées.*

1.1.3 Les distributions

En analyse mathématique, une distribution (également appelée fonction généralisée) est un objet qui généralise la notion de fonction et de mesure .
La théorie des distributions étend la notion de dérivée à toutes les fonctions localement intégrables et au delà, et est utilisée pour formuler des solutions à certaines équations aux dérivées partielles.
Elles sont importantes en physique et ingénierie où beaucoup de problèmes discontinus conduisent naturellement à des équations différentielles dont les solutions sont des distributions plutôt que des fonctions ordinaires .
La théorie de distributions fut formalisée par le mathématicien français, Laurent Schwartz(et lui valut la médaille Fields en 1950).

Dans cette section Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}$, non nécessairement borné et on continue en revue, les résultats d'analyse réelle et fonctionnelle dont on se servira le plus souvent dans la suite. Néanmoins, rappelons la définition d'une fonction à une variable réelle.

1.1.3.1 Fonction d'une variable réelle

La fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite fonction scalaire à une variable .
Une telle fonction associe une valeur réelle à tout nombre de son domaine de définition .
Ce type de fonction numérique permet notamment de modéliser une relation entre deux grandeurs physiques. Caractérisée par sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère, une telle fonction peut être définie par une formule, une équation

différentielle ou un développement analytique.
L'analyse d'une fonction réelle d'une variable réelle s'appuie sur la topologie de la droite réelle, en particulier lorsque cette fonction est continue. Si elle est dérivable, ses variations sont décrites par le signe de sa dérivé, permettant ainsi de dénombrer les antécédents d'une valeur à partir de ses extrema locaux et des éventuelles limites aux bornes de son ensemble de définition.
Sous certaines conditions de régularité, une telle fonction est éventuellement intégrable sur un intervalle de son domaine de définition
Cette étude repose en général sur l'analyse des variations, la représentation graphique, l'approximation, l'interpolation ou le calcul de limites.

Théorème 1.1.2. *(Théorème des bornes atteintes)*
Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.*

1.1.3.2 Fonctions de classe C^∞ à support compact

Définition 1.1.5. (support d'une fonction)
Le support d'une fonction $f \in C^0(\Omega)$ est le sous ensemble fermé de $\mathbb{R}$ noté $suppf$ et défini par l'une des assertions équivalentes suivantes :

(1) $suppf = \overline{\{x \in \Omega / f(x) \neq 0\}}$. C'est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel f est identiquement nulle ;

(2) $x_0 \notin suppf \Leftrightarrow \exists V_{x_0}$(voisinage de x_0) tel que $f(x) = 0, \forall x \in V_{x_0}$;

(3) $(suppf)^c$ est le plus grand ouvert où f est nulle.

Définition 1.1.6. (Espace des fonctions tests)
L'espace des fonctions tests, noté $\mathcal{D}(\Omega)$, est l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact $K \subset \Omega$ et est appelé espace de base ou celui des fonctions tests. $\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in C_0^\infty(\Omega), \quad suppf \subset K\}$.

Définition 1.1.7. (Distribution)
On appelle distribution T une fonctionnelle linéaire (ou forme linéaire) continue sur $D(\Omega)$.

• Fonctionnelle linéaire signifie qu'une application T de $D(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ faisant correspondre à toute fonction $\varphi \in D(\Omega)$ un nombre noté $< T, \varphi >$ tel que
$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D(\Omega) \quad et \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad ona :$

$$< T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 >= \alpha < T, \varphi_1 > +\beta < T, \varphi_2 > .$$

• Continue signifie que si la suite $(\varphi_k)_{k\geqslant 1}$ converge vers φ dans $D(\Omega)$ alors,
$< T, \varphi_k >_{k\geqslant 1}$ converge au sens usuel vers $< T, \varphi >$.

On a la proposition suivante :

Proposition 1.1.1. *Toute fonction localement intégrable définie une distribution T_f par :*

$$< T, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx, \varphi \in D(\Omega). \tag{1.1}$$

Démonstration. Pour la preuve, il suffit de montrer que l'intégrale est bien définie et que T_f est linéaire et continue.
• Bien définie
Le domaine d'intégration se réduit au support de φ car φ est nul en dehors de son support et ce dernier est borné. Ainsi $< T, \varphi >$ est bien défini.
• Linéarité de T_f
En effet soient $\varphi_1, \varphi_2 \in D(\Omega)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ alors

$$\begin{aligned} < T_f, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 > &= \int_{\mathbb{R}} f(x)(\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x))dx \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_1(x)dx + \beta \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_2(x)dx \\ &= \alpha < T_f, \varphi_1 > +\beta < T_f, \varphi_2 > . \end{aligned}$$

D'où T_f est linéaire.
• Continuité de T_f.
Par hypothèse, la suite $\varphi_k >_{k\geqslant 1} 0$ converge vers φ dans $D(\Omega)$ c'est à dire
$\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} (sup_{x\in[a,b]}|\varphi_k(x) - \varphi(x)|) = 0.$
Montrons que $< T_f, \varphi_k > \longrightarrow < T_f, \varphi >$ quand k tend vers $+\infty$. On a

$$\begin{aligned} |< T_f, \varphi_k > - < T_f, \varphi >| &= |< T_f, \varphi_k - \varphi >| \\ &= |\int_{\mathbb{R}} f(x)(\varphi_k(x) - \varphi(x))dx| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)|(\varphi_k(x) - \varphi(x))dx \end{aligned}$$

$$|< T_f, \varphi_k > - < T_f, \varphi >| \leqslant (\int_{[a,b]} f(x)).sup_{x\in[a,b]}|\varphi_k(x) - \varphi(x)|)$$
$$\leqslant 0, \quad quand\ k \longrightarrow +\infty.$$

Et donc $< T_f, \varphi_k > \longrightarrow < T_f, \varphi >$. □

La résolution d'une EDP nécessite la connaissance de l'espace dans lequel appartient l'inconnue(ou les inconnues).
Alors, rappelons ici l'espace de Lebesgue et ensuite celui de Sobolev.

1.1.4 Les espaces L^p

Définition 1.1.8. (Les espaces $(\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu), p > 0)$)
(i) Une fonction f : $(X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{K}, B(\mathbb{K}))$ est $\mu-$intégrable si $|f|$ l'est ; c'est-à dire $\int_X |f|d\mu < +\infty$; avec $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $B(\mathbb{K})$ sa tribu borélienne(la plus petite tribu sur X contenant tous les ensembles ouverts).
On note :
$\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'ensemble des fonctions $\mu-$intégrables définies sur X et à valeurs dans $\mathbb{K}$ ou espace des fonctions absolument intégrables sur X. En l'absence d'ambiguïté on écrira simplement $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(u)$ voire $\mathcal{L}^1(\mu)$ ou parfois même $\mathcal{L}^1(X)$.
(ii) Généralisation : pour tout réel $p > 0$, on définit :
$\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables de puissance p intégrable et sera dit ensemble des fonctions essentiellement bornées pour $p = +\infty$.

Définition 1.1.9. (espace L^p). Un espace $L^p(X)$ est un espace vectoriel de classes des fonctions dont la puissance d'exposant p est intégrable au sens de Lebesgue, où p est un nombre réel strictement positif. Le passage à la limite de l'exposant aboutit à la construction des espaces L^∞ de fonctions bornées. Les espaces $L^p(X)$ sont appelés espaces de Lebesgue.
Identifiant les fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble négligeable, chaque espace L^p est un espace de Banach lorsque l'exposant est supérieur ou égal à 1. Lorsque $0 < p < 1$, l'intégrale définit une quasi-norme qui en fait un espace complet. Il existe en outre une dualité entre les espaces d'exposants p et q conjugués, c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Les espaces L^p généralisent les espaces L^2 des fonctions de carré intégrable, mais aussi les espaces l^p de suites de puissance p-ème sommable. Diverses constructions étendent encore cette définition à l'aide de distributions ou en se contentant d'une

intégrabilité locale. Tous ces espaces constituent un outil fondamental de l'analyse fonctionnelle en permettant la résolution d'équations par approximation avec des solutions non nécessairement dérivables ni même continues.

Nous avons les définitions suivantes en fonction de la valeur de l'exposant p

•Exposant fini

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et X un espace de Banach de norme $\| \cdot \|_X$ et de dual X'. Soit $1 \leqslant p < +\infty$, on définit $L^p(\Omega; X)$ comme étant l'espace (des classes d'équivalences) de fonctions mesurables $f : \Omega \longrightarrow X$ telles que $\| f(\cdot) \|_X$ appartient à $L^p(\Omega, \mathbb{R})$. Avec la norme

$$\| f \|_{L^p(\Omega;X)} = \left(\int_\Omega \| f(x) \|_X^p \, d\mu \right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < +\infty \tag{1.2}$$

En particulier, $L^1(\Omega)$ est un espace des fonctions absolument intégrable sur Ω. Sur un domaine X d'un espace euclidien, la mesure est en général celle de Lebesgue. Or une fonction positive est d'intégrale nulle si et seulement si elle s'annule presque partout, c'est-à-dire sur le complémentaire d'un ensemble négligeable. L'espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est alors défini comme quotient de l'espace des fonctions mesurables p intégrables, souvent noté : $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, par le sous-espace vectoriel des fonctions presque partout nulles. Ce quotient identifie donc les fonctions qui sont dans la même classe pour la relation d'équivalence $\ll \ f \sim g \ \gg$ si et seulement si $\ll$ f et g sont égales presque partout$\gg$.

•Exposant infini

L'espace $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est défini comme l'espace vectoriel des fonctions $\mu-$essentiellement bornées (c'est-à-dire les fonctions bornées sur le complémentaire d'un ensemble négligeable), muni de la semi-norme $\ll$ borne supérieure essentielle $\gg$. Ensuite, l'espace vectoriel normé $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ est, comme précédemment, le quotient de $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ par le sous-espace des fonctions nulles presque partout.

$$\| f \|_{L^p(\Omega;X)} = sup - ess\{ \| f(x) \|_X^p, x \in \Omega \} \tag{1.3}$$

où $sup - ess\{ \| f(x) \|_X^p, x \in \Omega \} = inf \{ M > 0 \text{ tel que } \mu(\{ \| f(x) \|_X^p > M \}) = 0 \}$

Chaque espace $L^p(\Omega; X)$ est un espace de Banach.

Venons-en maintenant aux espace de Sobolev dont il existe plusieurs caractérisations. Dans le cas des espaces de Sobolev d'ordre entier positif k, nous retiendrons :

1.1.5 Les espaces de Sobolev

Une bonne partie de l'analyse des équations aux dérivées partielles se déroule dans les espaces de Sobolev.

Définition 1.1.10. (Fonction *höldérienne*)
Soit Ω un ouvert quelconque de $(\mathbb{R}^d, \| \cdot \|)$, $d \in \mathbb{N}^*$. Pour $0 < \alpha \leqslant 1$, on dit qu'une fonction $u\colon \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ est höldérienne d'exposant α (lipschitzienne pour $\alpha = 1$ s'il existe une constante C telle que

$$\forall x, y \in \overline{\Omega} \quad , |u(x) - u(y)| \leqslant C \parallel x - y \parallel^{\alpha} . \tag{1.4}$$

On note $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions höldérienne. on note que u est continue et l'on pose :

$$|u|_{c^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = \underset{x,y\in\overline{\Omega},x\neq y}{sup} \frac{|u(x) - u(y)|}{\parallel x - y \parallel^{\alpha}}. \tag{1.5}$$

Dans le cas où Ω est borné, on munit l'espace $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ de la norme

$$||u||_{c^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = ||u||_{c^{0}(\overline{\Omega})} + |u|_{c^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}, \tag{1.6}$$

pour laquelle il est complet. L'espace $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ est constitué des fonctions C^k dont toutes les dérivées partielles d'ordre k sont dans $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ .On le munit de la norme

$$||u||_{c^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = ||u||_{c^{k}(\overline{\Omega})} + \max_{|\gamma|=k} |D^{\gamma}u|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}, \tag{1.7}$$

pour laquelle il est complet.

Venons-en maintenant aux espace de Sobolev dont il existe plusieurs caractérisations.
Dans le cas des espaces de Sobolev d'ordre entier positif k, nous retiendrons :

Définition 1.1.11. (Espaces de Sobolev). (i) Pour $k \in \mathbb{N}, 1 \leqslant p \leqslant \infty$, on appelle espace de Sobolev d'ordre entier positif k, l'espace constitué des fonctions mesurables $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et défini par :

$$W^{k,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega); D^{\alpha}u \in L^p(\Omega), \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}^d \ tel \ que \ |\alpha| \ \leqslant k \Big\}$$

muni de la norme

$$\parallel u \parallel_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \parallel D^{\alpha}u \parallel^{p}_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \quad pour \quad p \in [1, +\infty [\tag{1.8}$$

et muni de la norme

$$\| u \|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leqslant k} \| D^\alpha u \|_{L^\infty(\Omega)} \quad pour \quad p = +\infty. \tag{1.9}$$

On rappelle que :

$$D^\alpha u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d} = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_d^{\alpha_d}},$$

avec $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_d$

Les dérivées partielles écrites ci-dessus sont naturellement prises au sens des distributions. Les espaces $W^{k,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach.

Dans le cas $p = 2$ on note $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u \mid v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} (D^\alpha u | D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}. \tag{1.10}$$

On utilise parfois la notation $\| \cdot \|_k$ pour designer la norme sur $H^k(\Omega)$.

(ii) Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$. On définit l'espace vectoriel

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \exists g_1, g_2, ..., g_N \in L^p(\Omega), \int_\Omega g_i \varphi dx = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \right\},$$

on note $\nabla f = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ pour $u \in W^{k,p}(\Omega)$ et la norme de u est définie par :

$$\| u \|_{1,p} = (\| u \|_p^p + \| \nabla u \|_p^p)^{1/p} \equiv \| u \|_p + \| \nabla u \|_p \quad pour \quad p \in [1, +\infty[$$

et pour $p = \infty$, on munit $W^{k,p}(\Omega)$ de la norme

$$\| u \|_{1,\infty} = \max(\| u \|_\infty, \| \nabla u \|_\infty) \tag{1.11}$$

où

$$\| u \|_\infty = ess - \sup_\Omega |u| = inf\{C > 0 : |u(x)| \leqslant C \quad p.p \quad dans \quad \Omega\}$$

pour $1 \leqslant p < \infty$, $W_0^{k,p}(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{k,p}(\Omega)$.

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme $\| \cdot \|_{1,p}$ est un espace de Banach.

$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ muni de la norme $\| \cdot \|_{1,2}$ est un espace de Hilbert séparable (c'est à dire qu'il existe un ensemble dénombrable F qui soit dense dans $H^1(\Omega) : \overline{F} = H^1(\Omega)$) dont le produit scalaire est

$$(u \mid v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \tag{1.12}$$

où $(.|.)_{L^2(\Omega)}$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire $(f|g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega fgdx$.

Notons que $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Connaissant la définition de $W_0^{1,p}(\Omega)$, l'inégalité de Poincaré se définit comme suit

Propriété 1.1.1. *(Inégalité de Poincaré). Soit Ω un ouvert borné (dans une direction), alors il existe une constante C (dépendant de Ω et de p) telle que :*

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \| u \|_{L^p(\Omega)} \leqslant C \| \nabla u \|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^d)} \tag{1.13}$$

Propriété 1.1.2. *On désigne par $H_0^1(\Omega)$, l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$*
(i) $H_0^1(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(\Omega)$
(ii) $H_0^1(\Omega)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annule qui $\partial\Omega$

Rappelons la formule d'intégrations par parties en dimension $d \in \mathbb{N}^*$.

Propriété 1.1.3. *(Formule d'intégration par parties). Soit Ω un ouvert borné de classe $C^{0,1}$; $u, v \in H^1(\Omega)$.*
Alors

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_0(vu)(x) n_i(x) d\sigma(x); \tag{1.14}$$

où n_i désigne la i-ème composante de la normale sortante du domaine Ω.
On notera que la formule d'intégration par parties utilise le fait que l'application trace $\gamma : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \ni u \longmapsto u_{|\partial\Omega} \in C^0(\Omega)$ se prolonge par continuité en une application linéaire de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

A partir de la formule d'intégration par parties, on déduit la formule de Green.

Définition 1.1.12. (Formule de Gauss-Green pour le Laplacien)
Soit Ω un ouvert borné de classe $C^{0,1}$.
(i) Si $u \in H^1(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$, alors :

$$-\int_\Omega v(x)\Delta u(x) dx = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla u(x) dx - \int_{\partial\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) d\sigma(x) \tag{1.15}$$

(ii) Si de plus $v \in H^2(\Omega)$,alors

$$\int_\Omega (u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)) = \int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial v}{\partial n}(x) - v(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right) d\sigma(x) \tag{1.16}$$

où n est la normale sortante du domaine Ω.

Venons en maintenant, à la notion d'espace de fonctions à variation bornée qui est d'une importance capitale dans la régularité des solutions d'un problème parabolique.

1.1.6 Espace des fonctions à variation bornée

Définition 1.1.13. (Fonctions à variation bornée)
Soit $x < y$ des réels, $Sub([x, y])$ l'ensemble des subdivisions $\sigma = x_0 < x_1 < ... < x_n$ telles que $x = x_0$ et $y = x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
Soit $f : [x, y] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction .
On définit la variation de f selon σ :
$Var_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$.
La variation totale de f sur $[x, y]$ est définie par :
$V_x^y = \sup_\sigma \in Sub([x, y])Var_\sigma(f)$.
On dit que f est à variation bornée sur $[x, y]$ si $V_x^y < +\infty$.

Définition 1.1.14. L'espace $BV(\Omega)$ des fonctions à variation bornée est défini comme l'espace de toutes les fonctions $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ dont le gradient distributionnel Du appartient à $\mathcal{M}^b(\Omega, \mathbb{R}^n)$.
La variation totale $|Du|$ de la mesure Du sur un ensemble $B \subset B(\Omega)$ sera indiquée, comme d'habitude, par $\int_B |Du|$.
Ainsi l'intégrable d'une fonction borélienne $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ par rapport à la mesure Du sera notée par $\int_B |fDu|$.
La proposition suivante donne une caractérisation utile des mesures de $\mathcal{M}^b(\Omega, \mathbb{R}^n)$ qui sont des gradients de fonctions de $B(\Omega)$.

Proposition 1.1.2. *L'ensemble $\{Du : u \in B(\Omega)\}$ est fermé dans la topologie faible de $\mathcal{M}^b(\Omega, \mathbb{R}^n)$. De plus, pour tout $u \in \mathcal{M}^b(\Omega, \mathbb{R}^n)$ les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) il existe $u \in BV(\Omega)$ telle que $\mu = Du$ dans Ω ;
(ii) $\int_\Omega d\mu = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ avec $div\varphi = 0$ dans Ω.

1.1.7 Mesure de Radon

1.1.7.1 Mesure de Radon positive

Définition 1.1.15. On rappelle qu'une mesure de Borel sur Ω est une mesure définie sur la tribu des Boréliens $B(\Omega)$ de Ω (la plus petite tribu contenant les ouverts de Ω et donc aussi les fermés de Ω).

