UNIVERSITÉ NORBERT ZONGO

****

UNITÉ DE FORMATION ET DE RECHERCHE

EN SCIENCES ET TECHNOLOGIES

****

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE MASTER DE MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES ET APPLICATIONS

Option : Mathématiques Fondamentales

Spécialité : Équations aux Dérivées Partielles et Modélisation

Thème : **Stabilisation de l'équation des ondes dans un domaine polygonal avec des fissures**

Présenté et soutenu par : **OUEDRAOGO Saïdou**

Sous la direction de :

Dr Bila Adolphe KYELEM,

Maitre de Conférences,

à l'Université Lédéa Bernard OUEDRAOGO,

Ouahigouya, Burkina Faso.

Et la co-direction de :

Dr Mohamed KARIMOU GAZIBO,

Maitre Assistant,

à l'Université Abdou Moumouni,

Niamey, Niger.

Soutenu publiquement le 21 novembre 2024 devant le jury composé :

Président : Dr Wendpanga Jacob YOUGBARE, Maitre de Conférences en Mathématiques, Université Norbert ZONGO

Membres :

Dr Mohamed KARIMOU GAZIBO, Maitre-Assistant en Mathématiques, Université Abdou Moumouni, Niger (Co-encadreur)

Dr Abdoulaye COMPAORE, Maitre de Conférences en Mathématiques, Université Norbert ZONGO (Examinateur)

Année académique 2023-2024.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

À mon père

Remerciements

Nous remercions avant tout le bon dieu qui nous a donné la force et la volonté pour achever ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de mémoire Docteur KYELEM Bila Adolphe de l'Université Lédéa Bernard OUEDRAOGO pour m'avoir confié un sujet aussi intéressant, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils qui ont contribué à alimenter ma réflexion. Il a toujours été disponible pour relire et corriger ce manuscrit. J'ai beaucoup appris de lui et j'en apprendrai encore.

Mes remerciements vont également à l'endroit de mon codirecteur Docteur Mohamed KARIMOU GAZIBO de l'Université Abdou Moumouni qui s'est très montré disponible à l'écoute de mes idées et de mes questions malgré ses charges. Il a consacré beaucoup du temps à m'apporter les outils nécessaires à la conduite de ce travail. Son exigence m'a grandement stimulé.

Un grand merci à tout le personnel de l'UFR/ST de l'Université Norbert ZONGO pour leur aide précieuse.

J'ai eu le plaisir de partager avec mes camarades, mes ainés de laboratoire de Mathématiques et je leur remercie de m'avoir toujours encouragé. Merci pour le soutien sans restriction.

J'adresse mes remerciements à toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidés mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions durant mes recherches.

Table des matières

Dédicaces i

Remerciements ii

Sigles et abréviations v

Résumé vi

Introduction générale 1

1 Généralités 3

1.1 Quelques éléments et résultats usuels des espaces fonctionnels 3

1.1.1 Les espaces de Lebesgue 3

1.1.2 Les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega), W_0^{k,p}(\Omega)$ 5

1.1.2.1 Les espaces $W^{k,p}(\Omega)$ 5

1.1.2.2 Les espaces $W_0^{k,p}(\Omega)$ 6

1.1.2.3 Les espaces $H^m(\Omega), H_0^m(\Omega), H^{-m}(\Omega)$ 6

1.1.2.4 Les espaces $W^{s,p}(\Omega)$ avec $s \in \mathbb{R}$ 7

1.2 Rappels sur des éléments d'études des équations elliptiques 7

1.2.1 Intégration par parties et formules de Green 7

1.2.2 Existence et unicité de solution 8

1.2.3 Opérateur trace 9

1.2.4 Injection de Sobolev 10

1.3 Rappels et propriétés sur les opérateurs linéaires bornés 10

1.4 Semi-groupes d'opérateurs linéaires 11

1.4.1 Semi-groupe fortement continue sur un espace de Banach 11

1.4.2 Semi-groupe de contraction 12
1.4.3 Opérateurs maximaux dissipatifs 13
1.5 Quelques notions de stabilité 14
1.5.1 Stabilité exponentielle 14
1.5.2 Stabilité polynomiale 14
1.5.3 Stabilité asymptotique 15

2 Problème bien posé **16**
2.1 Présentation du problème 16
2.2 Formulation et étude d'existence de solution du problème 18
2.2.1 Formulation du problème 18
2.2.2 Étude d'existence de solution du problème 20
2.3 Quelques résultats techniques 28

3 Résultat de stabilité **35**
3.1 Introduction et résultat principal 35
3.1.1 Introduction 35
3.1.2 Résultat principal 35
3.2 Preuve du résultat principal 36

Conclusion et perspectives **67**
Bibliographie 68

Sigles et abréviations

Ω : Ouvert de $\mathbb{R}^2$

Γ : $\bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$Frontière ou bord de Ω

Γ_D : Ouvert connecté à Γ qui porte la condition de Dirichlet.

Γ_N : Ouvert connecté à Γ qui porte la condition de Neumann

$\bar{\Gamma}_D$: La fermeture de Γ_D

$\bar{\Gamma}_N$: La fermeture de Γ_N

intΓ_D : L'intérieur de Γ_D

$\mathcal{D}(\Omega)$: Ensemble des fonctions indéfiniment différentiables dans Ω et à support compact

$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \ D_i u \in L^2(\Omega), \forall i = 1, ..., N\}$

Pour $m \in \mathbb{N}, H^m(\Omega) = \{u \in L^2(w) \text{ tel que } \ D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leqslant m\}$

$L^1(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable tel que } \ |f| \text{ soit intégrable}\}$

$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable tel que } \int\limits_\Omega |f|^p \text{ soit fini}\}$

$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable et existe C telle que } \int\limits_\Omega |f| < C \ p.p \text{ sur } \Omega\}$

$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \ D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N\}$

$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \ D^\alpha u \in L^p, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| < k\}$

$W_0^{k,p}(\Omega)$: Adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{k,p}(\Omega)$

$C_0(\Omega)$: Fonctions continues à support compact dans Ω

$C^k(\Omega)$: Espaces des fonctions k fois continument différentiable sur Ω

$C^\infty(\Omega)$:Espaces des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω

$C_0^1(\Omega)$: Fonctions continument dérivables à support compact dans Ω

$C_\infty^c(\Omega)$: Fonctions indéfiniment dérivables à support compact

∇u : Du : Gradient de u

Im(I-A) : Image de l'opérateur I-A

U_t : Dérivée partielle de U par rapport à la variable temps t

U^T : Transposée de U

D(A) : Domaines de l'opérateur A

$D(\Delta)$: domaine de l'opérateur laplacien Δ

$D(\Delta_{Dir})$: Domaine de l'opérateur Δ_{Dir}

Résumé

Dans ce mémoire, nous présentons l'étude de stabilisation de l'équation des ondes dans un domaine polygonal avec des fissures réalisé par Bayili Gilbert et de Nicaise Serge. En utilisant la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires, nous avons montré l'existence de solution forte puis en utilisant la méthode du multiplicateur, nous montrons que la stabilité augmente au voisinage des fissures conduisant donc à la stabilité exponentielle du problème.

Mots clés : stabilisation, équation d'onde, fissures, opérateur maximal monotone, stabilité exponentielle, méthode du multiplicateur.

Abstract

In this memoir, we present the stabilization study of the wave equation in a polygonal domain with cracks made by BAYILI Gilbert and NICAISE Serge. Using the theory of semigroups of linear operators, we have shown the existence of strong solution then using the multiplier method, we show that the stability increases in the vicinity of the cracks thus leading to exponential stability of the problem.

Keywords : Stabilization, wave equation, cracks, monotonic maximal operator, stability exponential, multiplier method.

Introduction générale

La dynamique des ondes est un phénomène omniprésent dans la nature, son étude joue un rôle fondamental dans de nombreux domaines de la physique et de l'ingénierie, notamment en acoustique, en mécanique des fluides et en électromagnétisme. Parmi les défis majeurs rencontrés dans ce domaine, la stabilisation des solutions dans des milieux complexes, tels que les domaines polygonaux avec fissures, s'avère particulièrement cruciale. Les fissures, qu'elles soient naturelles ou induites par des processus de fabrication, peuvent significativement influencer la propagation des ondes, entraînant des phénomènes de diffraction et d'atténuation qui nécessitent une attention particulière.

Dans ce mémoire, l'étude est basée sur le problème de la stabilité de l'équation des ondes suivante :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a u_t = 0 \ dans \ \Omega \times [0; +\infty[\\ u = 0 \ sur \ \Gamma_D \times [0; +\infty[\\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ sur \ \Gamma_N^1 \times [0; +\infty[\\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u + b u_t = 0 \ sur \ \Gamma_N^2 \times [0; +\infty[\\ u(.,0) = u_0, \qquad u_t = u_1(.,0) \ dans \ \Omega \end{cases}$$

où Ω est un domaine polygonal borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ. Ce problème a été étudié dans [15, 17, 18, 19] mais sans fissures.

Dans ce travail, nous étudions principalement l'existence et l'unicité de solution et la stabilité exponentielle du problème. Pour son étude mathématique, ce document est composé de trois chapitres. Chaque chapitre est composé de plusieurs sections dans lesquelles nous développons les différents aspects du chapitre.

Après l'introduction, nous trouverons au premier chapitre quelques résultats préliminaires tels que définitions, propositions et théorèmes d'analyse fonctionnelle qui seront

utilisés directement ou indirectement dans les autres chapitres.

Ensuite dans le deuxième chapitre, nous étudions le bien posé du problème en utilisant la théorie des semi-groupes .

Enfin dans le troisième chapitre, nous appliquons la méthode du multiplicateur pour montrer la stabilité exponentielle de notre solution.

Chapitre 1

Généralités

Dan ce chapitre, nous faisons des rappels de quelques outils indispensables qui seront utilisés dans les autres chapitres du travail.

1.1 Quelques éléments et résultats usuels des espaces fonctionnels

Dans cette partie, il sera essentiellement question de rappeler des notions et propriétés des espaces fonctionnels intervenant dans la suite de notre travail. Il s'agit principalement des notions et résultats des espaces de Hilbert, des espaces de Lebesgue et des espaces de Sobolev.
On désigne par Ω, un borné de $\mathbb{R}^2$ avec des fissures puis par dx, la mesure de Lebesgue. Par souci de simplicité, on adoptera la notation

$$\int_{\Omega} f dx \text{ pour désigner } \int_{\Omega} f(x)dx,$$

où f est une fonction de Ω vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1.1 Les espaces de Lebesgue

Définition 1.1.1. *$L^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions intégrables ou sommables sur Ω ; c'est-à-dire*

$$f \in L^1(\Omega) \text{ si } \int_{\Omega} |f|dx < \infty.$$

Définition 1.1.2. *Soit p un nombre réel supérieur où égal à un $(p \geq 1)$, on pose :*
$L^1(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } |f| \in L^1(\Omega)\}$

Définition 1.1.3. *On pose :*

$L^{\infty}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *mesurable et* $\exists\ C > 0$ *une constante, telle que* $|f(x)| \leq C$ *p.p sur* $(\Omega)\}$.

Remarque 1.1.1.

$L^2(\Omega)$ muni de la norme induite du produit scalaire défini par $< u, v >= \int_{\Omega} uvdx$ est un espace de Hilbert.

Définition 1.1.4. *Soit* $p \in [1, +\infty[$*, on appelle exposant conjugué de* p*, le réel* $p^{'}$ *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{'}} = 1$.