On appelle mesure de Radon positive une mesure de Borel sur Ω finie sur les compacts.
Toute mesure de Radon positive μ définit une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact dans Ω. En effet, l'intégrale $\int_\Omega f d\mu$ est bien définie puisque, en notant $K = supp(f)$ le support (compact) de f, on a

$$\int_K |f| d\mu \leqslant \mu(K) \max_K |f| < +\infty.$$

Par conséquent, l'application

$$L : f \longmapsto \int_\Omega f d\mu$$

définit une forme linéaire positive sur $C_c(\Omega)$ i.e, $L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$ pour tout $f, g \in C_c(\Omega)$ et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $L(f) \geqslant 0$ pour tout $f \in C_c(\Omega)$ avec $f \geqslant 0$.

Théorème 1.1.3. *(Théorème de Représentation de Riesz) Soit $L : C_c(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire positive. Il existe une unique mesure de Radon positive μ sur Ω telle que*
$L : f \longmapsto \int_\Omega f d\mu$ pour tout $f \in C_c(\Omega)$.
De plus, pour tout $E \subset B(\Omega)$,

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V,\ V \text{ un ouvert}\}$$

et pour tout ouvert $U \subset \Omega$, $\mu(U)$=sup$\{\mu(K) : K \subset U,\ K$ un compact$\}$.

De ce théorème, découle naturellement les lemmes suivants :

Lemme 1.1.2. *Pour tout compact $K \subset \Omega$ on a :*
$\mu^\star(K)$=inf$\{L(g) : g \in C_c(\Omega, [0,1]), g = 1$ sur $K\}$.
En particulier, $\mu^\star(K) < +\infty$. De plus, pour tout ouvert $U \subset \Omega$,
$\mu^\star(U)$=sup$\{\mu^\star(K) : K \subset U,\ K$ compact$\}$.

Lemme 1.1.3. *La fonction d'ensemble $\mu^\star$ est une mesure extérieure.*

Lemme 1.1.4. *Tout Borélien est $\mu^\star$-mesurable. En particulier, la restriction de μ à $B(\Omega)$ est une mesure de Radon positive.*

1.1.7.2 Mesures de Radon bornées

Définition 1.1.16. L'espace des mesures de Radon bornées sur Ω, notée $\mathcal{M}(\Omega)$, est le dual topologique de l'espace de Banach $C_0(\Omega)$

Grâce au théorème de représentation de Riesz, on peut caractériser l'espace de mesures de Radon bornées.

Théorème 1.1.4. *Pour tout $L \in M(\Omega)$, il existe deux mesures de Borel finies μ^+ et μ^- sur Ω telles que si μ désigne la mesure signée $\mu = \mu^+ - \mu^-$, alors*

$$L(f) = \int_\Omega f d\mu := \int_\Omega f d\mu^+ - \int_\Omega f d\mu^- \tag{1.17}$$

pour tout $f \in C_0(\Omega)$.
De plus,en notant $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$ la mesure (positive) variation de μ, on a

$$\|L\|_{M(\Omega)} = |\mu(\Omega)|. \tag{1.18}$$

Commençons par établir que toute forme linéaire continue sur $C_0(\Omega)$ peut s'écrire comme la différence de deux formes linéaires positives.

Lemme 1.1.5. *Pour tout $L \in M(\Omega)$, il existe des formes linéaires positives L^+ et L^- sur $C_0(\Omega)$ telle que*

$$L(f) = L^+(f) - L^-(f) \tag{1.19}$$

pour tout $f \in C_0(\Omega)$.

1.1.8 Les fonctions convexes

Un objet géométrique est dit convexe lorsque, chaque fois qu'on y prend deux ponts A et B, le segment $[A, B]$ qui les joint y est entièrement contenu. Ainsi un cube plein, un disque, ou une boule sont des convexes, mais un objet creux ou bosselé ne l'est pas. La figure ci-dessous est une représentation parfaite d'une partie convexe.

Définition 1.1.17. Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$; $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe sur C si pour tout $(x, x') \in C \times C$ et tout $\alpha \in]0, 1[$ on a :
$f(\alpha x + (1-\alpha)x') \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha)f(x')$.
f est dite strictement convexe sur C quand l'inégalité précédente est stricte dès que $x \neq x'$.

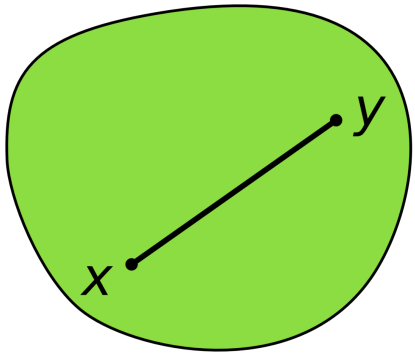

FIGURE 1.1 – Ensemble convexe

Une propriété encore plus forte est comme suit : f est dite fortement convexe sur C, de module de forte convexité $c > 0$, lorsque
$f(\alpha x + (1-\alpha)x') \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha)f(x') - \frac{1}{2}c\alpha(1-\alpha)\|x'-x\|^2$
pour tout $(x, x') \in C \times C$ et tout $\alpha \in]0,1[$.

On a la forme généralisée de la somme de fonctions convexes suivante

Proposition 1.1.3. *Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. Si $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe pour $i = 1, ..., m$ et si $\lambda_1, ..., \lambda_m$ sont des scalaires non négatifs, alors*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \tag{1.20}$$

est convexe sur X.

Démonstration. Pour toute paire de points $x, y \in X$ et pour tout
$\theta \in [0,1]$

$$\begin{aligned} f(\theta x + (1-\theta)y) &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\theta x + (1-\theta)y) \\ f(\theta x + (1-\theta)y) &\leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [\theta f_i(x) + (1-\theta) f_i(y)] \\ &\leqslant \theta \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + (1-\theta) \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(y) \\ &\leqslant \theta f(x) + (1-\theta) f(y). \end{aligned}$$

□

1.2 Quelques types d'équations aux dérivées partielles

1.2.1 Classifications des E.D.P

Les équations aux dérivées partielles apparaissent fréquemment en sciences appliquées pour traduire les principes fondamentaux et modéliser de manière continue les phénomènes physiques.
Son ordre (respectivement sa dimension) est le plus haut degré de dérivation présent dans l'équation(respectivement le nombre de variables indépendantes dont dépend l'inconnue u).
En général, une équation aux dérivées partielles est complétée par des conditions sur le bord du domaine.
Il est alors nécessaire de restreindre l'étude à certains cas.
Donnons donc, dans ce qui suit, une classification rapide des équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites.

Définition 1.2.1. (i) Une EDP est dite linéaire si la dépendance par rapport à la fonction u et ses dérivées partielles est linéaire :

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+f(x,y)u=g(x,y).$$

où $a, b, c, d, e, f\ et\ g$ sont des fonctions régulières à deux variables.
L'équation est dite homogène si la fonction g est identiquement nulle sur Ω.

(ii) On dit q'une EDP est semi-linéaire si la dépendance par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé est linéaire. Autrement, c'est une EDP non linéaire mais linéaire par rapport à ses dérivés partielles premières, les coefficients ne dépendent ni de u, ni de ses dérivées :

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 + e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+f(x,y)u^4=g(x,y)$$

(iii) EDP quasi-linéaire est une EDP non linéaire mais est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre maximal :

$$a\left(u,x,y,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\left(u,x,y,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$
$$+c\left(u,x,y,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\left(u,x,y,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

où a, b, c *et* F sont des fonctions définies dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

(iv) Une EDP sera complètement non linéaire si elle dépend non linéairement de ses dérivées d'ordre le plus élevé :

$$a(x,y)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+2b(x,y)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^5+c(x,y)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2=g(x,y).$$

Définition 1.2.2. (Les conditions aux limite)
(i) On appelle condition de Dirichlet une condition où on impose la valeur de la fonction recherchée sur le bord de son domaine Ω :
$u = h(x, y)$ sur $\partial\Omega$. Si $h = 0$, on parle de condition de Dirichlet homogène.

(ii) On appelle condition de Fourier-Robin, une condition où on impose une relation entre la dérivée normale de la fonction recherchée et sa valeur sur le bord $\partial\Omega$:
$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \lambda u = f(x, y)$ sur $\partial\Omega$ où λ est une constante.

1.2.2 Équations aux dérivées partielles du second ordre

Les E.D.P du second ordre sont très fréquentes en mécaniques. Leur étude est donc d'un grand intérêt pratique .
On considère ici le cas des E.D.P semi-linéaires, qui permettent déjà d'étudier de nombreux problèmes en mécanique, électromagnétisme, etc.

Définition 1.2.3. (i) Soient a, b et c trois fonctions définies dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et F une fonction définie dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$. On appelle E.D.P semi-linéaire du second ordre d'inconnue f, une équation de la forme :

$$a(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+c(x,y)F\left(f,x,y,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0.$$

Une telle EDP vérifiant, dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:
(ii) $\delta' = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) > 0$

est dite hyperbolique dans ce domaine.
(iii) $\delta' = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) = 0$
est dite parabolique dans ce domaine.
(iv) $\delta' = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) < 0$ est elliptique dans Ω.

Chapitre 2

Introduction à la notion de solution entropique

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux lois de conservation scalaire, afin d'exploiter la notion de solution entropique, qui est d'une importance capitale dans la suite de notre travail. Pour ce faire, nous avons utilisé le livre de S. Denis sur le "Système de Lois de Conservation" Voir [24]. Un système physique est caractérisé par des variables intensives sous la forme d'un champ de vecteurs :

$$u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t,x) \longmapsto u(t,x) = (u_1, ..., u_n).$$

Si $\overrightarrow{q}_i$ représente le flux de la variable u_i et g_i l'interaction avec les champs extérieurs, la conservation de la variable u s'écrit sous la forme :

$$\partial_t u_i + \operatorname{div}(\overrightarrow{q}_i)_x = g_i, \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

On considérera l'équation sans second membre ($g_i = 0$) et on travaillera en dimension 1, à la fois en espace et pour la variable u ($d = n = 1$). De plus, la résolution de ce type d'équation suppose qu'on ait une relation entre q et u appelée loi d'état.
On se place dans le cas où cette relation peut être mise sous la forme $q = f(u)$ et on supposera que f est une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La loi de conservation s'écrit donc sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial f(u)}{\partial x}(t,x) = 0 \tag{2.1}$$

Illustrons cela par un exemple concret : celui de la diffusion des charges le long d'un fil électrique.
On considère un fil électrique unidimensionnel dont on veut modéliser la diffusion électrique (déplacement des charges). On note $\rho(x,t)$ la densité de diffusion (c'est à dire le nombre de charges par unité de distance) en un endroit et un temps donnés, et le flux de nombre de charges s'écrit $q = \rho v$ *avec* $v(x,t)$ la vitesse moyenne des

particules charges électriques en (t, x).
Si l'on considère en un point (t, x). une variation infinitésimale d'espace δx et une variation infinitésimale de temps δx, la variation du nombre de charges dans $[x, x+\delta x]$ entre t et $t + \delta t$ est égale à $(\rho(t + \delta t, x) - \rho(t, x))\delta x$.
Une loi de conservation n'est en fait rien d'autre que la caractérisation d'une conservation de "matière", ici le nombre de charges.

2.1 Solutions faibles

2.1.1 Définitions

Afin d'élargir le nombre de solutions possibles à une loi de conservation, on introduit la notion de solution faible, qui ne requiert plus la différentiabilité de la fonction, mais permet de considérer des solutions moins régulières, par exemple continues par morceaux, ce qui se retrouve aussi en physique où certaines grandeurs ne sont pas forcément continues en temps et en espace.

Définition 2.1.1. (solution faible)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, u est dite solution faible de la loi de conservation (2.1) sur Ω si $u \in L^\infty(\Omega)$ et, pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \left(u\frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u)\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dxdt = 0. \tag{2.2}$$

On a une autre définition d'une solution faible :

Définition 2.1.2. Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $T \geqslant 0$, u est dite solution faible du problème de Cauchy associé à (2.1) si $u \in L^\infty(]-\infty, T[\times\mathbb{R})$ et pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(]-\infty, T[\times\mathbb{R})$,

$$\int_\Omega \left(u\frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u)\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dxdt + \int_\mathbb{R} u_0(x)\phi(0, x)dx = 0. \tag{2.3}$$

Pour que ces définitions aient un sens, on montre qu'elles coïncident avec la définition classique pour des solutions $\mathcal{C}^1$. De ce fait, on a la proposition suivante :

Proposition 2.1.1. *Soit $u \in \mathcal{C}_c^1(]-\infty, T[\times\mathbb{R}) \cap L^\infty(]-\infty, T[\times\mathbb{R})$.*
Alors u est solution classique du problème de Cauchy (2.1) sur $[0, T[\times\mathbb{R}$ si et seulement si u en est une solution faible.

2.1.2 la condition de Rankine-Hugoniot

On analyse le cas où une solution est discontinue le long d'une courbe et $\mathcal{C}^1$ ailleurs. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\Gamma \subset \Omega$ une courbe de régularité $\mathcal{C}^\infty$ séparant Ω en deux composantes connexes Ω_+ et Ω_-.
Soit $(t,x) \in \Gamma$, si u est une application $\mathcal{C}^1$ dans Ω_+ et Ω_- et continue par morceaux sur Ω, on note $u_+(t,x)$ la limite de $u(y,s)$ quand (y,s) tend vers (t,x) en restant dans Ω_+, et de même $u_-(t,x)$ la limite de u en (x,t) dans Ω_-. On pose alors $[u](t,x) = u_+(t,x) - u_-(t,x)$ le saut de u à travers Γ, et on définit de la même manière $[f(u)](t,x) \quad i.e \quad [f(u)](t,x) = f_+(t,x) - f_-(t,x)$.
Le théorème suivant corrobore à quelle condition u est solution faible de la loi de conservation sur Ω tout entier :

Théorème 2.1.1. *Soit $u \in \mathcal{C}^1(\Omega_+) \cap \mathcal{C}^1(\Omega_-) \cap L^\infty(\Omega)$ continue par morceaux sur Ω.*
Alors u est solution faible de la loi de conservation (2.1) dans Ω si et seulement si :
(i) u est solution classique de cette loi de conservation sur Ω_+ et Ω_-.
(ii) la condition $[u]n_t + [f(u)]n_x = 0$ est satisfaite sur Γ, où $n = (n_t, n_x)$ est un vecteur normal le long de Γ. Cette condition s'appelle la condition de Rankine-Hugoniot.

2.1.3 Non-unicité du problème de Cauchy

La condition de Rankine-Hugoniot donne une relation entre la pente d'une courbe de discontinuité et la valeur des discontinuités de u et $f(u)$ et nous permet de construire des solutions continues par morceaux à une loi de conservation. La manière la plus aisée de construire de telles solutions consiste à considérer des fonctions constantes par morceaux et dont les discontinuités sont placées le long d'une droite. Ce type de fonction est trivialement solution de la loi de conservation hors des discontinuités, et la condition de Rankine-Hugoniot implique que la pente α d'une discontinuité doit vérifier :

$$\alpha = \frac{[f(u)]}{[u]}$$

où $f(u) = \frac{u^2}{2}$ et $[\quad]$ est le saut de discontinuité.
Plaçons-nous dans le cas de l'équation de Burgers suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) + \beta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad \beta > 0.$$

La condition sur la pente d'une discontinuité devient alors

$$\alpha = \frac{u_+^2 - u_-^2}{2(u_+ - u_-)} = \frac{u_+ + u_-}{2}.$$

Soit $p \in \mathbb{R}^+$, considérons l'application suivante

$$u : (t,x) \longmapsto \begin{cases} 0 \quad si\ x < -pt \\ -2p \quad si\ -pt < x < 0 \\ 2p \quad si\ 0 < x < pt \\ 0 \quad si\ pt > x \end{cases}$$

Cette application est constante par morceaux. Elle comporte trois demi-droites de discontinuité (en $x = -pt, \quad x = 0 \quad et \quad x = pt$) et vérifie la condition de Rankine-Hugoniot sur celles-ci. D'après le théorème (2.1.1), c'est une solution faible de l'équation de Burgers, et ce pour tout p réel positif.
On a donc construit une infinité de solutions, en plus de la solution triviale nulle en $t = 0$. Cela montre que la notion de solution faible telle qu'on l'a définie ne permet pas d'avoir l'unicité pour un problème de Cauchy comme on l'a dans le sens classique, et cela ne concorde pas avec le point de vue physique pour lequel une condition initiale donnée ne permet qu'une seule évolution possible. Les solutions que l'on a construites n'ont d'ailleurs pas vraiment de sens physique, car forçant l'apparition d'une perturbation à partir d'une condition initiale nulle, et ne sont pas "souhaitables" pour la résolution d'une équation de loi de conservation. Il nous faut donc définir une nouvelle classe de solutions, plus restrictive que celle des solutions faibles afin d'obtenir l'unicité pour un problème de Cauchy, tout en étant plus large que celle des solutions classiques.

2.2 Approximation parabolique

2.2.1 Définition du problème

Dans la réalité physique, les lois de conservation telles qu'on les a étudiées sont en général l'approximation d'une équation parabolique avec un terme de viscosité, comme dans l'exemple de diffusion de charges électriques le long d'un fil conducteur, sous la forme :

$$\partial_t u_\varepsilon(t,x) + \partial_x(f(u_\varepsilon))(t,x) - \varepsilon \triangle u_\varepsilon(t,x) = 0,$$

le terme ε est négligeable. Notre cheminement sera d'utiliser cette équation, en trouver des solutions (dans un sens que l'on définira) et faire tendre ε vers 0, afin d'obtenir un certain type de solutions faibles pour la loi de conservation.
Tout d'abord, on va prendre $\varepsilon = 1$ et on fera intervenir ε uniquement lors du passage à la limite. On veut donc résoudre l'équation

$$\partial_t u(t,x) + \partial_x(f(u))(t,x) - \triangle u(t,x) = 0. \tag{2.4}$$

Formellement, la solution de cette équation est connue d'après la formule de Duhamel. Dans la pratique, on peut passer d'une loi de transport des particules (loi de conservation i.e particule entrant = particule sortant) via un tuyau en l'occurrence, évacuation d'une vapeur d'eau par un groupe électrogène à une loi de diffusion de ces molécules d'eau de façon rapide.
Et donc, l'équation (2.4), peut être mise sous la forme

$$u_t - (h(u,u_x))_x = 0$$

avec $h(u,u_x) = \dfrac{u.u_x}{\sqrt{u^2+u_x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$
Cette dernière, modélise le phénomène de diffusion rapide des molécules d'eau.

2.2.2 Régularité, existence globale, passage à la limite

Esquissons, sans entrer dans les détails, la suite du raisonnement nous permettant de construire des solutions entropiques à la loi de conservation. Tout d'abord, il est possible de montrer que les solutions de l'équation parabolique ont en fait une régularité C^∞, même pour une condition initiale seulement L^∞, du fait de l'effet régularisant du noyau de la chaleur. Pour prouver cela, il faudrait appliquer un théorème de point fixe de la même manière que dans le paragraphe précédent. On montrerait alors l'existence et l'unicité, localement, de solutions $\mathcal{C}^1$ en espace et, en itérant le raisonnement sur les dérivées de u, de solutions C^∞.
Le fait que les solutions de (2.4), au sens tel qu'on l'avait défini, soient C^∞ implique qu'elles sont aussi solutions de (2.4) au sens classique, c'est-à-dire qu'elles vérifient directement l'équation en temps qu'applications C^∞. En effet, les calculs formels effectués pour passer de l'équation (2.4) à ses solutions sont exacts sous les hypothèses de régularité de u.

Théorème 2.2.1. *Si u_ε est solution du problème approché de Cauchy :*
$\partial_t u_\varepsilon(t,x) + \partial_x(f(u_\varepsilon))(t,x) - \varepsilon\triangle u_\varepsilon(t,x) = 0$ *sur* $]0,T[\times\mathbb{R}$, *alors*

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(]0,T[\times\mathbb{R})} \leqslant \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Grâce à cette estimation, on peut montrer l'existence globale d'une solution entropique de l'équation (1). Cependant bien avant cela, venons en aux fonctions à variation bornée qui sont d'une grande importance dans l'intégrale de Riemann-Stieltjes et le calcul des variations car elles sont des choix naturels pour trouver la solution des problèmes de surface minimale comme problème de Didone.

2.3 Fonctions à variation bornée

En analyse, une fonction est dite à variation bornée quand elle vérifie une certaine condition de régularité. Cette condition a été introduite par le mathématicien Camille Jordan pour étendre le théorème de Dirichlet sur la convergence des Séries de Fourier.

2.3.1 Définition et exemples

Définition 2.3.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. L'espace $BV(\Omega)$ des fonctions à variation bornée dans Ω est l'ensemble des fonctions $u \in L^1(\Omega)$ telles qu'il existe une mesure de Radon bornée $\mu \in \mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ satisfaisant

$$\int_\Omega u\mathrm{div}\varphi dx = -\int_\Omega \varphi d\mu \quad \textit{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N).$$

En d'autres termes, la dérivée distributionnelle Du de u peut être représentée par une mesure de Radon bornée. On identifiera systématiquement Du et μ et on écrira que $Du \in \mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. La variation totale de u est alors donnée par

$$|Du|(\Omega) = sup\left\{\int_\Omega u\mathrm{div}\varphi dx : \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N), |\varphi| \leqslant 1\right\}.$$

De manière générale, on peut définir la variation totale de toute fonction $u \in L^1(\Omega)$ par

$$TV(u,\Omega) := sup\left\{\int_\Omega u\mathrm{div}\varphi dx : \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N), |\varphi| \leqslant 1\right\},$$

cette quantité pouvant éventuellement être infinie. Une application immédiate du Théorème de Représentation de Riesz montre alors qu'une fonction $u \in L^1(\Omega)$ appartient à $BV(\Omega)$ si et seulement si $TV(u,\Omega) < \infty$.

On vérifie alors le résultat suivant.

Proposition 2.3.1. *L'espace $BV(\Omega)$ a une structure d'espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme*

$$\|u\|_{BV(\Omega)} := \|u\|_{L^1(\Omega)} + |Du|(\Omega).$$

Exemple 2.3.1. (i) L'espace de Sobolev $W^{1,1}(\Omega)$ est contenu dans $BV(\Omega)$. De plus, si $u \in W^{1,1}(\Omega)$, alors $Du = \nabla u \mathcal{L}^N$ et $|Du|(\Omega) = \int_\Omega |\nabla u| dx$ où $\nabla u \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ est la dérivée faible de u.

Démonstration. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$, on a par définition de $W^{1,1}(\Omega)$ que

$$\int_\Omega u \mathrm{div}\varphi dx = -\int_\Omega \varphi . \nabla u dx$$

de sorte que $Du = \nabla u \mathcal{L}^N$. □

(ii) L'inclusion de $W^{1,1}(\Omega)$ dans $BV(\Omega)$ est stricte.

Démonstration. En effet, si $N = 1$ et $\Omega = [-1; 1]$, on considère la fonction caractéristique $u = \chi_{[0,1]} \in L^1([-1, 1])\backslash W^{1,1}([-1, 1])$. Or, le calcul de sa dérivée distributionnelle montre que $Du = \delta_0 \in \mathcal{M}([-1, 1])$ et donc $u \in BV([-1, 1])$. Par suite l'inclusion est stricte. □

Exemple 2.3.2. Soit $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et intégrable. Alors, $u \in BV([-a, b])$ et $|Du|(\Omega) \leqslant u(b) - u(a)$.

Démonstration. En effet, on suppose $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty$ et croissante sur $\mathbb{R}$. D'une part, on intègre sa dérivée sur $[a, b]$ et d'autre part, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(a, b)$ avec $|\varphi| \leqslant 1$ et tout $\varepsilon > 0$ assez petit, on a

$$\int_a^b u_\varepsilon \varphi' dx \leqslant u(b) - u(a).$$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, on obtient

$$\int_a^b u\varphi' dx \leqslant u(b) - u(a),$$

puis par passage au supremum (i.e, le plus petit majorant) parmi toutes les fonctions tests, il vient que $|Du|(\Omega) \leqslant u(b) - u(a)$. □

La variation totale jouit d'une propriété de semi-continuité inférieure.

Proposition 2.3.2. *Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $L^1(\Omega)$ telles que $u_k \longrightarrow u$ dans $L^1(\Omega)$. Alors*

$$TV(u,\Omega) \leqslant \liminf_{k\longrightarrow\infty} TV(u_k,\Omega).$$

Démonstration. Pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$ telle que $|\varphi| \leqslant 1$, on a

$$\int_\Omega u\mathrm{div}\varphi dx = \lim_{k\longrightarrow\infty}\int_\Omega u_k\mathrm{div}\varphi dx \leqslant \liminf_{k\longrightarrow\infty} TV(u_k,\Omega).$$

Par passage au supremum parmi toutes les fonctions tests, on obtient le résultat escompté. □

2.3.2 Approximations par des fonctions régulières

La topologie forte de BV est une topologie trop restrictive pour espérer avoir la densité des fonctions lisses dans cet espace. En effet si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions régulières qui approche dans $BV(\Omega)$, une fonction $u \in BV(\Omega)\backslash W^{1,1}(\Omega)$, alors $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $BV(\Omega)$ et donc également dans $W^{1,1}(\Omega)$. Par complétude de $W^{1,1}(\Omega)$ on aurait alors que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow v$ dans $W^{1,1}(\Omega)$ puis, par unicité de la limite (au sens des distributions) $u = v \in W^{1,1}(\Omega)$ ce qui est absurde.
Il convient alors d'affaiblir le mode d'approximation. C'est l'objet du théorème d'Anzelloti-Giaquinta suivant qui sera utilisé dans le chapitre 3, pour le cas $N = 1$ et la convergence faible :

Théorème 2.3.1. *(Anzelloti-Giaquinta) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $u \in BV(\Omega)$. Alors il existe une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $\mathbb{C}_c^\infty(\Omega) \subset BV(\Omega)$ telle que*
1. *$u_k \longrightarrow u$ fortement dans $L^1(\Omega)$;*
2. *$Du_k \rightharpoonup Du$ faible dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$;*
3. *$|Du_k|(\Omega) \longrightarrow |Du|(\Omega)$.*

2.4 Solutions entropiques

Finalement, on a construit, en passant par le problème parabolique, une solution faible à la loi de conservation, ce qui montre déjà qu'il y a toujours existence globale de ce type de solutions.
De plus, l'inégalité entropique vérifiée par les solutions u_ε passe à la limite, au moins dans un sens faible.

Passons maintenant à quelques définitions de solutions entropiques, qui seront utilisées dans la suite, pour montrer l'existence de solution (la meilleure solution qui assure l'unicité) pour notre équation de base.

Définition 2.4.1. (Solution entropique) Soient $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. On dit que u est solution faible entropique de

$$u_t + (f(u))_x = 0, (t,x) \in [0,\infty[\times\mathbb{R}$$

si pour toute fonction convexe $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, appelée "entropie", et $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\phi' = f'g'$, appelée " flux entropique de Krushkov", on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} (g(u)\varphi_t + \phi(u)\varphi_x)dxdt + \int_{\mathbb{R}} g(u_0(x))\varphi(0,x)dx \geqslant 0, \forall \varphi, g \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+).$$

Remarque 2.4.1. *En général, on prend* $g(r) = |r-k|$ *pour* $k \in \mathbb{R}$ *donné et* $\phi(u) = sign(u-k)(f(u)-f(k))$.

Définition 2.4.2. Étant donné $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}), u_0 \geqslant 0$, on dit qu'une fonction mesurable $u : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une super-solution entropique (respectivement, sous-solution entropique) du problème (1) dans $Q_T = [0,T] \times \mathbb{R} \quad si$ $u \in C([0,T]; L^1(\mathbb{R})), u(0) \geqslant u_0 (respectivement \quad u(0) \leqslant u_0)$ qui satisfait l'inégalité suivante :

$$\int_{Q_T} \widetilde{h}_S(u, DT(u))\phi dxdt + \int_{Q_T} \widetilde{h}_T(u, DS(u))\phi dxdt \leqslant \int_{Q_T} J_{TS}(u)\phi' dxdt - \int_{Q_T} h(u,u_x)\nabla\phi T(u)S(u)dxdt$$

(respectivement $\geqslant$ avec les mêmes termes) où

$$T_{a,b}(u(.)) \in L^1_{loc,w}\Big(0,T,BV([0,T],\mathbb{R})\Big) = \Big\{ f \; mesurable \; sur \; K \; et \; f \in L^1(K) \; pour$$

$$tout \; compact \; K \; de \; BV([0,T],\mathbb{R})\Big\} \; pour \; tout \; 0 < a < b, \; h(u,u_x) \in L^\infty\Big((0,T)\times\mathbb{R}\Big)$$

, $\phi \in \mathcal{D}((0,T)\times\mathbb{R}), \phi > 0, T \in \tau^+, S \in \tau^- \quad$ et J_{TS} est la primitive de $TS \in \tau$,

$\tilde{h}_T(u, DS(u)) = T(u)\tilde{h}(u, DS(u)) \; avec \; \tilde{h}(u, DS(u)) = h(u, DS(u)).DS(u) \in L^\infty((0,T)\times\mathbb{R})$

Chapitre 3

L'étude de l'unicité et de la régularité de la solution entropique de la RHE

3.1 Approche générale

L'étude de la régularité locale des solutions de l'équation relativiste de la chaleur dans une dimension d'espace, est une question délicate car, les diffusions non linéaires ont fait l'objet de plusieurs études dans une série d'article : [28], [29], [12] et [2].

L'objectif de ce chapitre est d'aborder théoriquement le problème (1), en une dimension d'espace avec des densités de probabilités bornées à support compact comme données initiales localement lipschitzienne.

Une méthode assez technique sera développée pour la démonstration du théorème ci-dessous qui constitue en réalité le cœur de ce chapitre.

Théorème 3.1.1. *Soit* $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ *avec* $u_0(x) \geqslant k > 0$ *pour* $x \in [a,b]$ *et* $u_0(x) = 0$ *pour* $x \notin [a,b]$.

Supposons $u_0 \in W^{1,\infty}([a,b])$ *et soit* $u(t;x)$ *la solution entropique de* (1)*, avec* $\|u_0\| = 1$. *Alors* $u \in C([0;T], L^1(\mathbb{R}^n))$ *vérifie les conditions suivantes :*

(i) $u(t;x) \geqslant k(t) > 0$ *pour tout* $x \in [a-ct; b+ct]$ *et tout* $t > 0$,
$u(t;x) = 0$, *si* $x \notin [a-ct; b+ct], t \in [0,T]$;

(ii) $u(t) \in BV(\mathbb{R}), u(t) \in W^{1,1}([a-ct, b+ct])$ *pour presque tout* $t \in [0,T]$ *et* $u(t)$ *est lisse (régulière) à l'intérieur de son support(dans son support) ;*

(iii) Si $u_0 \in W^{2,1}([a,b])$*, alors* u_t *est une mesure de Radon dans* $[0,T] \times \mathbb{R}$.

3.2 Quelques formes d'équations obtenues à partir de RHE

Soulignons que les nouveautés de ce résultat par rapport à la littérature discutée ci-dessus, renvoient à la régularité énoncée au point (ii) et (iii). Le point (i) est déjà traité dans [7]. Pour une question d'alléger la forme de l'équation relativiste de la chaleur en une dimension d'espace, la proposition suivante donne un moyen à cela :

Proposition 3.2.1. *Soit $u \in C([0;T], L^1(\mathbb{R}^n))$.*
u est solution de (1), si $u(t,x) = \widetilde{u}((\frac{\nu}{c^2})t, (\frac{\nu}{c})x)$ est solution de

$$u_t = \left(\frac{u.u_x}{\sqrt{u^2 + u_x^2}} \right)_x, x \in \mathbb{R}, t > 0 \tag{3.1}$$

Démonstration. En effet, passons par un changement de variable :
posons $X = \frac{\nu}{c}x$ et $T = \frac{\nu}{c^2}t$ on a :

$$U_T = \nu \left(\frac{UU_x}{\sqrt{U^2 + (\frac{\nu}{c})^2 U_X^2}} \right)_X \Longleftrightarrow \frac{c^2}{\nu}\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{u\frac{c}{\nu}\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{u^2 + (\frac{\nu}{c})^2 \times (\frac{c}{\nu})^2 (\frac{\partial u}{\partial x})^2}} \right)_x \times \frac{c}{\nu}$$

Après simplification on obtient :

$$u_t = \left(\frac{u.u_x}{\sqrt{u^2 + u_x^2}} \right)_x, x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

D'où le résultat escompté ! □

De cette proposition, découle une forme encore plus réduite du R.H.E.

Proposition 3.2.2. *Soit $u \in C([0;T], L^1(\mathbb{R}^n))$ alors, il existe une fonction $b(z,\xi) = \nabla_\xi f(z,\xi) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction à croissance linéaire lorsque $\xi \longrightarrow +\infty$ de sorte qu'il y a équivalence entre le RHE. et*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = divb(u, \nabla u)$$

avec $b = \nabla_\xi \Big(f(z,\xi) \Big) = \nu \frac{z\xi}{\sqrt{z^2 + (\frac{\nu}{c})^2 \xi^2}}$.

Démonstration. Pour la preuve de cette proposition, il suffit de mettre la fonction b sous la forme d'un gradient de f où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ à déterminer.
En effet,

$$u_t = (b(u,u_x))_x \Longleftrightarrow (b(u,u_x))_x = \nu \left(\frac{uu_x}{\sqrt{u^2 + (\frac{\nu}{c})^2 u_x^2}} \right)_x \Longleftrightarrow b(u,u_x) = \nu \frac{uu_x}{\sqrt{u^2 + (\frac{\nu}{c})^2 u_x^2}}$$

En posant $u = z; u_x = \xi$, on a :

$$b(z,\xi) = \nu \frac{z\xi}{\sqrt{z^2 + (\frac{\nu}{c})^2 \xi^2}}$$

En dimension 1, $b(z,\xi) = (f(z,\xi))_\xi$, on a

$$\nu \frac{z\xi}{\sqrt{z^2 + (\frac{\nu}{c})^2 \xi^2}} = (f(z,\xi))_\xi \Longleftrightarrow \int (f(z,\xi))_\xi \, d\xi = \nu z \int \frac{\xi}{\sqrt{z^2 + (\frac{\nu}{c})^2 \xi^2}} d\xi$$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow f(z,\xi) =& \frac{\nu.z}{(\frac{\nu}{c})^2} \int \frac{(\frac{\nu}{c})^2 \xi}{\sqrt{z^2 + (\frac{\nu}{c})^2 \xi^2}} d\xi \\ =& \frac{\nu.c^2.z}{\nu^2} \sqrt{z^2 + (\frac{\nu}{c})^2 \xi^2} \\ =& \frac{c^2}{\nu} z. \sqrt{z^2 + (\frac{\nu}{c})^2 \xi^2} \end{aligned}$$

D'où,

$$b(z,\xi) = \nabla_\xi f(z,\xi) = \nu \frac{z\xi}{\sqrt{z^2 + (\frac{\nu}{c})^2 \xi^2}}.$$

□

Considérons maintenant la distribution de fonction F associée à la mesure de probabilité u :

$$F : [0;T] \times \Omega \longrightarrow [0,1], \quad (t,x) \longmapsto F(t;x) = \int_{a-t}^{x} u(t;y)dy = \eta \ avec \ \eta \in [0,1].$$

Ce changement de variable, nous sera utile dans la suite. En effet, remarquons que si u est solution de (3.1) avec une donnée initiale u_0 alors λu est solution de (3.1) avec une donnée initiale λu_0. On peut supposer que $\|u_0\| = \|u(t)\|_{L^1} = 1$ et donc regarder la solution u comme l'évolution d'une densité de probabilité.
Après des calculs élémentaires, en supposant que toutes les fonctions prédéfinies sont bien définies et régulières, alors on obtient la proposition suivante.

Proposition 3.2.3. *Soit $u \in W^{1,1}(\Omega)$ avec $\Omega = [a-t; b+t]$ un fermé borné donc compact, une solution de $u_t = \left(\frac{u.u_x}{\sqrt{u^2+u_x^2}}\right)_x$. Soient F, la fonction définie par $F(t;x) = \int_{-\infty}^{x} u(t;y)dy$ et φ son inverse définie sur la variable masse $\eta \in (0,1)$ alors, φ vérifie l'équation suivante :*

$$\varphi_t = \frac{\varphi_{\eta\eta}}{\sqrt{\varphi_\eta^4 + \varphi_{\eta\eta}^2}} \tag{3.2}$$

La preuve de cette proposition est assez subtile. Deux étapes principales sont à suivre : les conditions au bord du problème et un changement judicieux de variable.