Théorème 1.1.2. *(Inégalité de Hölder) [2]*

Soit $p, p^{'} \in [1, +\infty]$ *une paire d'exposants conjugués, c'est-à-dire* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{'}} = 1$ *avec la convention* $\frac{1}{+\infty} = 0$*. Si* f *et* g *deux fonctions appartiennent respectivement dans* $L^p(\Omega)$ *et dans* $L^{p^{'}}(\Omega)$*, alors le produit* fg *est dans* $L^1(\Omega)$ *et on a l'inégalité :*

$$\int_{\Omega} |fg|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}.\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

C'est-à-dire :

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \Big(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\Omega} |f(x)|^{p^{'}} dx\Big)^{\frac{1}{p^{'}}}$$

Corollaire 1.1.3. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) [23]*

Si f *et* g *sont dans* $L^2(\Omega)$ *alors*

$$\int_{\Omega} |fg|dx \leq \Big(\int_{\Omega} f^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\Omega} g^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Plus généralement, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{'}} = \frac{1}{r}$ *alors pour toute paire de fonctions*

$$f \in L^p(\Omega) \text{ et } g \in L^{p^{'}}(\Omega),$$

le produit fg *appartient à* $L^r(\Omega)$ *et on a l'inégalité :*

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Corollaire 1.1.4. *(Inégalité de Young) [2]*

Soient p, q des nombres réels strictement positifs liés par la relation $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
Alors

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\qquad ab\leq\frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}.$$

On l'utilise aussi parfois sous la forme :
pour tout $\varepsilon>0$ *et tout* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, *on a*

$$|ab|<\varepsilon|a|^p+C(\varepsilon)|b|^q,\qquad C(\varepsilon)>0,$$

ou encore

$$|ab|\leq\varepsilon|a|^2+\frac{1}{4\varepsilon}|b|^2,\qquad\forall\varepsilon>0.$$

1.1.2 Les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega), W_0^{k,p}(\Omega)$

Une bonne partie de l'analyse des Équations aux Dérivées Partielles se déroule dans les espaces de Sobolev. Nous rappelons ici quelques notions sur ces espaces. Étant donné $k\in\mathbb{N}$ et $1\leq p\leq+\infty, \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_N)\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ un multiple-indice : nous posons $|\alpha|=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i$.

1.1.2.1 Les espaces $W^{k,p}(\Omega)$

Définition 1.1.5. *Soit k un entier naturel non nul et* $1\leq p\leq+\infty$, *on pose :*

$$W^{k,p}(\Omega)=\{f\in L^p(\Omega)|D^\alpha f(\Omega)\in L^p(\Omega),\forall\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}avec\ |\alpha|\leq k\}$$

où

$$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_N^{\alpha_N}}$$

est pris au sens des distributions.

Ainsi, on a :

$$W^{k,p}(\Omega)=\{f\in L^p(\Omega)|\int_\Omega fD^\alpha\varphi=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha f.\varphi,\forall\alpha\ tel\ que\ |\alpha|\leq k\ et\ pour\ tout\ \varphi\in C_c^\infty(\Omega)\}.$$

On peut aussi définir l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ *par récurrence sur l'entier k en posant pour* $k\geq 2$ *:*

$$W^{k,p}(\Omega)=\{f\in W^{k-1,p}(\Omega)|\frac{\partial f}{\partial x_i}\in W^{k,p}(\Omega),\forall i=1,2,...,N\}.$$

On définit les normes suivantes sur $W^{k,p}(\Omega)$ *:*

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}}, p \in [1, +\infty[, \|f\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max \|D^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Remarque 1.1.5.

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega); \mathcal{D}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$$

et si Ω est assez régulier avec $\partial\Omega$ borné, alors la norme de $W^{k,p}(\Omega)$ est équivalente à la norme donnée par

$$\|u\| + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

Proposition 1.1.6. *L'espace* $W^{k,p}(\Omega)$ *muni de la* $\|.\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ *est un espace de Banach.*

1.1.2.2 Les espaces $W_0^{k,p}(\Omega)$

Définition 1.1.6. $W_0^{k,p}(\Omega) = \Big\{ f \in W^{k,p}(\Omega)$ *et nulle sur le bord* $\partial\Omega$ *; c'est l'adhérence de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *dans* $W^{k,p}(\Omega) \Big\}$.

Théorème 1.1.7. *(Inégalité de Poincaré)*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert borné dans une direction. Il existe une constante* C *(dépendant de* Ω *et de* p*) telle que*

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \|u\|_{L^P(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}.$$

1.1.2.3 Les espaces $H^m(\Omega), H_0^m(\Omega), H^{-m}(\Omega)$

Définition 1.1.7. *On pose pour tout entier naturel* m *:*
$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ *et* $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$ *et* $H^{-m}(\Omega) :=$ *dual de* $H_0^m(\Omega) = W^{-m,2}(\Omega)$.

Proposition 1.1.8. *L'espace* $H^m(\Omega)$ *est muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

et de la norme induite

$$\|u\|_{H^m} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha\|_{L^2}^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

est un espace de Hilbert. $H_0^m(\Omega)$ *muni de la norme et du produit scalaire induits de* $(.,.)_{H^m}$*, est un espace de Hilbert.*

1.1.2.4 Les espaces $W^{s,p}(\Omega)$ avec $s \in \mathbb{R}$

Définition 1.1.8. *On définit une famille d'espaces intermédiaires entre $L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega)$ par :*

(i) pour $0 < s < 1$ et $1 \leq p < \infty$; on pose :

$$W^{s,p}(\Omega) = \Big\{ f \in L^p(\Omega) | \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|^{s + \frac{N}{p}}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \Big\}$$

et

$$H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega).$$

(ii) pour $s > 1$(s non entier), on pose $s = m + \sigma$où m est la partie entière de s :

$$W^{s,p}(\Omega) = \Big\{ f \in W^{m,p}(\Omega) | D^\alpha f \in W^{\sigma,p}(\Omega) \text{ pour tout } \alpha, |\alpha| = m \Big\}.$$

1.2 Rappels sur des éléments d'études des équations elliptiques

1.2.1 Intégration par parties et formules de Green

Théorème 1.2.1. *(Formule d'intégration par parties)*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1 par morceaux et soient u et v deux fonctions de $H^1(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx + \int_{\partial\Omega} u v n_i d\sigma$$

où n_i est la $i-$ème composante de la normale sortante au domaine Ω et $d\sigma$, la mesure de Lebesgue $(N-1)$ dimensionnelle.

Théorème 1.2.2. *(Formule de Green)*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1 par morceaux et soit $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega (\Delta u) v dx = -\int_\Omega \nabla u . \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma$$

où ν désigne le vecteur unitaire de la normale extérieure au bord $\partial\Omega$ et $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ est la dérivée normale définie par $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u . \nu$.

L'existence et unicité des solutions d'équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques peuvent, dans beaucoup de cas standards, être déduites du résultat abstrait suivant :

1.2.2 Existence et unicité de solution

On rappelle la notion de forme variationnelle dans un espace de Hilbert. On note V un espace de Hilbert réel, $\langle .,. \rangle_V$ le produit scalaire sur V et la norme associée $\|.\|_V$.
On appelle formulation variationnelle le problème suivant :

$$\begin{cases} Trouver & u \in V \text{ tel que} \\ \forall\ v \in V & a(u,v) = L(v). \end{cases}$$

Les hypothèses sur a(., .) et les L sont :
(H1) L est une forme linéaire continue sur V. C'est-à-dire

$$\begin{cases} L : V \longrightarrow \mathbb{K}\ (\mathbb{K} = \{\mathbb{R}\ ou\ \mathbb{C}\}) \\ \forall\ (u,v) \in V \times V, \forall\ \alpha \in K \\ L(\alpha u + v) = \alpha L(u) + L(v) \\ \exists\ C > 0, \forall\ v \in V\ ||L(v)| \leqslant C\|v\|_v. \end{cases}$$

(H2) a(., .) est une forme bilinéaire continue coercive symétrie. C'est-à-dire

$$\begin{cases} a : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}(\mathbb{K} = \{\mathbb{R}\ ou\ \mathbb{C}\}) \\ \forall\ (u,v) \in V \times V, a(u,v) = a(v,u) \qquad sym\acute{e}trie \\ \forall\ u,v,w \in V, \alpha \in \mathbb{K}\ on\ a : \\ a(u + \alpha v, w) = a(u,w) + \alpha a(v,w) \\ a(u, v + \alpha w) = a(u,v) + \alpha a(u,w) \qquad bilin\acute{e}arit\acute{e} \\ \exists\ M > 0, \forall u,v \in V, |a(u,v)| \leqslant M\|u\|_V\|v\|_V \qquad continuit\acute{e} \\ \exists\ M > 0, \forall u \in V, a(u,u) \geqslant M\|u\|_V^2 \qquad coercivit\acute{e} \end{cases}$$

On a donc le résultat suivant :

Théorème 1.2.3. *(de Lax-Milgram) [4]*

Soit V un espace de Hilbert, $L(.)$ une forme linéaire continue sur V et $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue coercive et symétrique sur $V \times V$ (c'est-à-dire sous les hypothèses

(H1) et (H2)) alors la formulation variationnelle(formulation faible) admet une unique solution.

1.2.3 Opérateur trace

Pour une fonction définie dans un ouvert Ω, on souhaite définir sa valeur au bord de Ω. Pour les fonctions $u \in L^2(\Omega)$, cette notion n'a pas de sens. Par contre, si u est plus régulière, alors on peut définir rigoureusement cette notation.

Proposition 1.2.4. *Soit Ω un ouvert borné et régulier. On peut définir une application linéaire continue*

$$\gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$$

$$u \longmapsto \gamma(u),$$

qui prolonge l'application trace par les fonctions continues sur $\bar{\Omega}$: pour tout

$$u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), \gamma(u) = u|_{\partial\Omega}.$$

L'application trace est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, ce qui signifie qu'il existe une constante C_Ω telle que

$$\forall u \in H^1(\Omega), \|\gamma(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant C_\Omega \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Remarque 1.2.5.

L'application trace n'est pas surjective sur $L^2(\partial\Omega)$, mais sur un espace plus petit, qui est $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Elle est en fait continue de $H^1(\Omega)$ vers $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, si bien qu'il existe C_Ω tel que

$$\forall u \in H^1(\Omega), \|\gamma(u)\|_{H^{\frac{1}{2}}}(\partial\Omega) \leqslant C_\Omega \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Enfin, pour tout $u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, on a

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant \|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$, défini comme la fermeture dans $H^1(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$, s'identifie à l'espace des fonctions à trace nulle :

Proposition 1.2.6. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, on a*

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \qquad \gamma(u) = 0\}$$

1.2.4 Injection de Sobolev

On considère une fonction $u \in H^1(\Omega)$. Bien sûr, $u \in L^2(\Omega)$. On peut se demander si u n'est pas régulière du fait que ∇u soit dans $L^2(\Omega)$. Le théorème suivant répond à cette question.

Théorème 1.2.7. [2]

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$, et k un entier. On a les injections suivantes :

1. *si $d > 2k$, alors $H^k(\Omega) \subset L^{P^*}(\Omega)$ avec $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{k}{d}$.*
2. *si $d = 2k$, alors$H^k(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [2, \infty[$.*
3. *si $d < 2k$, alors $H^k(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$.*

Théorème 1.2.8. *(Théorèmes d'injection) [8]*

On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de frontière Γ lipschitzienne ; alors pour tout $s \in \mathbb{R}$ et quelques soit $\epsilon > 0$ l'injection $H^s(\Omega) \hookrightarrow H^{s-\epsilon}(\Omega)$ est compacte.

Théorème 1.2.9. *Soit X, Y, Z des espaces de Banach avec $X \subset Y \subset Z$, l'injection $X \hookrightarrow Y$ est compacte.*
Alors, $\forall \alpha > 0$, il existe une constante C_α telle que

$$\|u\|_Y \leq \alpha \|u\|_X + C_\alpha \|u\|_Z \qquad \text{pour tout } u \in X.$$

1.3 Rappels et propriétés sur les opérateurs linéaires bornés

Définition 1.3.1. *Soit H un espace de Hilbert, une application $A : H \longrightarrow H$ est dite opérateur linéaire si*

$$A(\alpha x + y) = \alpha A(x) + A(y), \ \forall x, y \in H, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.3.2. *On dit qu'un opérateur A défini sur H est borné s'il existe une constante positive C telle que*

$$\|Ax\|_H \leq C\|x\|_H, x \in H$$

Définition 1.3.3. *Un opérateur linéaire A est non borné si et seulement si il n'existe pas de constante C telle que $\|AU\|_H \leq C\|U\|_H, U \in D(A)$ soit satisfait. En d'autres termes A est non borné si et seulement s'il existe une suite $U_n \in D(A)$ telle que :*

$$\|U_n\|_{D(A)} = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \|AU_n\|_H = +\infty.$$

Théorème 1.3.1. *Pour tout opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$, la norme de A est donnée par :*

$$\|A\|_{L(H)} = sup\Big\{\|Ax\|_H, x \in H, \|x\|_H = 1\Big\}$$

1.4 Semi-groupes d'opérateurs linéaires

Nous allons rappeler quelques notions et théorèmes de la théorie des semi-groupes, nécessaires pour le développement de notre thème.