Démonstration. En effet, soit $u \in W^{1,1}(\Omega) \Longrightarrow \exists f \in L^1(\Omega)$ telle que :

$$\int_\Omega f\varphi_i dx = -\int_\Omega u(t;x)\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}dx, \forall \varphi_i \in D(\Omega), i = 1,2$$

où $D(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de classe $C^\infty(\Omega)$ à support compact.
Posons $\varphi_1 : t \longmapsto a - t$ et $\varphi_2 : t \longmapsto b + t$ deux fonctions de classe C^∞ à support compact dans $D(\Omega)$.
Cherchons $f \in L^1(\Omega)$.
La fonction

$$(t;x) \longmapsto \left(\frac{u_x}{\sqrt{u^2+u_x^2}}\right)_x,$$

est intégrable car,

$$\int_\Omega \left|\left(\frac{u_x}{\sqrt{u^2+u_x^2}}\right)_x\right| dx = \left[\frac{u_x}{\sqrt{u^2+u_x^2}}\right]_{a-t}^{b+t} \in \mathbb{R}$$

et qui est donc une quantité finie.
Ainsi donc

$$f(t;x) = \left(\frac{u_x}{\sqrt{u^2+u_x^2}}\right)_x \Longrightarrow f \in L^1(\Omega).$$

Il vient alors que :

$$\int_\Omega f\varphi_1 dx = -\int_\Omega u(t;x)\varphi_1' dx \quad et \quad \int_\Omega f\varphi_2 dx = -\int_\Omega u(t;x)\varphi_2' dx. \tag{3.3}$$

En exploitant la fonction précédente F on a :

$$F(t, \varphi(t,\eta)) = \int_\Omega u(t,\varphi)dx = \eta$$

et donc (3.3) devient :

$$\int_\Omega f\varphi_1 dx = \eta \quad et \quad \int_\Omega f\varphi_2 dx = -\eta \quad pour \quad x = \varphi(t,\eta).$$

Comme $f \in L^1(\Omega)$ et $\varphi_i \in D(\Omega), i = 1,2$ alors la dérivée par rapport à η de cette nouvelle expression de (3.3) donne :

$$\int_\Omega f\varphi_1 dx = 1 \quad et \quad \int_\Omega f\varphi_2 dx = -1$$
$$\iff \int_\Omega \left(\frac{u_x}{\sqrt{u^2+u_x^2}}\right)_x \varphi_1 dx = 1 \quad et \quad \int_\Omega \left(\frac{u_x}{\sqrt{u^2+u_x^2}}\right)_x \varphi_2 dx = -1$$
$$\iff \frac{u_x}{\sqrt{u^2+u_x^2}}(t;a-t) = 1 \; et \; \frac{u_x}{\sqrt{u^2+u_x^2}}(t;b+t) = -1,$$

d'après [18].
Considérons maintenant le changement de variable ci-dessus et définissons la fonction inverse φ de F de la manière suivante :

$$F : [0;T] \times \Omega \longrightarrow [0,1], (t,x) \longmapsto F(t;x) = \int_{a-t}^{\varphi(t,\eta)} u(t;x)dx = \eta$$

avec $\eta \in [0,1]$.
$u(t,x)$ étant dans $W^{1,1}(\Omega)$ alors elle est continue et la dérivée de F par rapport à η donne :

$$F_\eta(t,x) = \int_\Omega (\varphi_\eta(t,\eta)u(t,x))_\eta d\eta = 1; x = \varphi$$

car $dx = \varphi_\eta d\eta$
alors

$$\varphi_\eta(t,\eta)u(t,x) = 1. \tag{3.4}$$

Posons $u(t;x) = \overline{u}(u_1;u_2)$ avec $u_1 = t \; et \; u_2 = x$ on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial t}.$$

Or

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = 1 \; et \; \frac{\partial u_2}{\partial t} = \varphi_t \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial u_1} + \varphi_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial u_2}$$

.

Dérivons (3.4) par rapport à t, on obtient :

$$\varphi_\eta \frac{\partial u}{\partial t} + \varphi_{\eta t} u = 0 \Longrightarrow \int_{a-t}^{x} (\frac{\partial \overline{u}}{\partial u_1} + \varphi_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial u_2}) du_2 = 0$$

$$\int_{a-t}^{x} \frac{\partial \overline{u}}{\partial u_1} du_2 + \int_{a-t}^{x} \varphi_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial u_2} du_2 = 0.$$

En utilisant la formule d'intégration par partie sur cette intégrale, et en considérant les conditions aux limites ci-dessus tout en exploitant [18], on obtient :

$$\int_{a-t}^{\varphi} \overline{u}_t du_2 + \varphi_t \overline{u}(t,x) + \overline{u}(t, a-t) = 0.$$

Comme $\overline{u} \equiv u$, alors

$$\int_{a-t}^{x} u_t dx + \varphi_t u(t,x) + u(t, a-t) = 0 \tag{3.5}$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_{a-t}^{x} u_t d\xi &= \int_{a-t}^{x} \left(\frac{u u_x}{\sqrt{u^2 + u_x^2}} \right)_x d\xi \\
&= \left[\frac{u u_x}{\sqrt{u^2 + u_x^2}} \right]_{a-t}^{b+t} \\
&= \left(\frac{u u_x}{\sqrt{u^2 + u_x^2}} \right)(t,x) - \left(\frac{u u_x}{\sqrt{u^2 + u_x^2}} \right)(t, a-t) \\
&= \left(\frac{u u_x}{\sqrt{u^2 + u_x^2}} \right)(t,x) - u(t, a-t)
\end{aligned}$$

car d'après les conditions au bord (3.3) on a :
$\left(\frac{u_x}{\sqrt{u^2 + u_x^2}} \right)(t, a-t) = 1.$

Ainsi donc (3.5) se réécrit comme suit :

$$\varphi_t u(t,x) + u(t,a-t) - u(t,a-t) + \left(\frac{u u_x}{\sqrt{u^2+u^2}} \right)(t,x) = 0 \Longrightarrow \varphi_t u(t,x) = -\left(\frac{u u_x}{\sqrt{u^2+u^2}} \right)(t,x).$$

Cherchons l'expression de u_x.

D'après (3.4), $\varphi_\eta u(t,x) = 1$. En dérivant cette dernière par rapport à η on obtient : $\varphi_{\eta\eta} u(t,x) + \varphi_\eta u_\eta(t,x) = 0$.
Or
$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \times \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_\eta u_x$ et donc $\varphi_{\eta\eta} u = -\varphi_\eta^2 u_x \Longrightarrow u_x = \frac{-1}{\varphi_\eta^2}\varphi_{\eta\eta} u$.
Remplaçons u_x par son expression dans la nouvelle écriture de (3.5) on a donc :

$$\varphi_t u = -\left(\frac{\frac{-1}{\varphi_\eta^2}\varphi_{\eta\eta}u^2}{\sqrt{u^2 + \left(\frac{-1}{\varphi_\eta^2}\varphi_{\eta\eta}u\right)^2}}\right) = \frac{\varphi_{\eta\eta}u^2}{\varphi_\eta^2\sqrt{u^2 + \frac{u^2\varphi_{\eta\eta}^2}{\varphi_\eta^4}}}$$
$$= \frac{\varphi_{\eta\eta} \times u^2}{\varphi_\eta^2\sqrt{\varphi_\eta^4 + \varphi_{\eta\eta}^2}} \times \frac{\varphi_\eta^2}{u} = \frac{\varphi_{\eta\eta} \times u}{\sqrt{\varphi_\eta^4 + \varphi_{\eta\eta}^2}}.$$

Par suite,

$$\varphi_t = \frac{\varphi_{\eta\eta}}{\sqrt{\varphi_\eta^4 + \varphi_{\eta\eta}^2}}.$$

□

Remarque 3.2.1. *Notons que dans [4], il existe une unique solution entropique du problème (3.1) pour tout $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $u_0 \geqslant 0$. De plus, si u_0 a un support compact dans $\mathbb{R}$ et est localement bornée en tout point intérieur de son support, alors $supp(u(t)) = supp(u_0) \oplus B(0,t)$ voir [7] pour plus de détail.*
Rappelons que la condition d'entropie sur l'ensemble de saut de u peut être exprimée en disant que le profil de u est vertical en ces points. Puisque le support de $u(t)$ est $[a-t, b+t]$ et $u(t) \geqslant k(t) > 0$ dans $[a-t, b+t]$ pour tout $t > 0$ consulter [7], il y a un saut aux points $x = a - t, b + t$.

3.3 Régularité des solutions de RHE

Considérons maintenant dans la suite, le changement de variables $v = \varphi_\eta$.
Dérivons en effet, cette nouvelle équation par rapport à η (respectivement à t). On obtient $v_\eta = \varphi_{\eta\eta}$ (respectivement $v_t = \varphi_t$, après une intégration soigneuse par rapport à η sur $[0,1]$). Ceci étant, l'équation satisfaite par v, après avoir considéré la variable η comme muette et l'appelée par x sur $[0,1]$ est donc :

$$v_t = \left(\frac{v_x}{\sqrt{v^4 + v_x^2}}\right)_x \qquad t > 0, \quad x \in [0,1]. \tag{3.6}$$

La condition initiale v_0 est déterminée à partir de la condition initiale u_0.
Supposons que $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}), u_0 \geqslant k$, et $u_0 \in W^{1,\infty}([a,b])$.
Comme la relation entre u_0 et v_0 est déterminée par, $v_0(\eta) = 1/u_0(x)$, alors il s'en suit que $\alpha_1 = 1/\|u_0\|_\infty \leqslant v_0 \leqslant 1/k = \alpha_2$.
On a également $v_0 \in W^{1,\infty}([0,1])$. On notera que :

$$\int_0^1 v_0(\eta)d\eta = \int_a^b dx = b - a. \tag{3.7}$$

Si nous désignons par ν la normale unitaire extérieure à $[0,1]$ i.e $\nu(0) = 1$ et $\nu(1) = 1$, les conditions aux limites naturelles pour (3.6) sont :

$$\frac{v_x}{\sqrt{v^4 + v_x^2}}\nu(x) = 1, \quad x \in \partial(0,1), \tag{3.8}$$

avec $\partial(0,1) = \{0,1\}$.
La première étape vers la démonstration du théorème (3.1.1), consiste à montrer un résultat de régularité pour le problème approché de Cauchy suivant :

$$v_t = \left(\frac{v_x}{\sqrt{v^4 + v_x^2}}\right)_x + \varepsilon v_{xx} \quad t \in [0,1], \quad x \in [0,1] \tag{3.9}$$

et

$$\left(\frac{v_x}{\sqrt{v^4 + v^2}} + \varepsilon v_x\right)_x \nu(x) = 1 - \epsilon^{1/3} \quad t \in [0,1], \quad x \in \partial(0,1), \tag{3.10}$$

où $\varepsilon > 0$.
Ce problème approché de Cauchy, nous permet de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.3.1. *Soit $v_0 \in W^{1,\infty}([0,1]), v_0 \geqslant \alpha_1 > 0$. Il existe alors une solution régulière de (3.9) dans $[0,T]\times[0,1]$ avec $v(0,x) = v_0(x)$ et satisfaisant les conditions aux limites (3.10) (au sens faible).*

La démarche de la démonstration de ce théorème, est répartie sur sept(07) étapes. Dans les étapes 1-3, on prouve quelques estimations formelles qui sont également utiles pour affirmer l'existence des solutions de (3.9) et (3.10) dans l'étape 4. Au niveau des étapes 5, 6 et 7, on démontre un résultat de régularité de la solution approchée et le passage à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, permet d'obtenir la solution du problème initial.
Ceci étant, nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.3.1. *Soit h la fonction définie de $[0,+\infty[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :*

$$h(z,\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{z^4+\xi^2}},$$

alors $h(z,\xi).\xi \geqslant |\xi| - z^2, \quad \forall z \geqslant 0, \xi \in \mathbb{R}.$

Démonstration. En effet,

$$h(z,\xi)\xi = \frac{\xi^2}{\sqrt{z^4+\xi^2}} = \frac{\xi^2}{|\xi|\sqrt{1+\left(\frac{z^2}{\xi}\right)^2}} = \frac{\xi}{\sqrt{1+\left(\frac{z^2}{\xi}\right)^2}}$$

car $|\xi|^2 = \xi^2 = |\xi|.|\xi|, \quad \xi \in \mathbb{R}$. D'après les propriétés élémentaires sur la racine carrée d'un réel positif, on a :
$\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad a,b \in \mathbb{R}^+$. Dans notre racine $a = 1, b = (\frac{z^2}{\xi})^2$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \sqrt{1+\left(\frac{z^2}{\xi}\right)^2} \leqslant \sqrt{1} + \sqrt{\left(\frac{z^2}{\xi}\right)^2} \\
&\Longrightarrow \sqrt{1+\left(\frac{z^2}{\xi}\right)^2} \leqslant 1 + \frac{z^2}{|\xi|} \\
&\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z^2}{\xi}\right)^2}} \geqslant \frac{1}{1+\frac{z^2}{|\xi|}} \quad avec \quad |\xi| > 0 \\
&\Longrightarrow \frac{|\xi|}{\sqrt{1+\left(\frac{z^2}{\xi}\right)^2}} \geqslant \frac{|\xi|}{1+\frac{z^2}{|\xi|}}.
\end{aligned}$$

On a alors,

$$h(z,\xi).\xi \geqslant \frac{|\xi|}{1+\frac{z^2}{|\xi|}}. \tag{3.11}$$

Posons $\lambda = \frac{|\xi|}{1+\frac{z^2}{|\xi|}} - (|\xi| - z^2)$ et $\lambda_0 = \frac{z^2}{|\xi|}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \lambda &= |\xi|\frac{1-1+\lambda_0-\lambda_0+\lambda_0^2}{1+\lambda_0}. \\
&= |\xi|\frac{\lambda_0^2}{1+\lambda_0} \geqslant 0, \quad |\xi| \geqslant 0, \quad \lambda_0 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{|\xi|}{1+\frac{z^2}{\xi}} \geqslant |\xi| - z^2 \tag{3.12}$$

D'après (3.11) et (3.12), on a la relation suivante :

$$h(z,\xi).\xi \geqslant \frac{|\xi|}{1+\frac{z^2}{\xi}} \geqslant |\xi| - z^2.$$

D'où

$$h(z,\xi).\xi \geqslant |\xi| - z^2. \tag{3.13}$$

□

3.3.1 Grande ligne de la démonstration du Théorème (3.1.1)

3.3.1.1 Première étape : Considérons d'abord l'évolution de la norme L^1.

Lemme 3.3.1. *Soit v une solution du problème (3.6). Alors le gradient $v_x \in L^p([0,T]\times[0,1])$ est borné indépendamment de ε.*

Démonstration. En effet, intégrons (3.9) (le problème de Cauchy approché) sur $[0,1]$. D'après le théorème fondamental de l'analyse on a :

$$\int_0^1 v_t(t,x)dx = \frac{d}{dt}\int_0^1 v(t,x)dx.$$

Posons :

$$I = \int_0^1 v_t(t,x)dx = \int_0^1 v_t dx = \int_0^1 \left[\left(\frac{v_x}{\sqrt{v^4+v_x^2}}\right)_x + \varepsilon v_{xx}\right]dx.$$

La primitive de v_{xx} est v_x et celle $\left(\frac{v_x}{\sqrt{v^4+v_x^2}}\right)_x$ donne $h(v,v_x) = \frac{v_x}{\sqrt{v^4+v_x^2}}$.

Alors I devient :

$$\begin{aligned} I &= \left(h(v,v_x)+\varepsilon v_x\right)(1) - \left(h(v,v_x)+\varepsilon v_x\right)(0) \\ &= \left(h(v,v_x)+\varepsilon v_x\right)(1) + \left(h(v,v_x)+\varepsilon v_x\right)(-1)(0) \\ &= 1-\varepsilon^{1/3}+1-\epsilon^{1/3} \\ &= 2(1-\varepsilon^{1/3}). \end{aligned}$$

Et cela d'après les conditions aux limites (3.10).

En utilisant toujours le théorème fondamental de l'analyse, on a :

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 v(t,x)dx = \frac{\int_0^1 v(t,x)dx - \int_0^1 v(0,x)dx}{t} = I$$

$\Longrightarrow \int_0^1 v(t,x)dx - \int_0^1 v(0,x)dx = t \times I \Longrightarrow \int_0^1 v(t,x)dx = \int_0^1 v(0,x)dx + 2t(1-\varepsilon^{1/3})$.

Maintenant multiplions l'équation (3.9) par v^p, $\quad p \in [1;+\infty]$ on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 v_t v^p dx &= \int_0^1 \left[\left(\frac{v_x}{\sqrt{v^4 + v_x^2}} \right)_x + \varepsilon v_{xx} \right] v^p dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{v_x}{\sqrt{v^4 + v_x^2}} + \varepsilon v_x \right)_x v^p dx \\ &= \int_0^1 \left(h(v, v_x) + \varepsilon v_x \right)_x v^p dx\end{aligned}$$

Car $h(v, v_x) = \dfrac{v_x}{\sqrt{v^4 + v_x^2}}$.

Posons

$$J = \int_0^1 v_t v^p dx; \quad K = \int_0^1 \left(h(v, v_x) + \varepsilon v_x \right)_x v^p dx.$$

Comme $\left(v^{p+1}\right)_t = (P+1) v_t v^p \Longrightarrow v_t v^p = \frac{1}{P+1} \left(v^{p+1}\right)_t$

et donc

$$J = \frac{1}{P+1} \int_0^1 \left(v^{p+1}\right)_t dx = \frac{1}{P+1} \frac{d}{dt} \int_0^1 v^{p+1} dx.$$

Pour l'intégrale K, nous utilisons la formule d'intégration par partie. On a donc :

$$\begin{aligned}K &= \int_\partial (0,1)(h(v, v_x) + \varepsilon v_x) v^p - \int_0^1 (h(v, v_x) + \varepsilon v_x)_x \left(v^p\right)_x dx. \\ &= (h(v, v_x) + \varepsilon v_x) v^p(1) - (h(v, v_x) + \varepsilon v_x) v^p(0) - \int_0^1 (h(v, v_x) + \varepsilon v_x)_x \left(v^p\right)_x dx. \\ &= (h(v, v_x) + \varepsilon v_x) v^p(1) + (h(v, v_x) + \varepsilon v_x) v^p(0)(-1) - \int_0^1 (h(v, v_x) + \varepsilon v_x)_x \left(v^p\right)_x dx. \\ &= (1 - \varepsilon^{1/3})(v^p(1) + v^p(0)) - p \int_0^1 h(v, v_x) v_x v^{p-1} dx - \varepsilon p \int_0^1 (v_x)^2 v^{p-1} dx,\end{aligned}$$

puisque, d'après les conditions aux limites (3.10), les deux premiers facteurs sont égaux à $1 - \varepsilon^{1/3}$ et $\left(v^p\right)_x = (p) v_x v^{p-1}$.

D'après l'inégalité de Sobolev en dimension 1, on a :

$$v^p(1) + v^p(0) = \int_\partial (0,1) v^p dx \leqslant \int_0^1 |v|^p dx + \int_0^1 |v_x|^p dx, \quad v \in W^{1,p}(0,1)$$

$$\Longrightarrow (1 - \varepsilon^{1/3})(v^p(1) + v^p(0)) \leqslant (1 - \varepsilon^{1/3}) \left(\int_0^1 |v|^p dx + \int_0^1 |v_x|^p dx \right).$$

Or $1 - \varepsilon^{1/3} \leqslant 1$ et donc

$$(1 - \varepsilon^{1/3})(v^p(1) + v^p(0)) \leqslant \int_0^1 |v|^p dx + \int_0^1 |v_x|^p dx.$$

Ainsi donc K dévient :

$$K \leqslant \int_0^1 |v|^p dx + \int_0^1 |v_x|^p dx - p\int_0^1 h(v,v_x)v_x v^{p-1}dx - \varepsilon p\int_0^1 (v_x)^2 v^{p-1}dx.$$

D'après (3.13), $h(v,v_x).v_x \geqslant |v_x| - v^2$.
En multipliant cette inégalité par v^{p-1} on a :
$h(v,v_x).v_x v^{p-1} \geqslant |v_x|v^{p-1} - v^{p+1}$

$$p\int_0^1 h(v,v_x).v_x v^{p-1}dx \geqslant p\int_0^1 |v_x|v^{p-1}dx - p\int_0^1 v^{p+1}dx$$

$$\Longrightarrow -p\int_0^1 h(v,v_x).v_x v^{p-1}dx \leqslant -p\int_0^1 |v_x|v^{p-1}dx + p\int_0^1 v^{p+1}dx.$$

Alors,

$$\begin{aligned} K &\leqslant \int_0^1 |v|^p dx + \int_0^1 |v_x|^p dx - p\int_0^1 |v_x|v^{p-1}dx + p\int_0^1 v^{p+1}dx - \varepsilon p\int_0^1 (v_x)^2 v^{p-1}dx. \\ &\leqslant \int_0^1 |v|^p dx + \int_0^1 |v_x|^p dx - \int_0^1 |v_x|^p dx + p\int_0^1 v^{p+1}dx - \varepsilon p\int_0^1 (v_x)^2 v^{p-1}dx. \\ &\leqslant \int_0^1 |v|^p dx + p\int_0^1 v^{p+1}dx - \varepsilon p\int_0^1 (v_x)^2 v^{p-1}dx. \end{aligned}$$

Comme $J = K$ alors,

$$\frac{1}{P+1}\frac{d}{dt}\int_0^1 v^{p+1}dx + \varepsilon p\int_0^1 (v_x)^2 v^{p-1}dx \leqslant \int_0^1 |v|^p dx + p\int_0^1 v^{p+1}dx$$

Intégrons par rapport à t sur $[0,T]$ les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{P+1}\frac{d}{dt}\int_0^1 v^{p+1}dx \leqslant \int_0^1 (|v|^p + pv^{p+1})dx$$

et

$$\varepsilon p\int_0^1 (v_x)^2 v^{p-1}dx \leqslant \int_0^1 (|v|^p + pv^{p+1})dx$$

On a

$$\frac{1}{P+1}\frac{d}{dt}\int_0^T\int_0^1 v^{p+1}dxdt \leqslant \int_0^T\int_0^1 (|v|^p + pv^{p+1})dxdt.$$

Comme

$$\int_0^1 |v|dx < \infty,$$

et les bornes d'intégration de x et celles de t sont indépendantes, alors d'après le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\frac{1}{P+1}\frac{d}{dt}\int_0^T \left(\int_0^1 v^{p+1}dx\right)dt = \int_0^1 \left(\int_0^T v_t v^p dt\right)dx = \frac{1}{P+1}\int_0^1 v^p dx,$$

et d'après le lemme de Gronwall, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 v^p dx &\leqslant (P+1)\int_0^1 \left(\int_0^T (|v|^p + pv^{p+1})dt\right) dx \\ &\leqslant C_1(T,p), \quad \forall t \in [0,T], \quad t \in [0,+\infty[\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varepsilon \int_0^T \int_0^1 (v_x)^2 v^{p-1} dx &\leqslant \frac{1}{p}\int_0^1 (|v|^p + pv^{p+1})dxdt \\ &\leqslant C_2(T,p), \quad \forall t \in [0,T], \quad t \in [0,+\infty[.\end{aligned}$$

Les constantes C_1 et C_2 ne dépendent pas de ε. Alors

$$\frac{d}{dt}\int_0^T \left(\int_0^1 v^{p+1} dx\right) dt + \varepsilon \frac{d}{dt}\int_0^T \int_0^1 v^{p+1} dxdt \leqslant C(T,p)$$

avec $C = C_1(T,p) + C_2(T,p)$ une constante qui ne dépend pas de ε.

3.3.1.2 Deuxième étape :L^∞(limites *sup* et *inf* de v) indépendante de ε.

Pour cela, construisons une super-solution au problème de Cauchy (3.9) et (3.10). Soit

$$V : [0,T] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}; (t,x) \longmapsto B(t) - \sqrt{\varepsilon^{2/3} + x(1-x)}$$

avec B une fonction lisse et croissante.
Prenons pour $t = 0, B(0)$ telle que

$$V(0,x) = B(0) - \sqrt{\varepsilon^{2/3} + x(1-x)} \geqslant v_0(x).$$

Déterminons les expressions des différentes grandeurs suivantes :V_t; V_x; V_{xx} *et* $h(V;V_x)$.
On a :

$\blacklozenge V(t,x) = B(t) - \sqrt{\varepsilon^{2/3} + x(1-x)} \Longrightarrow V_t = B'(t),$ *car* $\left(\sqrt{\varepsilon^{2/3} + x(1-x)}\right)_t = 0.$

$\blacklozenge V_x = \frac{1-2x}{2\sqrt{\varepsilon^{2/3}+x(1-x)}} = \frac{x-1/2}{\sqrt{\varepsilon^{2/3}+x(1-x)}}.$

$$\blacklozenge V_{xx} = \frac{\sqrt{\varepsilon^{2/3} + x(1-x)} - \frac{(x-1/2)(x-1/2)}{\sqrt{\varepsilon^{2/3}+x(1-x)}}}{\sqrt{\varepsilon^{2/3} + x(1-x)}} = \frac{\varepsilon^{2/3} + x - 1/2x - 1/2x + x^2 - x^2 + 1/4}{(\varepsilon^{2/3} + x(1-x))^{3/2}},$$

alors $V_{xx} = \frac{\varepsilon^{2/3}+1/4}{(\varepsilon^{2/3}+x(1-x))^{3/2}}$

$$\blacklozenge h(V;V_x) = \frac{V_x}{\sqrt{V^4 + V_x^2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\frac{x-1/2}{\sqrt{\varepsilon^{2/3}+x(1-x)}}}{\sqrt{V^4+\left(\frac{x-1/2}{\sqrt{\varepsilon^{2/3}+x(1-x)}}\right)^2}} \\
&= \frac{x-1/2}{\sqrt{V^4\left(\varepsilon^{2/3}+x(1-x)\right)+(x-1/2)^2}} \\
&= \frac{x-1/2}{D(t,x)}
\end{aligned}
$$

avec $D(t,x) = \sqrt{V^4(\varepsilon^{2/3}+x(1-x))+(x-1/2)^2}$.

Notons que D est une fonction régulière et strictement croissante sur $[0,1]$. De plus, comme B est croissante, alors

$$D(t,x) \geqslant D(0,x) \quad i.e \quad D(t,x) \geqslant \sqrt{V(0,x)^4(\varepsilon^{2/3}+x(1-x))+(x-1/2)^2}.$$

On a

$$|(h(v,v_x))_x| = \left|\frac{V^4(\varepsilon^{2/3}+x(1-x))+(x-1/2)^2+(x-1/2)(1-2v^3v_x(x-1/2))}{(D(t,x))^3}\right|.$$

Comme $\varepsilon^{2/3} \leqslant 1$ et que $(D(t,x))^3 \geqslant (D(0,x))^3 \Longrightarrow \frac{1}{(D(t,x))^3} \leqslant \frac{1}{(D(0,x))^3}$, alors le numérateur est inférieur à une certaine constante $C_3 \geqslant 0$ de telle sorte que

$$|(h(v,v_x))_x| \leqslant C_4,$$

avec $C_4 = \frac{C_3}{(D(0,x))^3}$ une constante qui ne dépend pas de ε.
On sait que, d'après la propriété sur la racine carrée,

$$\varepsilon \leqslant (\varepsilon^{2/3}+x(1-x))^{3/2} \quad \forall x, \varepsilon \in [0,1]$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{(\varepsilon^{2/3}+x(1-x))^{3/2}} \leqslant 1/\varepsilon, \quad \varepsilon \in]0,1].$$

En multipliant cette inégalité par $\varepsilon^{2/3}+1/4$, on obtient :

$$V_{xx} \leqslant \frac{\varepsilon^{2/3}+1/4}{\varepsilon} \Longrightarrow \varepsilon V_{xx} \leqslant \varepsilon^{2/3}+1/4.$$

Or

$$|(h(v,v_x))_x| \leqslant C_4,$$

et donc

$$(h(v,v_x))_x + \varepsilon V_{xx} \leqslant C_4 + \varepsilon^{2/3} + 1/4$$

$\varepsilon^{2/3}$ étant inférieur ou égal à 1, alors naturellement,

$$(h(v, v_x))_x + \varepsilon V_{xx} \leqslant C_4 + 1 + 1/4 = C_4 + 5/4.$$

Posons $\widetilde{C} = C_4 + 5/4$. Cette constante est indépendante de ε.
Soit $B'(t) \geqslant \widetilde{C}$ telle que,

$$B(t) = B(0) + \widetilde{C}t.$$

Montrons que si, $T > 0$; $\quad \varepsilon \geqslant 0, v(t, x)$ suffisamment petit alors,

$$(h(V, V_x) + \varepsilon V_x)\nu \geqslant 1 - \varepsilon^{1/3},$$

dont $V(t, x)$ est une super-solution du problème de Cauchy (3.9) et (3.10) sur $[0, T]$.
En effet,

$$D(t, 0) = \sqrt{V^4(t, 0)\varepsilon^{2/3} + 1/4},$$

avec $V^4(t, 0) = B(t) - \varepsilon^{1/3}$. On a alors :

$$\begin{aligned}(h(V, V_x) + \varepsilon V_x)\nu|_{x=0} &= \left(\frac{-1/2}{D(t, 0)} + \frac{-1/2\varepsilon}{\varepsilon^{1/3}}\right)\nu \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{4(B(t) - \varepsilon^{1/3})^4\varepsilon^{2/3} + 1}} + 1/2\varepsilon^{2/3}\right)(-\nu) \\ &\geqslant 1 - \varepsilon^{1/3},\end{aligned}$$

car $V(t, x)$ est une super-solution du problème de Cauchy (3.9) et (3.10) sur $[0, T]$.
Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et de façon analogue en $x = 1$, on obtient :

$$(h(V, V_x) + \varepsilon V_x)\nu|_{x=1} \geqslant 1 - \varepsilon^{1/3}. \tag{3.14}$$

Puisque $V(t, x)$ est une super-solution du problème de Cauchy (3.9) et (3.10), par le principe de comparaison classique on obtient $v \leqslant V$ dans $[0, T] \times [0, 1]$, alors il existe $M \geqslant 0$ dépendant seulement de u_0 et T tel que
$v(t; x) \leqslant M, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1]$.
Observons finalement que $v \geqslant \alpha_1$.
En effet, $\overline{v} = \alpha_1$ est une sous-solution du problème de Cauchy (3.9) et (3.10) et par le principe de comparaison dans sa version faible, on en déduit que $v \geqslant \alpha_1$.

3.3.1.3 Troisième étape : v_x bornée sur L^p.

En Combinant les estimations obtenues dans la deuxième étape à travers le lemme de Gronwall, on en déduit que :

$$\int_0^T \int_0^1 |v_x|^p dxdt \leqslant C(T;p) \quad p \in [1, +\infty[\tag{3.15}$$

□

3.3.1.4 Quatrième étape : Existence de solutions régulières pour le problème de Cauchy approché (3.9) et (3.10).

L'existence de solutions de (3.9) et (3.10) découle des résultats classiques dans [26] que suit :

Théorème 3.3.2. *(Théorème d'existence) Soit $u(t,x) \in W^{1,\infty}([0,T] \times [0,1])$ une solution de $u_t - h_x + h = 0$ avec $\max\limits_{[0,T]\times[0,1]} |u| = M$.*
Si les fonctions h_x et h satisfont :

$$h(u;u_x) \geqslant M|u_x| \quad et \quad |h_x| \leqslant C(p,T), T > 0; p \in [1; +\infty[$$

alors les quantités $|u_x|^{(a)}_{[0,T]\times[0,1]}; a > 0$ et les normes $\|u_{xx}\|_2, \|u_t\|_2$ sur $[0,T] \times [0,1]$ sont estimées par une constante dépendante uniquement de $M; p \quad et \quad T$.
En outre, si $\max\limits_{x\in[0,1]} |u_x(0,x)| < \infty$ alors :

$$\max_{[0,T]\times[0,1]} |u_x(t,x)| \quad et \quad \|u_{xx}\|_2 \quad , \|u_t\|_2$$

existent et sont estimées par des constantes dépendantes seulement de
$M; p; T \quad et \quad \max\limits_{x\in[0,1]} |u_x(0,x)|$.
Pour la preuve détaillée, le lecteur peut consulter le livre de Ladysensky [26].

Remarque 3.3.1. *Notons qu'en raison des limites à priori, on peut utiliser le flux suivant :*

$$h_M(v, v_x) = \frac{v_x}{\sqrt{inf(|v|, M)^4 + v_x^2}}$$

de sorte que les hypothèses du théorème d'existence tiennent, voir les articles [26] et [27] pour de plus amples détails .
Alors supposons une condition de compatibilité sur v_0 pour qu'elle satisfasse la condition au limite du problème de Cauchy approché (3.10).

Si v_0 ne satisfait pas (3.10), alors on définit une fonction $v_{0\varepsilon} \in W^{1,\infty}([0,1])$ satisfaisant (3.10).
Cette modification n'est faite que seulement dans un voisinage de $x \in \partial(0,1)$ de sorte que $v_{0\varepsilon}$ soit localement lipschitzienne à l'intérieur de $[0,1]$avec des constantes de Lipschitz indépendantes de ε.
Notons aussi de ce fait que, cette modification peut être faite de telle sorte que :

$$\sup_{x\in[0,1]} \varepsilon \|v_{0\varepsilon x}\|_\infty < \infty. \tag{3.16}$$

Proposition 3.3.2. *Soit $v_{0\varepsilon} \in W^{1,\infty}([0,1])$ une solution du problème de Cauchy approché (3.10).*
Alors (3.10) est compatible avec (3.16).

Démonstration. En effet,
posons $v_{0\varepsilon x} = A(\varepsilon)\varepsilon^{-a}$ avec $a = 1/6$ et $A(\varepsilon) = 1/\sqrt{2v_{0\varepsilon}^2(0)} + O(\varepsilon^{1/3})$.
Remplaçons l'expression de $v_{0\varepsilon x}$ dans (3.10) on a :

$$\left(\frac{v_{0\varepsilon x}}{\sqrt{v_{0\varepsilon}^4 + v_{0\varepsilon x}^2}} + \varepsilon v_{0\varepsilon x}\right)\nu = \left(\frac{A(\varepsilon)/\varepsilon^a}{\sqrt{v_{0\varepsilon}^4 + A^2(\varepsilon)/\varepsilon^{2a}}} + \varepsilon A(\varepsilon)/\varepsilon^a\right)\nu = 1 - \varepsilon^{1/3}$$

car $\lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0} O(\varepsilon^{1/3}) = 0$.
Une expansion asymptotique montre que $A(\varepsilon) = 1/\sqrt{2v_{0\varepsilon}^2(0)} + O(\varepsilon^{1/3})$ et par conséquent, (3.10) est compatible avec (3.16). □

On a le lemme suivant :

Lemme 3.3.2. *Soit v_ε la solution du problème de Cauchy approché (3.9) et (3.10)*
.
Alors v_ε a des dérivées Holdériennes continues sur $\partial(0,1)$ et pour une fonction $f : \quad (t,x) \longmapsto (v_{\varepsilon xx}; v_{\varepsilon t})$ on a :

$$\sup_{x\neq y}\left[min\left(d((x,t),\mathbb{P}); d((y,s),\mathbb{P})\right)^{1-\delta} \frac{|f(x)-f(y)|}{(|x-y|^2+|s-t|)^{\alpha/2}}\right]$$

où $\alpha, \delta > 0$; $\mathbb{P}$ est la limite parabolique de $[0,1]\times[0,T]$ et $d(.,\mathbb{P})$ représente la distance du point $(.,t)$ à $\mathbb{P}$.
Pour la preuve de ce lemme, consulter le livre de O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva, Linear and quasi-linear equations of parabolic type [26], pour plus de détails .

3.3.1.5 Cinquième étape : Une borne de Lipschitz locale sur v_ε uniforme en ε.

Pour simplifier la notation, nous écrivons v au lieu de v_ε.
L'étape cinq est une conséquence du théorème suivant :

Théorème 3.3.3. *Soient $\phi \geqslant 0$ une fonction régulière à support compact $[a,b] \subset [0,1]$ et $w = |v_x|^2\phi^2$ alors :*

$$w_t \leqslant A(t,x)w_{xx} + B(t,x)w_x + C(t,x)w + f(t,x) \tag{3.17}$$

où A et B sont des fonctions régulières, $C = (12+\varepsilon/2)$ et $f = P(v,\phi,\phi_x)|\phi_x| + \frac{7}{2}\varepsilon\phi_x^2 v_x^2$ où P est un polynôme en v de degré 3.

Démonstration. Pour la preuve de l'affirmation (3.17), deux étapes inévitablement, sont à suivre.
D'abord par un changement de variable judicieux pour réduire son expression et ensuite une estimation de quelques quantités permettent de donner une conclusion escomptée.
En effet,
supposons le dernier terme $\varepsilon v_x^2 \in L^\infty(0,T)$.
En utilisant l'étape 2, alors $f \in L^\infty((0,T)\times(0,1))$.
Soit le changement de variable suivant : $\overline{w}(t,x) = \exp(-Ct)w(t,x) - \int_0^t f(s)ds$.
D'après le théorème fondamental de l'analyse on a :

$$\overline{w}_t = -C\exp(-Ct)w(t,x) + \exp(-Ct)w_t - f.$$

Or $\exp(-Ct) \leqslant 1 \Longrightarrow -Cw \leqslant -Cw\exp(-Ct)$ et

$$w_t \leqslant Aw_{xx} + Bw_x + Cw + f \Longrightarrow \overline{w}_t \leqslant -\overline{Cw} + \overline{Aw_{xx}} + \overline{Bw_x} + \overline{Cw} + \overline{f} - \overline{f}.$$

Et donc

$$\overline{w}_t \leqslant A\overline{w}_{xx} + B\overline{w}_x$$

car $\overline{A} = A \quad et \quad \overline{B} = B$.
Cette dernière expression est la nouvelle forme réduite de (3.17).
En utilisant le principe du maximum on a :

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\overline{w}(t)\|_\infty \leqslant \|\overline{w}(0)\|_\infty \Longrightarrow \sup_{t\in[0,T]} \|w(t)\|_\infty \leqslant C(T,\phi,\|\overline{w}(0)\|_\infty).$$

En effet,

$$\overline{w}(t) = |\overline{v}_x(t)|^2\overline{\phi}^2(t) \Longrightarrow \overline{w}(0) = |\overline{v}_x(0)|^2\overline{\phi}^2(0).$$

Or ϕ est lisse et positive et $v_x(0) \geqslant k(t) \geqslant 0, t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \text{ ess-sup}_{t\in[0,T]}|\overline{w}(t)| \leqslant \text{ ess-sup}_{t\in[0,T]}|\overline{w}(0)| \\
&\Longrightarrow \sup_{t\in[0,T]} \|\overline{w}(t)\|_\infty \leqslant \|\overline{w}(0)\|_\infty \\
&\Longrightarrow \overline{\sup_{t\in[0,T]} \|\overline{w}(t)\|_\infty} \leqslant \overline{\|\overline{w}(0)\|_\infty} \\
&\Longrightarrow \sup_{t\in[0,T]} \|w(t)\|_\infty \leqslant C(T,\phi,\|w(0)\|_\infty)
\end{aligned}$$

Passons maintenant au calcul des quantités suivantes :

$h_z(z,\xi); \quad h_{zz}(z,\xi); \quad h_\xi(z,\xi); \quad h_{\xi z}(z,\xi); \quad h_{\xi\xi}(z,\xi); \quad w_x \quad et \quad w_{xx}.$

On a :

$h(z,\xi) = \dfrac{\xi}{\sqrt{z^4+\xi^2}}, \quad z \geqslant 0, \quad \xi \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases}
h_z(z,\xi) = \frac{-4z^3\xi/2\sqrt{z^4+\xi^2}}{z^4+\xi^2} = \frac{-2z^3\xi}{(z^4+\xi^2)^{3/2}} \\
h_{zz}(z,\xi) = \frac{-6z^2\xi(z^4+\xi^2)^{3/2}+3/2\times 4z^3(z^4+\xi^2)^{1/2}\times 2z^3\xi}{(z^4+\xi^2)^3} = \frac{-6z^2\xi}{(z^4+\xi^2)^{3/2}} + \frac{12z^6\xi}{(z^4+\xi^2)^{5/2}} \\
h_\xi(z,\xi) = \frac{z^4+\xi^2-\xi^2}{(z^4+\xi^2)^{3/2}} = \frac{z^4}{(z^4+\xi^2)^{3/2}} \\
h_{\xi z}(z,\xi) = \frac{4z^3(z^4+\xi^2)^{3/2}-3/2\times 4z^3(z^4+\xi^2)^{1/2}z^4}{(z^4+\xi^2)^3} = \frac{-2z^7+4z^3\xi^2}{(z^4+\xi^2)^{5/2}} \\
h_{\xi\xi}(z,\xi) = \frac{-3/2\times 2z^4(z^4+\xi^2)^{1/2}}{(z^4+\xi^2)^3} = \frac{-3z^4\xi}{(z^4+\xi^2)^{5/2}} \\
w_x = 2v_{xx}|v_x|\phi^2 + 2|v_x|^2\phi_x\phi \\
w_{xx} = 2\phi^2(v_{xxx}v_x + v_x^2) + 2(\phi_{xx}\phi + \phi_x^2) + 8\phi_x\phi v_{xx}v_x
\end{cases}$$

En dérivant l'équation (3.9) par rapport à x et en la multipliant par $v_x\phi^2$ on obtient :

$$v_{tx}v_x\phi^2 = h_{xx}v_x\phi^2 + \varepsilon v_{xxx}v_x\phi^2.$$

Or

$$w_t = 2v_{tx}|v_x|\phi^2 + 2|v_x|^2\phi_t\phi \Longrightarrow v_{tx}|v_x|\phi^2 = \frac{1}{2}w_t - |v_x|^2\phi_t\phi$$

et donc $\frac{1}{2}w_t - |v_x|^2\phi_t\phi = h_{xx}v_x\phi^2 + \varepsilon v_{xxx}v_x\phi^2$.