1.4.1 Semi-groupe fortement continue sur un espace de Banach

Définition 1.4.1. [22]

Une famille $\{S(t)\}_{(0\leq t\leq\infty)}$ d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach X est appelée semi-groupe fortement continu ou un C_0 semi-groupe si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2), \forall t_1, t_2 \geq 0$;

2. $S(0) = I$ *où* I, *l'opérateur identité ;*

3. $\lim_{t\to0^+} \|S(t)x - x\| = 0$ *pour tout* $x \in X$.

Le plus important objet associé à un semi-groupe est son générateur infinitésimal.

Définition 1.4.2. [22] *Soit S(t) un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X, on appelle générateur infinitésimal de S(t) l'opérateur $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \{x \in X; \lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{S(t)x - x}{t} \text{ existe}\}, \\ Ax = \lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{S(t)x - x}{t} \text{ pour } x \in D(A). \end{cases}$$

Proposition 1.4.1. *Soit $(S(t)_{t\geqslant 0})$ un semi-groupe fortement continu sur X et $(A, D(A))$ son générateur infinitésimal. Alors pour tout $x \in D(A)$, on a $S(t)x \in D(A)$ et*

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Théorème 1.4.2. [22]

Soit $S(t)$ un C_0 semi-groupe, alors il existe des constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que : $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$

1.4.2 Semi-groupe de contraction

Définition 1.4.3. [22] *Un semi-groupe $(S(t)_{t\geqslant 0})$ fortement continu sur X est un semi-groupe de contraction si*

$$\|S(t)\| \leqslant 1, \text{ pour tout } t \geqslant 0.$$

Définition 1.4.4. *Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'un opérateur linéaire A : $D(A) \subset H \to H$ est dissipatif si pour tout $x \in D(A)$ on :*

$$Re\Big((Ax, x)_H\Big) \leq 0, \forall x \in D(A).$$

A est maximal si $Im(I - A) = H$ c'est-à-dire

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ tel que } u - Au = f.$$

Théorème 1.4.3. *(Théorème de Lumer-Phillips) [24]*

Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur linéaire (non nécessairement borné) et $D(A)$ dense dans un espace de Hilbert (c'est-à-dire $\overline{D(A)} = H$). Alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contraction si et seulement si :
(i) A est dissipatif ;
(ii) A est maximal.

Théorème 1.4.4. *Dans un espace de Hilbert, tout opérateur maximal dissipatif est à domaine dense.*

Théorème 1.4.5. *(Hille -Yosida) [24]*

Soit A un opérateur maximal dissipatif dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout $U_0 \in H$ il existe une unique fonction $U \in C\Big([0; +\infty[; H\Big)$ telle que

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + AU = 0 \ sur \ [0; +\infty[\\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

De plus si $U_0 \in D(A)$ *alors la solution trouvée satisfait* $U \in C\Big([0; +\infty[; H\Big) \cap C^1\Big([0; +\infty[; H\Big)$.

1.4.3 Opérateurs maximaux dissipatifs

Définition 1.4.5. *Un opérateur linéaire non-borné* $A : D(A) \subseteq X \to X$ *est dissipatif si et seulement si pour tout* $x \in D(A)$, *il existe* $x^* \in F(x)$ *tel que*

$$Re\langle Ax, x^* \rangle \leq 0 \ \text{où} \ F(x) \ est \ l'ensemble \ dualité.$$

Un opérateur linéaire non-borné $A : D(A) \subseteq X \to X$ *est m-dissipatif (maximal dissipatif) s'il vérifie les conditions suivantes :*
(i) A *est un opérateur dissipatif*
(ii) $\forall \lambda > 0, Im(\lambda I - A) = X$, *c'est-à-dire* $\forall f \in X, \lambda > 0, \exists \in D(A) : \lambda u - Au = f$.

Définition 1.4.6. [6] *Un opérateur linéaire non-borné* $A : D(A) \subseteq X \to X$ *est accrétif si*

$$\forall x \in D(A), \lambda > 0, \lambda \|x\| \leq \|\lambda x + Ax\|.$$

Proposition 1.4.6. [6] *Un opérateur* $A : D(A) \subseteq H \to H$ *est accrétif si et seulement si l'opérateur* $(-A)$ *est dissipatif.*

Définition 1.4.7. [6] *Soit* $A : D(A) \subseteq X \to X$ *un opérateur linéaire non-borné. On dit que* A *est monotone si* A *est accrétif, et on dit que* A *est un opérateur maximal monotone si* A *est m-accrétif.*

Proposition 1.4.7. [6] *Soit* $A : D(A) \subseteq X \to X$ *un opérateur linéaire non-borné dissipatif dans* X, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) $\forall \lambda > Im(\lambda I - A) = X$.
(ii) $\exists \lambda_0, Im(\lambda_0 I - A) = X$.

Lemme 1.4.8. *Un opérateur maximal dissipatif est fermé à domaine dense.*

1.5 Quelques notions de stabilité

1.5.1 Stabilité exponentielle

Définition 1.5.1. *Le semi-groupe $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ est dit exponentiellement stable s'il existe deux constantes $\alpha \geq 0$ et $M \geq 1$ telles que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\alpha t}, \forall t \geq 0.$$

Théorème 1.5.1. *Un semi-groupe de contractions sur un espace de Hilbert est exponentiellement stable si et seulement s'il existe $\mu > 0$ tel que*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) \geq -\mu\} \subset \rho(\mathcal{A})$$

et

$$\exists M > 0 : \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M \text{ pour tout } Re(\lambda) \geq -\mu.$$