Cherchons l'expression de $h_{xx}(v, v_x)$

On a :

$$h_x(v; v_x) = \frac{v_{xx}v^4 - 2v_x^2v^3}{(v^4 + v_x^2)^{3/2}}$$

et

$h_{xx}(v, v_x) = \frac{(v_{xxx}v^4+4v_xv_{xx}v^3-4v_xv_{xx}v^3-6v_x^3v^2)(v^4+v_x^2)^{3/2}-3/2(4v^3v_x+2v_{xx}v_x)(v_{xx}v^4-2v_x^2v^3)(v^4+v_x^2)^{1/2}}{(v^4+v_x^2)^3}$

$\Longrightarrow h_{xx}(v, v_x) = \frac{v_{xxx}v^4+4v_xv_{xx}v^3-4v_xv_{xx}v^3-6v_x^3v^2}{(v^4+v_x^2)^{3/2}} + \frac{-6v_xv_{xx}v^7+12v_x^3v^6+3v_xv_{xx}^2v^4+6v_x^3v_{xx}v^3}{(v^4+v_x^2)^{5/2}}$.

En remplaçant $h_{xx}(v, v_x)$ par son expression on a :

$$\frac{1}{2}w_t = \left(\frac{-6v_x^3v^2}{(v^4 + v_x^2)^{3/2}} + \frac{12v_x^3v^6}{(v^4 + v_x^2)^{5/2}}\right)\phi^2 - \frac{6v_xv_{xx}v^7 + 6v_x^3v_{xx}v^3}{(v^4 + v_x^2)^{5/2}}\phi^2 + \frac{-3v_x^2v_{xx}^2v^4}{(v^4 + v_x^2)^{5/2}}\phi^2 + \frac{-2z^3\xi}{(z^4 + \xi^2)^{3/2}} + \varepsilon\frac{v_xv_{xxx}v^4}{(v^4 + v_x^2)^{3/2}}\phi^2 + v_x^2\phi_t\phi + \varepsilon v_xv_{xxx}\phi^2$$

$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}w_t = h_{zz}v_x^3\phi^2+2h_{\xi z}v_x^2v_{xx}\phi^2+h_{\xi\xi}v_xv_{xx}^2\phi^2+h_zv_xv_{xx}\phi^2+h_\xi v_xv_{xxx}\phi^2+v_x^2\phi_t\phi+\varepsilon v_xv_{xxx}\phi^2$.

On a :

$$h_{zz}v_x^3\phi^2 = \left(\frac{-6v_x^3v^2}{(v^4 + v_x^2)^{3/2}} + \frac{12v_x^3v^6}{(v^4 + v_x^2)^{5/2}}\right)\phi^2 \leqslant 12w$$

car $\frac{-6v_x^3v^2}{(v^4+v_x^2)^{3/2}} \leqslant 0$ et $w = |v_x|^2\phi^2$

$2h_{\xi z}v_x^2v_{xx}\phi^2 = h_{\xi z}v_x(w_x - 2v_x^2\phi_x\phi)$ car $2v_x^2v_{xx}\phi^2 = w_x - 2v_x^2\phi_x\phi$

$\Longrightarrow 2h_{\xi z}v_x^2v_{xx}\phi^2 = h_{\xi z}v_xw_x - 2h_{\xi z}v_x^3\phi_x\phi$ or,

$$\phi_x \leqslant |\phi_x| \; et 2h_{\xi z}v_x^3 \leqslant 2(2+4)|v|^3 \leqslant 12|v|^3$$

et donc

$$2h_{\xi z}v_x^2v_{xx}\phi^2 \leqslant h_{\xi z}v_xw_x + 12|v|^3\phi|\phi_x|$$

et

$$h_{\xi\xi}v_{xx}^2v_x\phi^2 = h_{\xi\xi}v_{xx}(1/2w_x - v_x^2\phi_x\phi) = \frac{1}{2}h_{\xi\xi}v_{xx}w_x - h_{\xi\xi}v_{xx}v_x^2\phi_x\phi = \frac{1}{2}h_{\xi\xi}v_{xx}w_x - X$$

avec $X = h_{\xi\xi} v_{xx} v_x^2 \phi_x \phi$
$-X \leqslant 1/2(h_\xi v_{xx}^2 \phi^2 + \frac{h_{\xi\xi}}{h_\xi} v^4 \phi_x^2)$ or $\frac{h_{\xi\xi}}{h_\xi} v^4 \phi_x^2 \leqslant (-3)^2 v^2 \phi_x^2$
$\Longrightarrow -X \leqslant 1/2(h_\xi v_{xx}^2 \phi^2 + 9 v^2 \phi_x^2)$, ainsi

$$h_{\xi\xi} v_{xx}^2 v_x \phi^2 \leqslant 1/2(h_{\xi\xi} v_{xx} w_x + h_\xi v_{xx}^2 \phi^2 + 9 v^2 \phi_x^2)$$

et $\quad h_z v_x v_{xx} \phi^2 = 1/2 h_z w_x - h_z v_x^2 \phi_x \phi.$
On a : $-h_z \phi_x \leqslant |h_z \phi_x| \leqslant |-2||\phi_x| v^3 \Longrightarrow h_z v_x v_{xx} \phi^2 \leqslant 1/2 h_z w_x + 2\phi |\phi_x| v^3.$
De plus,
$h_\xi v_x v_{xxx} \phi^2 = 1/2 h_\xi w_{xx} - h_\xi v_x^2 (\phi_{xx} \phi + \phi_x^2) - 4h^\xi \phi_x \phi v_{xx} v_x - h_\xi v_{xx}^2 \phi^2$
$\Longrightarrow h_\xi v_x v_{xxx} \phi^2 = 1/2 h_\xi w_{xx} - h_\xi v_x^2 (\phi_{xx} \phi + \phi_x^2) - Y - h_\xi v_{xx}^2 \phi^2$
où $Y = 4h^\xi \phi_x \phi v_{xx} v_x$.
Or

$$\begin{aligned} Y &\leqslant |Y| \\ &\leqslant 1/2 h_\xi v_{xx}^2 \phi^2 + 8 h_\xi v_x^2 \phi_x^2 \\ &\leqslant 1/2 h_\xi v_{xx}^2 \phi^2 + 8 v^2 \phi_x^2 \end{aligned}$$

et alors

$$\begin{aligned} h_\xi v_x v_{xxx} \phi^2 &\leqslant \frac{1}{2} h_\xi w_{xx} + v^2 (\phi_{xx} \phi + \phi_x^2) + \frac{1}{2} h_\xi v_{xx}^2 \phi^2 + 8 v^2 \phi_x^2 + h_\xi v_{xx}^2 \phi^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2} h_\xi w_{xx} + v^2 (\phi_{xx} \phi + \phi_x^2) + \frac{3}{2} h_\xi v_{xx}^2 \phi^2 + 8 v^2 \phi_x^2. \end{aligned}$$

Quant au dernier terme on a :

$$\begin{aligned} v_x v_{xxx} \phi^2 &= \frac{1}{2} w_{xx} - v_x^2 (\phi_{xx} \phi + \phi_x^2) - 4\phi \phi_x v_x v_{xx} - \phi^2 v_{xx}^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2} w_{xx} - v_x^2 \phi_x^2 + 1/2 \phi^2 v_x^2 + 1/2 v_x^2 \phi_x^2 + 4 \phi_x^2 v_x^2 + \phi^2 v_{xx}^2 - \phi^2 v_{xx}^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2} w_{xx} + 1/2 w + (4 - 1 + 1/2) v_x^2 \phi_x^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2} w_{xx} + \frac{1}{2} w + \frac{7}{2} v_x^2 \phi_x^2. \end{aligned}$$

En faisant une synthèse de toutes ces inégalités ci-dessus on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} w_t \leqslant \frac{1}{2}(h_\xi + \frac{1}{2}\varepsilon) w_{xx} + (1/2 h_{\xi\xi} v_{xx} + h_{\xi z} v_x + \frac{1}{2} h_z) w_x + (12 + \frac{1}{2}\varepsilon) w + [(\frac{9}{2} \phi_x^2 + \phi \phi_x) v^2 \\ + 12 \phi v^3] |\phi_x| + \frac{7}{2} \varepsilon v_x^2 \phi_x^2 \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{2}w_t \leqslant \frac{1}{2}(h_\xi + \frac{1}{2}\varepsilon)w_{xx} + (\frac{1}{2}h_{\xi\xi}v_{xx} + h_{\xi z}v_x + \frac{1}{2}h_z)w_x + (12 + \frac{1}{2}\varepsilon)w$$
$$+ P(v,\phi,\phi_x)|\phi_x| + \frac{7}{2}\varepsilon v_x^2\phi_x^2 \quad (3.18)$$

où $P(v,\phi,\phi_x) = (\frac{9}{2}\phi_x^2 + \phi\phi_x)v^2 + 12\phi v^3$ est bien un polynôme de degré 3 en v.
$\Longrightarrow w_t \leqslant A(t,x)w_{xx} + B(t,x)w_x + C(t,x)w + f(t,x)$ avec

$$\begin{cases} A = h_\xi + \frac{1}{2}\varepsilon \\ B = h_{\xi\xi}v_{xx} + h_z + 2h_{\xi z}v_x \\ C = 2(12 + \frac{1}{2}\varepsilon) = 24 + \varepsilon \\ f = P(v,\phi,\phi_x)|\phi_x| + \frac{7}{2}\varepsilon v_x^2\phi_x^2. \end{cases}$$

D'où l'affirmation (3.17) ! ! !

□

De ce théorème nait une conséquence importante que voici :

Corollaire 3.3.1. *Soient P un polynôme de degré 3 en v satisfaisant l'inégalité (3.18) et $f = P(v,\phi,\phi_x)|\phi_x| + \frac{7}{2}\varepsilon v_x^2\phi_x^2$ où ϕ est une fonction lisse ; v la solution approchée v_ε du problème de Cauchy approché (3.9) et (3.10).*
Alors $f \in L^\infty(0,T)$.

Démonstration. En effet, exploitons d'abord la condition aux limites (3.10).
Multiplions (3.10) par v_x et utilisons l'inégalité (3.13) on a :
$(h(v,v_x) + \varepsilon v_x)\nu v_x = (1 - \varepsilon^{1/3})V_x$
$\Longrightarrow h(v,v_x)v_x + \varepsilon v_x^2 \geqslant |v_x| - v^2 + \varepsilon v_x^2$
$\Longrightarrow |v_x| - v^2 \leqslant (1 - \varepsilon^{1/3})V_x.$
On en déduit que $v_x^2 \leqslant v^2$ sur $\partial(0,1) = \{0;1\}$.
En outre, en utilisant l'étape deux on obtient :

$$\varepsilon v_x^2(t) \leqslant sup_{t\in[0,T]}(|v(t,0)|;|v(t,1)|) \leqslant M. \quad (3.19)$$

Prenons $\phi = 1$ dans (3.18), alors ce dernier devient :
$\frac{1}{2}w_t \leqslant \frac{1}{2}(h_\xi + \frac{1}{2}\varepsilon)w_{xx} + (\frac{1}{2}h_{\xi\xi}v_{xx} + h_{\xi z}v_x + \frac{1}{2}h_z)w_x + (12 + \frac{1}{2}\varepsilon)w$ car $\phi_t = 0(\phi = 1)$.
D'après (3.19) et le principe du maximum on a :
$\varepsilon|v_x^2(t)| \leqslant |sup_{t\in[0,T]}(|v(t,0)|;|v(t,1)|)|$
$\Longrightarrow sup_{t\in[0,T]}\varepsilon|v_x^2(t)| \leqslant sup_{t\in[0,T]}|sup_{t\in[0,T]}(|v(t,0)|;|v(t,1)|)|.$
Alors

$$\|v_x^2(t)\|_\infty \leqslant C_0 \quad (3.20)$$

où C_0 est une constante qui dépend uniquement de $\|v_{0\varepsilon}\|_\infty; p; T$ et donc indépendante de ε.
Par conséquent, $\frac{7}{2}\varepsilon v_x^2\phi_x^2 \in L^\infty(0,T)$ avec les bornes indépendante de ε.
Ainsi,

$$\|f\|_\infty \leqslant \|P(v,\phi,\phi_x)|\phi_x|\|_\infty + \frac{7}{2}\varepsilon\|v_x^2\phi_x^2\|_\infty$$

et donc $\|f\|_\infty \leqslant C_1(T,p,\|P\|_\infty,\|v_{0\varepsilon}\|_\infty)$ avec C_1 une constante ne dépendant pas de ε.
Par suite, $f \in L^\infty(0,T)$.

□

Cet argument montre qu'il existe des bornes de Lipschitz locales uniformes sur v_ε en ε.

3.3.1.6 Sixième étape : Régularité d'ordre supérieur en ε.

En raison des résultats de lissage énoncés dans l'étape quatre, et des bornes locales uniformes sur le gradient v_x à l'étape cinq, alors les résultats classiques de régularité de [26], montrent qu'il existe des bornes inférieures en (ε) pour toute dérivée spatiale et temporelle de v_ε.

3.3.1.7 Septième étape : Passage à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0^+$.

Le passage à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ n'est pas complètement évident à cause de la condition limite (3.8).
Une autre difficulté vient du fait que nous ne savons pas si $v_{\varepsilon t}$ est une mesure de Radon avec des bornes uniformes en ε. Cela signifie que la notion de trace normale à la limite doit être considérée dans un sens faible comme dans [3] (voir aussi [9] ou [8]). Ce qui met fin à la démonstration du Théorème(3.1.1).
La proposition suivante nous permet de conclure quant à la solution de (3.6) .

Proposition 3.3.3. *Soit $v_\varepsilon \in W^{1,\infty}(0,1)$ une solution du problème de Cauchy approché (3.9) et (3.10). Alors le passage à la limite permet d'obtenir une solution v de (3.6) suivante :*

$$v_t = \left(\frac{v_x}{\sqrt{v^4+v_x^2}}\right)_x \quad dans \quad D'([0,T]\times[0,1]).$$

Démonstration. En effet, soient

$$\xi^\varepsilon = v_{\varepsilon t} = \left(\frac{v_x}{\sqrt{v^4+v_x^2}} + \varepsilon v_{\varepsilon x}\right)_x \text{ et } h_\varepsilon = \frac{v_x}{\sqrt{v^4+v_x^2}} + \varepsilon v_{\varepsilon x}.$$

L'estimation (3.20), implique que h_ε est uniformément bornée indépendamment de ε. Alors en extrayant une sous suite $(h_\varepsilon)_\varepsilon$, on peut supposer que $h_\varepsilon \rightharpoonup h$ dans $L^\infty([0,T]\times[0,1])$.

D'autre part, les bornes de régularité sur v_ε garantissent que $h = \dfrac{v_x}{\sqrt{v^4+v_x^2}}$.

Par passage à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ on a :

$v_t = h_x$ dans $D'([0,T]\times[0,1])$.

Finalement, si on prend $\varphi \in C^1([0,T]\times[0,1])$ avec $\varphi(0) = \varphi(T) = 0$, et en multipliant (3.9) par φ, on obtient :

$$\int_0^T\int_0^1 v_\varepsilon\varphi_t dxdt = \int_0^T\int_0^1 h_\varepsilon\varphi_x dxdt - 2(1-\varepsilon^{1/3})T$$

$$\Longrightarrow \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0^+}\int_0^T\int_0^1 v_\varepsilon\varphi_t dxdt = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0^+}\left(\int_0^T\int_0^1 h_\varepsilon\varphi_x dxdt - 2(1-\varepsilon^{1/3})T\right)$$

Comme v_ε et h_ε sont mesurables sur $[0,T]\times[0,1]$ alors on peut permuter la limite et l'intégrale et donc

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0^+}\int_0^T\int_0^1 v_\varepsilon\varphi_t dxdt = \int_0^T\int_0^1 \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0^+} v_\varepsilon\varphi_t dxdt = \int_0^T\int_0^1 v\varphi_t dxdt$$

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0^+}\left(\int_0^T\int_0^1 h_\varepsilon\varphi_x dxdt - 2(1-\varepsilon^{1/3})T\right) &= \int_0^T\int_0^1 \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0^+} h_\varepsilon\varphi_x dxdt - 2\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0^+}(1-\varepsilon^{1/3})T \\ &= \int_0^T\int_0^1 h\varphi_x dxdt - 2T.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_0^T\int_0^1 v\varphi_t dxdt = \int_0^T\int_0^1 h\varphi_x dxdt - 2T.$$

Il s'agit d'une forme faible de la condition au limite (3.8). La notion correcte de trace faible est beaucoup plus technique et est décrite dans [9]. En utilisant le lemme 5.7 de [8], on peut directement obtenir que v satisfait (3.8) de façon générale. □

Remarque 3.3.2. *Notons qu'on peut appliquer l'étape 5 à la solution régulière. Dans ce cas, $\|f\|_\infty \leqslant \|P(v,\phi,\phi_x)|\phi_x|\|_\infty$ et on obtient, une borne locale de Lipschitz pour $v(t,x)$, qui ne dépend que des bornes uniformes locales de $v(t,x)$.*

Remarque 3.3.3. *Dans le chapitre 4 ci-après, nous donnerons des conditions suffisantes sur u_0 qui permettent de conclure que v_t est une mesure de Radon. Dans ce cas, la notion de trace faible $h.\nu$ peut être trouvée dans [18] et [19].*

Chapitre 4

Régularité des solutions avec des données initiales

Dans ce chapitre, on étudie la régularité des solutions entropiques, avec des conditions initiales s'annulant au bord. En premier point, on aborde la notion de solution entropique de (3.1) à partir de (3.6) ; ensuite, on démontre un résultat de régularité des solutions avec des données initiales s'annulant au bord. La notion de super-solution entropique, assure l'existence et l'unicité de la solution de l'équation relativiste de la chaleur en une dimension d'espace.

4.1 Solution entropique de (3.1) à partir de (3.6)

Le lemme suivant, représente les traits caractéristiques de (i) du théorème (3.1.1).

Lemme 4.1.1. *Soit* $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ *avec* $u_0(x) \geqslant k(x) > 0$ *pour* $x \in [a,b]$ *et* $u_0(x) = 0$ *pour* $x \notin [a,b]$. *Supposons que* $u_0 \in W^{1,\infty}([a,b])$ *et* $v_0(\eta) = 1/u_0(x), \eta \in [0,1]$ *où* $x = \varphi(0,\eta)$ *tel que* $\int_a^{\varphi(0,\eta)} u_0(x)dx = \eta$.
On définit aussi $u(t,x)$ *sur* $[a-t, b+t]$ *par :*

$$u(t,x) = 1/v(t,x) \text{ où } x = \varphi(t,\eta) = b - a + \int_0^\eta v(t,\bar{\eta})d\bar{\eta}. \tag{4.1}$$

Alors,

$$\int_0^1 v(t,\eta)d\eta = b - a + 2t, \quad x = \varphi(t,\eta) \in [a-t, b+t], \eta \in [0;1]. \tag{4.2}$$

Démonstration. En effet, d'après les conditions de l'hypothèse,
$v_0(\eta) = 1/u_0(x), 1/\|u_0\| \leqslant v_0 \leqslant 1/k$ *avec* $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}), v_0 \in W^{1,\infty}(0,1)$ *et*
$\int_0^1 v_0(\eta)d\eta = \int_a^b dx = [x]_a^b = b - a.$
D'après (3.7), on a $\int_0^1 v(t,x)dx = \int_0^1 v_0(x)dx + 2(1+\varepsilon^{1/3})t.$

Passons à la limite lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$. Les deux intégrales de part et d'autre de l'égalité étant indépendantes de ε alors, on obtient :

$$\int_0^1 v(t,x)dx = \int_0^1 v_0(x)dx + 2t, \text{ or pour } \eta = x \text{ on a : } \int_0^1 v_0(\eta)d\eta = b-a \text{ et donc } \int_0^1 v(t,x)dx = b-a+2t$$

d'où (4.2). □

L'affirmation (ii) du Théorème(3.1.1), découle de la proposition suivante.

Proposition 4.1.1. *Soit u définie par (4.1) où v est une solution donnée par le Théorème (3.3.1), alors $u \in C([0,1]; L^1(\mathbb{R}))$ et $u(0) = u_0$ satisfaisant les conditions suivantes :*

(i) $u(t) \in BV(\mathbb{R}), u(t) \in W^{1,1}(a-t, b+t)$ *pour tout* $t \in [0,T]$ *et* $u(t)$ *est lisse à l'intérieur de son support.*

(ii) $u_t = Z_x$ *dans* $D'((0,T)\times\mathbb{R})$ *où*

$$Z(t) = \frac{u(t)u_x(t)}{\sqrt{u^2(t)+u_x^2(t)}}.$$

(iii) $u(t,x)$ *est la solution entropique de (3) avec la donnée initiale* u_0 *dans* $[0,T]$.

Démonstration. (i) Puisque v est bornée d'après l'étape 2 du Théorème (3.3.1), il s'en suit que u est bornée dans son support ($u = 1/v$).
De plus, selon la troisième étape du dit théorème, $u(t) \in L^1([a-t, b+t])$ et $u(t) \in W^{1,1}(\Omega)$ pour tout $t \in [0,T]$.
En outre, de (4.1) , (4) et (3.6), $u = 1/v$, $u_x = \frac{-1}{\varphi_\eta^2}\varphi_{\eta\eta}u$ et $v = \varphi_\eta$ respectivement. Et donc on a :

$$\begin{aligned}\frac{uu_x}{\sqrt{u^2+u_x^2}} &= \frac{-v_\eta/v^4}{\sqrt{1/v^2+(-v_\eta/v^3)^2}} \times v \\ &= \frac{-v_\eta/v^4}{\sqrt{(v^4+v_\eta^2)/v^6}} \times v \\ &= \frac{-v_\eta \times v}{v^3\sqrt{v^4+v_\eta^2}} \times v^2 = \frac{-v_\eta}{\sqrt{v^4+v_\eta^2}},\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{uu_x}{\sqrt{u^2+u_x^2}} = \frac{-v_\eta}{\sqrt{v^4+v_\eta^2}} \tag{4.3}$$

(ii) Pour des raisons de simplifications, posons $Q_T = [0,T]\times\mathbb{R}, \quad \Omega(t) = [a-t, b+t]$ *et* $Du(t) = u_x\chi_{\Omega(t)} - u^i(t)\nu^t\lfloor\partial\Omega(t)$ avec $\partial\Omega(t) = \{a-t, b+t\}$ et $u^i(t)$ est la trace de $u|_{\Omega(t)}$ sur $\partial\Omega(t)$.
Pour la démonstration de l'affirmation :

$$u_t = Z_x \; dans \; D'((0,T)\times\mathbb{R}), \tag{4.4}$$

posons $\bar{\phi}(t,\eta) = \phi(t,\varphi(t,\eta))$ avec $\phi \in \mathcal{D}(Q_T)$. On a alors :

$$\bar{\phi}_t = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \phi_t + \phi_x\varphi_t$$

et

$$-\int_{Q_T} u\phi_t dxdt = -\int_0^T\int_{\Omega(t)} u\phi_t dxdt$$

car u est nulle sur le complémentaire de son support i.e $u = 0 \; si \; x \notin \Omega(t)$. Or

$$\begin{cases} u = 1/v \\ \phi_t = \bar{\phi}_t - \phi_x\varphi_t \\ dx = v(t,\eta)d\eta, \eta \in [0,1] \end{cases}$$

Alors, la double intégrale se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} -\int_{Q_T} u\phi_t dxdt &= -\int_0^T\int_0^1 \frac{1}{v}(\bar{\phi}_t - \phi_x\varphi_t)vd\eta dt \\ &= -\int_0^T\int_0^1 (\bar{\phi}_t - \phi_x\varphi_t)d\eta dt \end{aligned}$$

Posons $\bar{\phi}_t = 0$

$$\begin{aligned} &= -\int_0^T\int_0^1 (-\phi_x\varphi_t)d\eta dt = \int_0^T\int_0^1 \phi_x\varphi_t d\eta dt \\ &= \int_0^T\int_0^1 \frac{v_\eta}{\sqrt{v^4+v_\eta^2}}\phi_x d\eta dt \; car \; \varphi_t = \frac{v_\eta}{\sqrt{v^4+v_\eta^2}} \\ &= -\int_0^T\int_{\Omega(t)} \frac{uu_x}{\sqrt{u^2+u_x^2}}\phi_x dxdt \; d'après \; (4.3) \\ &= -\int_{Q_T} Z\phi_x dxdt \end{aligned}$$

$\Longrightarrow u\phi_t = Z\phi_x \quad et \quad (u\phi_t)_t = (Z\phi_x)_t$
$\Longrightarrow u_t\phi_t + u\phi_{tt} = Z_t\phi_x + Z\phi_{xt}$.
Comme $\phi \in \mathcal{D}(Q_T)$ alors posons, $\phi(t,x) = b+t+x$. $\Longrightarrow \phi_t = \phi_x = 1$ *et* $\varphi_{tt} = \phi_{xt} = 0$ et donc $u_t = Z_t$. En considérant la variable t muette, on a $u_t = Z_x \; dans \; D'((0,T)\times\mathbb{R})$

d'où (4.4).
(iii) Pour montrer que u est une solution entropique (super-solution entropique) de (3), nous devons prouver que :

$$\int_{Q_T} \tilde{h}_S(u, DT(u))\phi dxdt + \int_{Q_T} \tilde{h}_T(u, DS(u))\phi dxdt \leqslant \int_{Q_T} J_{TS}(u)\phi_t dxdt - \int_{Q_T} Z\nabla\phi T(u)S(u)dxdt \quad (4.5)$$

est vérifiée pour $T \in \tau^+$ *et* $S \in \tau^-$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}(Q_T), \phi(t,x) = \phi_1(t)\rho(x)$ où $\phi_1 \in \mathcal{D}([0,T]), \rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
En effet, soient J_{TS} la primitive de $TS \in \tau$, et

$$\tilde{h}_T(u, DS(u)) = T(u)\tilde{h}(u, DS(u)) \text{ où } \tilde{h}(u, DS(u)) = h(u, DS(u)).DS(u).$$

Comme $S \in \tau^- \Longrightarrow \tilde{h}_S(u, DT(u)) = -\tilde{h}_{(-S)}(T_{a,b}u, DT_{a,b}(u))$. D'après [7],

$$(\tilde{h}_S(u(t), DT(u(t))))^j = -|D^j J_{(-S)\varphi}(T_{a,b}(u(t)))| = J_{T\varphi S'}(u(t))\mathcal{H}^0\lfloor\partial\Omega(t) \quad (4.6)$$

et

$$(\tilde{h}_T(u(t), DS(u(t))))^j = |D^j J_{T\varphi}(S_{a,b}(u(t)))| = J_{S\varphi T'}(u(t))\mathcal{H}^0\lfloor\partial\Omega(t). \quad (4.7)$$

Par définition,

$$D^j J_{(-S)\varphi}(T_{a,b}(u(t))) = D^j J_{(-S)\varphi}T'(u(t)) \text{ et } D^j J_{T\varphi}(S_{a,b}(u(t))) = D^j J_{T\varphi}S'(u(t)).$$

Alors,

$$\begin{aligned}\tilde{h}_S(u(t), DT(u(t))) + \tilde{h}_T(u(t), DS(u(t)) &= J_{(ST)'\varphi}(u)\mathcal{H}^0\lfloor\partial\Omega(t) \\ &= (TS\varphi(u) - J_{TS}(u))\mathcal{H}^0\lfloor\partial\Omega(t).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_{Q_T} \tilde{h}_S(u(t), DT(u(t)))\phi dxdt + \int_{Q_T} \tilde{h}_T(u(t), DS(u(t))\phi dxdt = \int_0^{T_0} (TS\varphi(u) - J_{TS}(u)) \int_{\partial\Omega(t)} \phi d(\mathcal{H}^0)dt,$$

$\forall\phi \in \mathcal{D}([0,T_0] \times \mathbb{R})$.
D'après la formule de Gauss-Green, on a :

$$\int_{Q_T} J_{TS}(u)\phi'(t)dxdt = -\int_{Q_T} \phi\frac{\partial}{\partial t}J_{TS}(u)dxdt,$$

or, $\frac{\partial J_{TS}(u)}{\partial t} = J_{TS}(u)\mathcal{H}^0 \lfloor \partial\Omega(t)$ alors

$$\int_{Q_T} J_{TS}(u)\phi'(t)dxdt = -\int_{[0,T]} \phi J_{TS}(u) \int_{\partial\Omega(t)} d\mathcal{H}^0 dt.$$

En additionnant (4.6) et (4.7) on a :

$$(\tilde{h}_S(u(t), DT(u(t))))^j + (\tilde{h}_T(u(t), DS(u(t))))^j = (TS\varphi(u^i) - J_{TS}(u^i)\mathcal{H}^0\lfloor_{\partial\Omega(t)}. \quad (4.8)$$

D'autre part,

$$\int_{Q_T} (\tilde{h}_S(u(t), DT(u(t))))^j \phi dxdt + \int_{Q_T} (\tilde{h}_T(u(t), DS(u(t))))^j \phi dxdt$$
$$= \int_{[0,T]} \int_{\Omega(t)} Z(t,x).[T(u^i)S(u^i)]_x \phi dxdt \quad (4.9)$$

$\forall \phi \in \mathcal{D}(Q_T)$.
En intégrant (4.8) et en sommant avec (4.9) on obtient :

$$\int_{Q_T} \tilde{h}_S(u(t), DT(u(t)))\phi dxdt + \int_{Q_T} \tilde{h}_T(u(t), DS(u(t)))\phi dxdt$$
$$= \int_{[0,T]} \int_{\partial\Omega(t)} (TS\varphi(u^i) - J_{TS}(u^i)\phi d(\mathcal{H}^0)dt + \int_{[0,T]} \int_{\Omega(t)} Z(t,x).[T(u^i)S(u^i)]_x \phi dxdt. \quad (4.10)$$

Pour simplifier les notations, posons $p(u) = T(u)S(u) = J'(u)$ *et* $J(u) = J_{TS}(u)$ on a alors :

$$\int_{[0,T]} \int_{\partial\Omega(t)} (p(u^i)u^i - J(u^i))\phi d(\mathcal{H}^0)dt + \int_{[0,T]} \int_{\Omega(t)} Z.[p(u^i)]_x \phi dxdt$$
$$\leqslant \int_{Q_T} J(u^i)\phi_t dxdt - \int_{[0,T]} \int_{\Omega(t)} Z.p(u^i)\phi_x dxdt \quad (4.11)$$

La principale difficulté technique, vient du fait que nous ne savons pas si $u_t = Z_x$ est une mesure de Radon.
Ceci étant, utilisons en effet, la dérivée discrète (première).
Par définition, la dérivée discrète (première) d'une fonction f scalaire, est donnée par :
$(\triangle_\delta f)(x) = \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}, \delta \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ et donc, posons

$$\triangle_\delta^+ w(t) = \frac{w(t+\delta) - w(t)}{\delta} \quad et \quad \triangle_\delta^- w(t) = \frac{w(t) - w(t-\delta)}{\delta}.$$

$$-\int_0^T \int_{\Omega(t)} up(u)\phi \triangle_\delta^- \chi_{\Omega(t)} dxdt = \int_0^T \int_{\Omega(t)} \triangle_\delta^+ (up(u)\phi) dxdt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^T \int_{\Omega(t)} \triangle_\delta^+ up(u(t+\delta))\phi(t+\delta)dxdt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega(t)} u(t)\triangle_\delta^+(p(u)\phi)dxdt \\
&\geqslant \int_0^T \int_{\Omega(t)} \triangle_\delta^+ J(u)\phi(t+\delta)dxdt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega(t)} u\triangle_\delta^+(p(u)\phi)dxdt \\
&= -\int_0^T \int_{\Omega(t)} J(u)\triangle_\delta^-(\phi(t+\delta))dxdt \\
&- \int_0^T \int_{\Omega(t)} J(u)\phi\triangle_\delta^-\chi_{\Omega(t)}dxdt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega(t)} u\triangle_\delta^+(p(u)\phi)dxdt.
\end{aligned}
$$

Cette dernière écriture, est la version de discrétisation de (4.11) .
Comme J est convexe alors,

$$\triangle_\delta^+ J(u) \leqslant \triangle_\delta^+(u)p(u(t+\delta)).$$

En faisant tendre δ vers 0^+, montrons que :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (up(u) - J(u)\phi\triangle_\delta^-\chi_{\Omega(t)})dxdt \longrightarrow \int_{[0,T]} \int_{\Omega(t)} (p(u^i)u^i - J(u^i))\phi d(\mathcal{H}^0)dt \quad (4.12)$$

et

$$\int_0^T \int_{\Omega(t)} J(u)\triangle_\delta^-(\phi(t+\delta))dxdt \longrightarrow \int_{[0,T]} \int_{\Omega(t)} J(u)\phi_t dxdt \quad (4.13)$$

et

$$\int_0^T \int_{\Omega(t)} u\triangle_\delta^+(p(u)\phi)dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_{\Omega(t)} (p(u)\phi)_x Z dxdt. \quad (4.14)$$

En effet, après passage à la limite de la forme discrétisée de (4.11), et comme $u(t) \in BV(\mathbb{R}), \quad p.p \quad t \in [O,T], u \in L^1_w([O,T], \quad BV(\mathbb{R}))$ et les fonctions $u(t, a-t)\ etu(t, b+t)$ sont intégrales sur $[0,T]$ alors les limites (4.12) et(4.13) sont vérifiées.
Quant à celle de (4.14), posons $\psi^\delta(t,x) = \frac{1}{\delta}\int_t^{t+\delta} \phi(s,x)p(u(s,x))ds$.
On a :

$$\triangle_\delta^+(p(u)\phi)(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\psi^\delta(t,x) \ et \ \psi_t^\delta = \frac{d}{dt}\psi^\delta - \psi_x^\delta\varphi_t.$$

Et donc

$$\int_0^T \int_{\Omega(t)} \triangle_\delta^+(p(u)\phi)dxdt = \int_0^T \int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t}\psi^\delta dxdt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^T \int_0^1 (\frac{d}{dt}\psi^\delta - \psi_x^\delta \varphi_t)\eta dt \\
&= -\int_0^T \int_0^1 \psi_x^\delta \frac{v_\eta}{\sqrt{v^4+v_\eta^2}} d\eta dt \ car\ \varphi_t = \frac{v_\eta}{\sqrt{v^4+v_\eta^2}}\ et\ \frac{d}{dt}\psi^\delta = 0 \\
&= \int_0^T \int_0^1 \psi_x^\delta \frac{uu_x}{\sqrt{u^2+u_x^2}} dxdt \ car\ \frac{v_\eta}{\sqrt{v^4+v_\eta^2}} = -\frac{uu_x}{\sqrt{u^2+u_x^2}}.
\end{aligned}
$$

De plus, $\lim_{\delta \longrightarrow 0^+} \psi_x^\delta = (p(u)\phi)_x\ et\ Z(t,x) = \dfrac{uu_x}{\sqrt{u^2+u_x^2}}$

Par suite,

$$
\lim_{\delta \longrightarrow 0^+} \int_0^T \int_{\Omega(t)} \triangle_\delta^+ (p(u)\phi) dxdt = \int_0^T \int_{\Omega(t)} (p(u)\phi)_x Z dxdt \quad d'où \quad (4.14).
$$

Finalement, en remplaçant (4.12), (4.13) , (4.14), $p(u)$ et $J(u)$ dans (4.11), on obtient (4.5) i.e

$$
\begin{aligned}
\int_{Q_T} \tilde{h}_S(u, DT(u))\phi dxdt + \int_{Q_T} \tilde{h}_T(u, DS(u))\phi dxdt \leqslant & \int_{Q_T} J_{TS}(u)\phi_t dxdt \\
& - \int_{Q_T} Z\nabla\phi T(u)S(u).dxdt
\end{aligned}
$$

Par conséquent u est une solution entropique (super-solution entropique) de (3). □

Avec quelques régularités supplémentaires sur la condition initiale, u_t est une mesure de Radon sur Q_T.
En effet, la proposition suivante découle immédiatement des résultats de [18]. Il s'agit par ailleurs, de (iii) du théorème (3.1.1)

Proposition 4.1.2. *Soit* $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad u_0(x) \geqslant k > 0$ *pour* $x \in [a,b]$ *et* $u_0(x) = 0$ *si* $x \notin [a,b]$.
Supposons que $u_0 \in W^{2,1}(a,b)$. *Si* u *est une solution entropique de* (3) *avec une donnée initiale* u_0, *alors* u_t *est une mesure de Radon sur* $[0,T] \times \mathbb{R}$.
Pour la preuve, consulter [18] pour plus d'amples détails.