1.5.2 Stabilité polynomiale

Définition 1.5.2. *Le semi-groupe $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ est dit polynomialement stable s'il existe deux constantes strictement positives α et C avec C qui dépend des données initiales telles que*

$$\|S(t)\| \leq Ct^{-\alpha}, \forall t \geq 0.$$

Théorème 1.5.2. *Soit $S(t)$ un C_0 semi-groupe borné de contractions sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et d'opérateur $\mathcal{A}$ tel que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$. Alors*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \qquad \frac{1}{|\lambda|^\alpha}\Big\|(i\lambda I - \mathcal{A})\Big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \qquad \Longleftrightarrow \|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{C}{t^{1/\alpha}}, \qquad \alpha > 0.$$

Théorème 1.5.3. *Soit $S(t)$ un un C_0 semi-groupe de contractions d'opérateurs linéaires sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et de générateur infinitésimal $\mathcal{A}$ tels que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$. Si*

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^\gamma}\|U_0\|_{D(\mathcal{A})}$$

alors, nous avons pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante positive C_ε telle que

$$\frac{1}{\beta^{\varepsilon+\frac{1}{\gamma}}}\Big\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C_\varepsilon.$$

1.5.3 Stabilité asymptotique

Soit $S(t)$ un un C_0 semi-groupe borné de contractions sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et d'opérateur $\mathcal{A}$.
$S(t)$ est asymptotiquement stable si et seulement si les parties réelles des valeurs propres de $\mathcal{A}$ sont négatives.

Dans notre travail, nous nous intéressons uniquement à la stabilité exponentielle du problème à étudier.
Dans ce première chapitre, nous avons donné quelques notions de base telles que des définitions, des théorèmes, des corollaires qui seront utilisées dans les autres chapitres. Nous commençons par le premier chapitre de notre étude qui est le problème bien posé.

Chapitre 2

Problème bien posé

Ce chapitre vise à montrer que le problème à étudier est bien posé. Pour cela nous prouvons l'existence et l'unicité de solution du problème en utilisant la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires.

2.1 Présentation du problème

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ avec des fissures droites de bord Γ tel que Γ soit la réunion de deux parties $\bar{\Gamma}_D$ et $\bar{\Gamma}_N$, c'est-à-dire $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ avec Γ_D et Γ_N deux parties ouvertes et connexes de Γ. On suppose aussi $\Gamma_N = \Gamma_N^1 \cup \Gamma_N^2$ où Γ_N^1 est l'ensemble des fissures. Si l'ensemble $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N^2$ est non vide, on suppose que l'angle intérieur à chaque coin compris entre Γ_D et Γ_N^2 est inférieur à π (cela signifie que Ω est convexe au voisinage de ce coin). Nous supposons en outre que les fissures émergent de Γ_N^2 dans le sens suivant. Si on note par $(\sigma_j)_{1\leq j\leq n}$ les différentes fissures de Ω, puis pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, chaque σ_j a une extrémité T_j, commun avec Γ_N^2 tandis que l'autre extrémité S_j n'appartient pas à $\bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N^2$ voir figure 1. Cette hypothèse implique que les fissures ne jamais rencontrer la partie de Dirichelet de la frontière. Dans la suite ν désigne l'unité vers l'extérieur du vecteur normal le long de Γ_N^2 (défini partout sauf au sommet de Γ_N^2), tandis que sur une fissure σ_j c'est simplement un vecteur normal unitaire fixe.

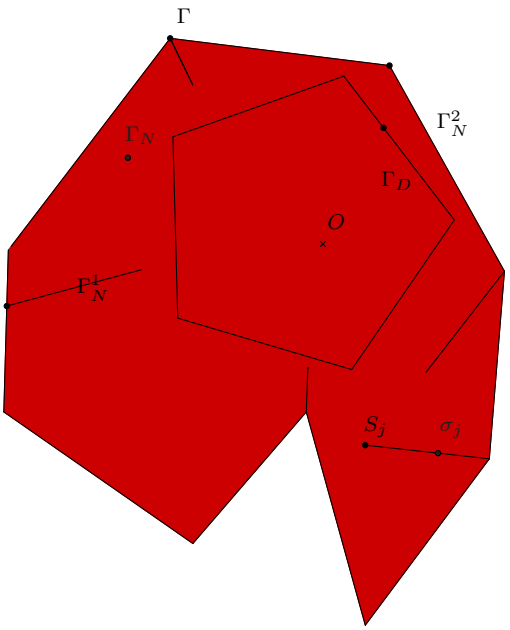

Fig 1 : Domaine polygonal avec des fissures

Sur ce domaine Ω, nous considérons le problème des ondes suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a u_t & = 0 \ \ dans\ \Omega \times [0, +\infty[\\ u & = 0\ sur\ \Gamma_D \times [0, +\infty[\\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} & = 0 \ \ sur\ \Gamma_N^1 \times [0, +\infty[\\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u + b u_t & = 0 \ \ sur\ \Gamma_N^2 \times [0, +\infty[\\ u(., 0) & = u_0, \quad u_t = u_1(., 0)\ dans\ \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Avec $a \in L^\infty(\Omega), \alpha, b \in H^s(\Gamma_N^2)$ pour certains $s > \dfrac{1}{2}$
$a \geq 0$ dans $\Omega, \alpha \geq 0$ dans $\Gamma_N^2, b > b_0 > 0$ dans Γ_N^2 et $a > a_0 > 0$ dans $O \cap \Omega$, où $O = \cup_{j=1}^n O_j, O_j$ étant un voisinage aussi fixe de σ_j aussi petit que nous le souhaitons et a_0 et b_0 sont des nombres réels positifs.

Nous supposons en outre que :

$$int\Gamma_D \neq \emptyset\ ou\ \alpha(x) > 0, \forall x \in \Gamma_N^2. \tag{2.2}$$

Nous notons que la condition aux limites $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ *sur* $\Gamma_N^1 \times [0, +\infty[$ signifie qu'il tient les deux cotés des fissures.