De la proposition (4.1.2) et des résultats de [18], il s'en suit que $[Z.\nu^{\Omega(t)}] = -u^i(t)$ sur $\partial\Omega(t)$ pour tout $t \in [0,T]$. Ceci permet également de définir la notion de trace normale de $h(v, v_\eta)$ au sens de [18] et [19]. Terminons par la section suivante.

4.2 Régularité des solutions avec des données initiales s'annulant au bord

4.2.1 Estimations locales.

Proposition 4.2.1. *Soit* $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ *avec* $u_0(x) \geqslant k > 0$ *pour* $x \in [a,b]$ *et* $u_0(x) = 0$ *si* $x \notin [a,b]$. *Supposons* $u_0 \in W^{1,\infty}_{loc}([a,b])$, *alors la solution entropique* $u(t,x)$ *de* (3) *avec* $u(0) = u_0$ *satisfait (i) et (ii) du théorème* (3.1.1) .

Démonstration. En effet, soit $u_{0\sigma} \in L^\infty(\mathbb{R})$ avec $u_{0\sigma}(x) \geq k > 0$ pour $x \in [a,b]$ et $u_{0\sigma}(x) = 0$ si $x \notin [a,b]$ de sorte que

$$\lim_{\sigma \to 0^+} u_{0\sigma} = u_0$$

uniformément dans $[a,b]$. Supposons $u_{0\sigma} \in W^{1,\infty}([a,b])$ avec des bornes de Lipschitz locales, uniformes sur $[a,b]$, $u_{0\sigma}(\eta)$ la fonction obtenue par le changement de variable dans (3.1) et $u_\sigma(t,x)$ la solution entropique de (1) avec $u_\sigma(0) = u_{0\sigma}$.
D'après le théorème(3.1.1), $u_\sigma(t,x)$ est régulière sur $[a,b]$ et les bornes locales de u_σ et ses dérivées ne dépendent pas de σ et donc $v_\sigma(t,\eta) = \dfrac{1}{u_\sigma(t,x)}$ est aussi lisse sur $[a,b]$ et que les bornes locales de v_σ et ses dérivées ne dépendent pas de σ (v_σ est par ailleurs, solution de (3.6) et (3.8) avec des données initiales $v_\sigma(0,\eta) = v_{0\sigma}(\eta)$).
Notons que les bornes dans les étapes 1, 2 et 3 de la preuve du théorème 2.1 sont indépendantes de σ. En vertu de la remarque 2.2, la borne de Lipschitz de l'étape 5 ne dépend que des bornes de Lipschitz locales de $v_{0\sigma}(\eta)$ et sont donc uniformes en σ. En outre, l'étape 6 prouve des bornes intérieures uniformes (en σ) pour toute dérivée spatiale et temporelle de $v_\sigma(t,\eta)$. En passant à la limite lorsque $\sigma \longrightarrow 0^+$, on conclut que $u(t,x)$ est lisse à l'intérieur de son support et que (i) et (ii) du théorème (3.1.1) sont vérifiées. □

4.2.2 Estimations globales

Généralisons maintenant, les principaux résultats des données initiales s'annulant aux bords du support.

Proposition 4.2.2. *Soit* $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ *avec* $u_0(x) > 0$ *pour* $x \in [a,b] et u_0(x) = 0$ *si* $x \notin [a,b]$.

Supposons que $u_{0\sigma} \in W^{1,\infty}_{loc}([a,b])$ *tel que*

$$\lim_{x\to a,b} u_0(x) = 0.$$

Alors la solution entropique $u(t,x)$ *avec* $u(0) = u_0$ *satisfait (i) et (ii) du théorème (3.1.1) De plus, si* $u_0(x) \leq A(b-x)^\alpha(x-a)^\alpha$ *pour un certain* $A, \alpha > 0$ *alors* $u(t,x) \leq A(t)(b+t-x)^\alpha(x-a+t)^\alpha$ *pour tout* $x \in [a-t, b+t], t > 0$ *et tout* $A(t)$. *Dans ce cas,* $u(t,x)$ *est une fonction continue qui tend vers 0 lorsque* $x \longrightarrow a-t, b+t$.

Démonstration. Soit $u_{0\sigma} \in L^\infty(\mathbb{R})$ avec $u_{0\sigma}(x) = u_0(x)+\sigma$ pour $x \in [a,b]$, $u_{0\sigma}(x) = 0$ pour $x \notin [a,b]$ et $u_{0\sigma} \in W^{1,\infty}([a,b])$ avec des bornes de Lipschitz locales uniformes sur $[a,b]$. Soit $v_{0\sigma}(\eta)$ la fonction obtenue par le changement de variable dans (3.1) $(t=0)$ et $v_\sigma(t,x)$ la solution entropique de (1) avec $u_\sigma(0) = u_{0\sigma}$. Comme $u_\sigma(t,x)$ est lisse à l'intérieur de $[a,b]$ et les bornes locales sur et ses dérivées ne dépendent pas de σ, alors les fonctions associées $v_\sigma(t,\eta) = \dfrac{1}{u_\sigma(t,x)}$, solution de (3.6) et (3.8) les sont aussi. Les bornes de L^∞ découlent de l'étape 1 de la preuve du théorème (3.3.1) pour $p \in [1;+\infty]$ et ne dépendent que de la borne L^∞ de $v_{0\sigma}$. On a :

$$\int_0^1 v_{0\sigma}(\eta)d\eta = \int_a^b \frac{1}{u_{0\sigma}^{p-1}}(x)dx$$

qui dépend de l'intégrabilité de $\dfrac{1}{u_{0\sigma}(x)}$ sur $\gamma(a,b) = a,b$. Mais en multipliant (3.6) par $v_\sigma^p\phi$, où $p \in [1,+\infty[$ et ϕ une fonction test, positive et régulière à support compact dans $[0,1]$, on obtient :

$$\frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\int_0^1 v_\sigma^{p+1}(t,\eta)\phi d\eta + \int_0^1 |(v_\sigma^p)_\eta|\phi d\eta \leq p\int_0^1 v_\sigma^{p+1}\phi d\eta + \int_0^1 v_\sigma^p|\phi_\eta|d\eta.$$

Alors, les bornes locales L^∞ pour v_σ sont indépendantes de σ. On obtient également des bornes locales sur la variation totale de v_σ^p qui sont indépendantes de σ. Pour obtenir une borne locale L^∞ indépendante de σ, remarquons que cela découle de l'identité $v_\sigma(t,\eta) = 1/u_\sigma(t,x)$ où $x = \varphi(t,\eta)$ est donné par (3.2), car $u_\sigma(t,x)$ est localement bornée sur son support voir, [7]. Ainsi, les étapes 1, 2 et 3 sont satisfaites dans leurs versions locales. Par la remarque (3.3.2), la borne de Lipschitz à l'étape 5 ne dépend que des bornes locales uniformes de $v_\sigma(t,\eta)$ et des bornes de Lipschitz locales de $v_{0\sigma}(\eta)$ et sont donc uniformes en σ. Dans l'étape 6, on a prouvé qu'il existe des bornes intérieures uniformes (en σ) pour toute dérivée spatiale et temporelle de $v_\sigma(t,\eta)$. En passant à la limite lorsque $\sigma \longrightarrow 0^+$, on conclut que $u(t,x)$ est lisse à l'intérieur de son support et que (i) et (ii) du théorème (3.1.1) sont satisfaites. □

Remarque 4.2.1. *La dernière assertion (iii) du théorème (3.1.1) implique que si la condition initiale n'est pas verticale au bord ($t = 0$) alors elle ne reste pas verticale pour $t > 0$. De plus, durant la preuve on a remarqué que u_0 a un profil vertical avec $\frac{1}{u_0} \in L^p(a, b)$, alors $\frac{1}{u_0(t,x)} \in L^p(a - t, b + t)$ pour $t > 0$. Ainsi, $u(t, x)$ a un profil vertical au bord de son support.*

La dernière affirmation (iii) du théorème (3.1.1), est une conséquence du principe de comparaison, utilisant le lemme suivant. En raison de l'invariance par translation de (3), on a le lemme ci-après dans un intervalle symétrique autour de zéro.

Lemme 4.2.1. *Soit $U(t, x) = A(t)(R^2(t) - x^2)^\alpha$ où $R(t) = R_0 + t$.*
Si $A'(t) \geqslant 0$, alors U est une super-solution de (3).

Démonstration. En effet, de l'expression de U on a

$$\begin{cases} U_t = A'(R^2 - x^2)^\alpha + 2\alpha AR(R^2 - x^2)^{\alpha-1} \text{ car } R'(t) = 1 \\ U_x = -2\alpha Ax(R^2 - x^2)^{\alpha-1} \\ \sqrt{U^2 + U_x^2} = A(R^2 - x^2)^{\alpha-1}\sqrt{(R^2 - x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2} \\ UU_x = -2\alpha A^2 x(R^2 - x^2)^{2\alpha-1} \\ \frac{UU_x}{\sqrt{U^2+U_x^2}} = \frac{-2\alpha Ax(R^2-x^2)^\alpha}{\sqrt{(R^2-x^2)^2+4\alpha^2x^2}}, \text{ posons } Q(x) = \sqrt{(R^2 - x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2} \\ \left(\frac{UU_x}{\sqrt{U^2+U_x^2}}\right)_x = \frac{-2\alpha A(R^2-x^2)^\alpha+4\alpha Ax^2(R^2-x^2)^{\alpha-1}}{Q} - \frac{2\alpha Ax(R^2-x^2)^\alpha Q_x}{Q^2} \end{cases}$$

Alors,

$$U_t \geqslant \left(\frac{UU_x}{\sqrt{U^2 + U_x^2}}\right)_x$$

si et seulement si

$$A'(R^2 - x^2)^\alpha + 2\alpha AR(R^2 - x^2)^{\alpha-1} \geqslant \frac{-2\alpha A(R^2 - x^2)^\alpha + 4\alpha Ax^2(R^2 - x^2)^{\alpha-1}}{Q} - \frac{2\alpha Ax(R^2 - x^2)^\alpha Q_x}{Q^2}.$$

D'après l'inégalité ci-dessus, on a :$2R \geqslant 4\alpha x^2$ et $4\alpha x^2 \leqslant 4R\alpha|x| \leqslant 2RQ$. Comme $\alpha > 0$, en multipliant la première inégalité par $\alpha A(R^2 - x^2)^{\alpha-1}$, on obtient

$$2\alpha AR(R^2 - x^2)^{\alpha-1} \geqslant \frac{4\alpha^2 Ax^2(R^2 - x^2)^{\alpha-1}}{Q}.$$

Maintenant, choisissons A tel que :

$$A'(R^2-x^2)^\alpha \geqslant \frac{-2\alpha A(R^2-x^2)^\alpha}{Q} + \frac{2\alpha Ax(R^2-x^2)^\alpha Q_x}{Q^2}.$$

En simplifiant par $(R^2-x^2)^\alpha$, on a :

$$A' \geqslant \frac{-2\alpha A}{Q} + \frac{2\alpha AxQ_x}{Q^2} = \frac{2\alpha A}{Q}(\frac{xQ_x}{Q} - 1). \tag{4.15}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\frac{xQ_x}{Q} &= \frac{4\alpha^2x^2 - 2x^2(R^2-x^2)}{Q^2} \\ &\leqslant \frac{4\alpha^2x^2}{Q^2} \\ &\leqslant 1 \ car\ Q^2 = 4\alpha^2x^2 + (R^2-x^2)^2,\end{aligned}$$

alors $\frac{xQ_x}{Q} - 1 \leqslant 0$ et d'après (4.15), $\frac{2\alpha A}{Q}(\frac{xQ_x}{Q} - 1) \leqslant 0 \leqslant A'$. Par conséquent, $U(t,x)$ est une super-solution de (3). □

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés, à un modèle d'équations paraboliques dégénérées non linéaires avec saturation de flux en l'occurrence l'équation relativiste de la chaleur en une dimension d'espace, dans son volet analytique. D'abord, on s'est inspiré de la notion de solution entropique introduite pour les systèmes de lois de conservation scalaire pour définir une solution entropique pour le RHE. L'utilité de cette solution, est qu'elle assure l'unicité et la régularité de la solution du RHE. Ensuite, nous avons montré un résultat de régularité ; ce résultat est obtenu grâce à un changement de variable à l'aide de la variable de masse (η). En effet, nous avons considéré des donnés initiales de masse où la variable de masse ($\eta \in (0,1)$) est obtenue à travers la mesure de probabilité u associée à la fonction de distribution F. Par ailleurs, la solution entropique, est d'emblée une solution faible pour le problème approché de Cauchy (3.9) et (3.10) mais la réciproque n'est pas vraie puisqu'elle est la meilleure solution parmi tant d'autres capable d'assurer à la fois et l'existence et surtout l'unicité et même la régularité de la solution dudit problème. Enfin, nous avons montré comment obtenir une formulation entropique du RHE à partir de (3.6) et montré aussi que le résultat de régularité locale s'étend aussi pour les solutions avec des données initiales s'annulant au bord de son support. Comme nous avons revisité l'aspect analytique de l'article, ne serait-il pas mieux de continuer à regarder son aspect numérique comme objet de recherche ultérieure ?

Bibliographie

[1] L. Ambrosio, N. Fusco and D. Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, New York, (2000).

[2] B. Andreianov and Karimou Gazibo, M. (2013) *Entropy Formulation of Degenerate Parabolic Equation with Zero-Flux Boundary Condition.* Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und physik, **64**, 1471-1491.

[3] F. Andreu, V. Caselles and J. M. Mazon, *Existence and Uniqueness of Solution for a Parabolic Quasilinear Problem*, Math. Ann. **322** (2002) 139-206.

[4] F. Andreu, V. Caselles and J. M. Mazon, *The Cauchy Problem for a Strong Degenerate Quasilinear Equation*, J. Europ. Math. Soc. **7** (2005) 361-393.

[5] F. Andreu, V. Caselles and J. M. Mazon, *A Strongly Degenerate Quasilinear Elliptic Equation*, Nonlinear Anal. **61** (2005) 637-669.

[6] F. Andreu, V. Caselles and J. M. Mazon, *Some Regularity Results on the Relativistic Heat Equation*, J. Differ. Equ. **245** (2008) 3639-3663.

[7] F. Andreu, V. Caselles, J. M. Mazon and S. Moll, *Finite Propagation Speed for Limited Flux Diffusion Equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **182** (2006) 269-297.

[8] F. Andreu, V. Caselles, J. M. Mazon and S. Moll, *The Dirichlet Problem Associated to the Relativistic Heat Equation*, Math. Ann. **347** (2010) 135-199.

[9] F. Andreu-Vaillo, V. Caselles and J. M. Mazon , *Parabolic Quasilinear Equations Minimizing Linear Growth Functionals*, Progress in Mathematics **223** (Birkhauser, Boston, 2004).

[10] M. Bertsch and R. Dal Passo, *Hyperbolic Phenomena in a Strongly Degenerate Parabolic Equation*, Arch Ration. Mech. Anal. **117** (1992) : 349-387.

[11] Y. Brenier. *'Extended Monge-Kantorovich Theory', Optimal Transportation and Applications* : lectures given at the C.I.M.E. Summer School help in Martina Franca, Lecture Notes in Mathematics **1813** (eds L. A. Caffarelli and S. Salsa) (Springer, Berlin, 2003) 91-122.

[12] Ph.Bénilan and Touré, H (1995) *Sur L'équation Générale* $u_t = h(., u, \phi(., u)_x)_x +$ *v dans* L^1. *Étude du Problème Stationnaire.* In : Evolution Equations (Baton Rouge, LA, 1992), Dekker, New York, 35-62.

[13] H. Brezis *Analyse fonctionnelle : Théorie et Applications* (Masson, Paris) (1983).

[14] J. Carrillo and P. Wittbold, *Uniqueness of Renormalized Solutions of Degenerate Elliptic-Parabolic Problems*, J. Differ. Equ. **156** (1999) 93-121.

[15] J. A. Carrillo and G. Toscani, *Wasserstein Metric and Large-Time Asymptotics of Non-linear Diffusion Equations*, New Trends in Mathematical Physics (World Scientific Publishing, Hackensack, NJ, 2004) 234-244.

[16] J. A. Carrillo, V. Caselles and S. Moll ; *On the Relativistic Heat Equation in One Space Dimension*, Proc. London Math. Soc.(3) **107** (2013) 1395-1423.

[17] V. Caselles, *Convergence of the 'Relativistic' Heat Equation to the Heat Equation as* $c \longrightarrow \infty$, Publ. Mat.**51** (2007) : 121-142.

[18] V. Caselles, *On the Entropy Conditions for Some Flux Limited Diffusion Equations*, J. Differ. Equ. **250** (2011) 3311-3348.

[19] G. Q. Chen and H. Frid, *Divergence-measure Fields and Hyperbolic Conservation Laws*, Arch. Ration. Mech. Anal. **147** (1999) 89-118.

[20] A. Chertock, A. Kurganov and P. Rosenau, *Formation of Discontinuities in Flux-Saturated Degenerate Parabolic Equations*, Nonlinearity **16** (2003) 1875-1898.

[21] M. G. Crandall and T. M. Liggett, *Generation of Semigroups of Nonlinear Transformations on General Banach Spaces*, Amer. J. Math. **93** (1971) 265-298.

[22] G. Dal Maso, *Integral Representation on* $BV(\Omega)$ *of* $\Gamma - limits$ *of Variational Integrals*, Manuscripta Math. **30** (1980) 387-416.

[23] R. Dal Passo, *Uniqueness of the Entropy Solution of a Strongly Degenerate Parabolic Equation*, Comm. Partial Differential Equations **18** (1993) 265-279.

[24] S. Denis. *Système de Lois de Conservation* I. Diderot Ed., Paris, (1996)

[25] V. De Cicco, N. Fusco and A. Verde, *On $\mathcal{L}^1$-Lower Semicontinuity in BV*, J. Convex Anal. **12** (2005) 173-185.

[26] O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva, *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type* ,(American Mathematical Society), Providence, RI, 1968).

[27] G. M. Lieberman, *Second Order Parabolic Differential Equations* (IWorld Scientific, River Edge, NJ 2005).

[28] S and Ouaro *Entropy Solutions of Nonlinear Elliptic-Parabolic-Hyperbolic Degenerate Problems in One Dimension.*International Journal of Evolution Equations, **3**, 1-17.

[29] S. Ouaro and Touré, H. *Uniqueness of Entropy Solution to Nonlinear Elliptic-Parabolic Problems*. Electronic Journal of Differential Equations, No. **82**, (2007) 1-15.