Nous supposons que le domaine vérifie les conditions géométriques suivantes :

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0).\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_D \text{ et } (x - x_0).\nu > 0 \text{ sur } \bar{\Gamma}_N^2, \tag{2.3}$$

$$(x - S_j).\nu(x) < 0 \text{ sur } (\bar{O}_j \cap \bar{\Gamma}_N^2) \backslash \{T_j\}, \qquad \forall j = 1, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Dans le système (2.1), on a :

1. $u_{tt} - \Delta u + a u_t = 0$ est appelée équation des ondes où $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ désigne le Laplacien par rapport aux variables espaces.
2. $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ où t est le temps.
3. ν désigne le vecteur unitaire de la normale extérieure à Γ le long de Γ_N^2 et $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ est la dérivée normale définie par $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \Delta u.\nu$ et $\Delta u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^T$.
4. Les équations $u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ *et* $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u + b u_t = 0$ sont appelées les données aux conditions au bord.
5. Les fonctions u_0 et u_1 sont les données initiales.

2.2 Formulation et étude d'existence de solution du problème

2.2.1 Formulation du problème

Cette partie a pour but de montrer que le problème (2.1) est bien posé, en reformulant dans un espace de Hilbert.

Pour cela, posons

$$U = (u, u_t)^T = (v, w)^T \text{ avec } u = v \text{ et } u_t = w.$$

Alors nous avons

$$U_t = (u_t, u_{tt})^T = (v_t, w_t)^T.$$

Comme

$$u_t = w$$

et

$$u = v$$

on a :

$$U_t = (w, \Delta v + aw)$$

Cela donne donc $U_t = \begin{pmatrix} w \\ u_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ \Delta v - a(x)w \end{pmatrix}$

On obtient ainsi, $U_t = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & -a(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$

Par conséquent, le problème (2.1) peut être réécrit sous la forme

$$\begin{cases} U_t + \mathcal{A}U = 0 \ dans \ \Omega \times [0, +\infty[\\ U(0) = (U_0, U_1)^T \end{cases}$$

Où $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & a(x) \end{pmatrix}$ et I est l'opérateur identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

L'opérateur $\mathcal{A}$ est linéaire indépendant du temps et défini par $\mathcal{A} : U \longrightarrow \mathcal{A}U$ et

$\mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & aI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

On a donc : $\mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u + av \end{pmatrix}$ avec pour domaine

$$D(\mathcal{A}) = \Big\{(u, v)^T \in Z \cap K \times K : \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ sur \ \Gamma_N^1 \ et \frac{\partial u}{\partial \nu} = -(\alpha u + bv) \ sur \ H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N^2)\Big\},$$

où :

$$K = H^1_{\Gamma_D}(\Omega) = \Big\{u \in H^1(\Omega); u = 0 \ sur \ \Gamma_D\Big\}$$

$$Z = E\Big(\Delta; L^2(\Omega)\Big) = \Big\{u \in H^1(\Omega); -\Delta u \in L^2(\Omega)\Big\}$$

$$\mathcal{H} = u \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \times L^2(\Omega) = K \times L^2(\Omega)$$

Z est le domaine de l'opérateur $\Delta, \mathcal{H}$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle$ et de la norme $\|.\|^2_{\mathcal{H}}$.

$$\left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix} \right\rangle = \int_\Omega (\nabla u . \nabla u^* + vv^*) dx + \int_{\Gamma_N^2} \alpha u u^* d\sigma$$

et

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\sqrt{\alpha} u\|_{L^2(\Gamma_N^2)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Le système (2.1) a été donc reformulé en un problème de Cauchy homogène. Dans les lignes suivantes, nous montrons que le problème est bien posé.

2.2.2 Étude d'existence de solution du problème

Le résultat de l'existence et unicité est donné par ce qui suit :

Théorème 2.2.1. *Pour toute donnée initiale $U_0 \in \mathcal{H}$ le problème (2.1) admet une solution unique faible*

$$U \in C\Big([0, +\infty[, H^1_{\Gamma_D}(\Omega)\Big) \cap C^1\Big([0, +\infty[), L^2(\Omega)\Big).$$

De plus, si $U_0 \in D(\mathcal{A})$, alors le problème (2.1) admet une unique solution forte

$$U \in C\Big([0; +\infty[, D(\mathcal{A})\Big).$$

Pour prouver le résultat cité dans le Théorème 2.2.1, nous utilisons la théorie des semi-groupes , c'est-à-dire montrer que l'opérateur $-\mathcal{A}$ génère un C_0 semi-groupe de contraction sur $\mathcal{H}$. Dans cette étape, nous nous préoccupons de prouver que l'opérateur $\mathcal{A}$ est accrétif.

Proposition 2.2.2. *L'opérateur linéaire $\mathcal{A}$ défini est monotone maximal et $-\mathcal{A}$ génère un C_0 semi-groupe de contraction dans l'espace de Hilbert.*

Démonstration.

Nous montrons que l'opérateur $-\mathcal{A}$ génère un C_0 semi-groupe de contraction. Pour cela considérons donc

$$U = (u, v)^T \in D(\mathcal{A}).$$

Par définition du produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}U, U) &= (\int_\Omega -\nabla v \nabla u + (-\Delta u + av)v)dx - \int_{\Gamma_N^2} \alpha v u d\sigma, \\ &= -\int_\Omega \nabla v \nabla u dx - \int_\Omega \Delta u v dx + \int_\Omega a|v|^2 dx - \int_{\Gamma_N^2} \alpha v u d\sigma.\end{aligned}$$

D'après la formule de Green :

$$\int_\Omega \Delta u v dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma_N^2} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma,$$

On a donc

$$(\mathcal{A}U, U) = -\int_\Omega \nabla v \nabla u dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma_N^2} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma + a\int_\Omega |v|^2 dx - \int_{\Gamma_N^2} \alpha v u d\sigma.$$

or

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -(\alpha u + bv) \text{ sur } \Gamma_N^2 \times]0, +\infty[.$$

Donc

$$(\mathcal{A}U, U) = \int_{\Gamma_N^2} (\alpha u + bv) v d\sigma + \int_\Omega a|v|^2 dx - \int_{\Gamma_N^2} \alpha v u d\sigma.$$

En développant la nouvelle expression, on a :

$$(\mathcal{A}U, U) = \int_{\Gamma_N^2} \alpha u v d\sigma + \int_{\Gamma_N^2} b|v|^2 d\sigma + \int_\Omega a|v|^2 dx - \int_{\Gamma_N^2} \alpha v u d\sigma,$$

En simplifiant cette dernière égalité, on obtient que :

$$(\mathcal{A}U, U) = \int_{\Gamma_N^2} b|v|^2 d\sigma + \int_\Omega a|v|^2 dx.$$

Par conséquent,

$$(\mathcal{A}U, U) \geq 0.$$

Ce qui entraine que $-\mathcal{A}$ est dissipatif et $\mathcal{A}$ est accrétif pour tout $U \in D(\mathcal{A})$.

Maintenant, pour montrer que l'opérateur $\mathcal{A}$ est maximal monotone, il suffit de montrer que l'opérateur $\mathcal{A}+\lambda I$ est surjectif pour un $\lambda > 0$ fixé. En effet, soit $F = (f, g)^T \in \mathcal{H}$, nous montons qu'il existe $U = (u, v)^T \in D(\mathcal{A})$ satisfaisant $(\lambda I + \mathcal{A})U = F$.
On a :$(\lambda I + \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} \lambda I & -I \\ -\Delta & \lambda I + aI \end{pmatrix}$
Donc $(\lambda I + \mathcal{A})U = F$ donne le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda u - v = f & dans\ \Omega, \\ -\Delta u + \lambda v + av = g & dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur\ \Gamma_D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & sur \quad \Gamma_N^1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u + bv = 0 & sur\ \Gamma_N^2. \end{cases} \tag{2.5}$$

De la première équation de(2.5), nous $v = \lambda u - f$. En remplaçant cette nouvelle expression de v dans la deuxième équation (2.5), nous obtenons :

$$\lambda(\lambda u - f) - \Delta u + a(\lambda u - f) = g.$$

Ce qui donne

$$\lambda^2 u - \lambda f - \Delta u + a\lambda u - af = g.$$

Par conséquent

$$\Delta u + (\lambda a + \lambda^2)u = g + (a + \lambda)f.$$

En appliquant l'expression de v sur la cinquième équation de (2.5), on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + b(\lambda u - f) + \alpha u = 0,\ sur\ \Gamma_N^2$$

et cela donne

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\lambda b + \alpha)u = bf\ sur\ \Gamma_N^2.$$

Ainsi, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + (\lambda a + \lambda^2)u = g + (a + \lambda)f\ dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur\ \Gamma_D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & sur\ \Gamma_N^1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + (\alpha + b\lambda)u = bf & sur\ \Gamma_N^2. \end{cases} \tag{2.6}$$

En posant

$$B = H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \cap E(\Delta; L^2(\Omega)) = K \cap Z.$$

Il reste donc à trouver $u \in B$, l'unique solution vérifiant (2.6). Nous allons donc utiliser le théorème de Lax-Milgram.

Pour cela, nous allons multiplier la première équation de (2.6) par $v \in K$.

On a :

$$(-\Delta u + (\lambda a + \lambda^2)u)v = (g + (a + \lambda)f)v.$$

En intégrant formellement par parties sur Ω, on obtient :

$$\int_\Omega ((-\Delta u + (\lambda a + \lambda^2)u)v)dx = \int_\Omega (g + (a + \lambda)f)vdx.$$

En utilisant la formule de Green, on a :

$$\int_\Omega -\Delta uvdx = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma_N^2} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma.$$

or

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = bf - (\alpha + b\lambda)u \ sur \ \Gamma_N^2.$$

On a donc

$$\int_\Omega -\Delta uvdx = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma_N^2} (bf - (\alpha + b\lambda)u)v d\sigma.$$

Cela équivaut à

$$\int_\Omega -\Delta uvdx = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma_N^2} bfv d\sigma + \int_{\Gamma_N^2} (\alpha + b\lambda)uv d\sigma.$$

Cela nous permet d'écrire :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega (\lambda a + \lambda^2)uvdx - \int_{\Gamma_N^2} bfv d\sigma + \int_{\Gamma_N^2} (\alpha + b\lambda)uv d\sigma = \int_\Omega (g + (a + \lambda)f)v)dx$$

Donc

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla v + (\lambda a + \lambda^2)uv)dx + \int_{\Gamma_N^2} (\alpha + b\lambda)uv d\sigma = \int_\Omega (g + (a + \lambda)f)v)dx + \int_{\Gamma_N^2} bfv d\sigma.$$

On obtient donc la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} Trouver \ u \in B \ tel \ que \\ \int_\Omega (\nabla u \nabla v + (\lambda a + \lambda^2)uv)dx + \int_{\Gamma_N^2} (\alpha + b\lambda)uv d\sigma = \\ \qquad \int_\Omega (g + (a + \lambda)f)v)dx + \int_{\Gamma_N^2} bfv d\sigma, \forall v \in K \end{cases} \tag{2.7}$$

En posant

$$c(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \nabla v + (\lambda a + \lambda^2)uv)dx + \int_{\Gamma_N^2} (\alpha + b\lambda)uvd\sigma$$

et

$$F(v) = \int_\Omega (g + (a+\lambda)f)v)dx + \int_{\Gamma_N^2} bfvd\sigma.$$

Donc

$$c(u,v) = F(v), \forall v \in K \tag{2.8}$$

Pour montrer que (2.8) admet une unique solution faible, il suffit de montrer que c est une forme bilinéaire continue coercive sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ et F est une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$.

On a

$$c : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (u,v) \longmapsto c(u,v) \quad \text{avec } K \subset L^2(\Omega)$$

• Montrons que c est bilinéaire sur H.

(i) Symétrie

$$\begin{aligned} c(u,v) &= \int_\Omega (\nabla u \nabla v + (\lambda a + \lambda^2)uv)dx + \int_{\Gamma_N^2} (\alpha + b\lambda)uvd\sigma \\ &= \int_\Omega (\nabla v \nabla u + (\lambda a + \lambda^2)vu)dx + \int_{\Gamma_N^2} (\alpha + b\lambda)vud\sigma \\ &= c(v,u) \text{ car } \nabla u \nabla v = \nabla v \nabla u \text{ et } uv = vu. \end{aligned}$$

(ii) Linéarité par rapport à u

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} c(ku,v) &= \int_\Omega (k\nabla u \nabla v + k(\lambda a + \lambda^2)uv)dx + \int_{\Gamma_N^2} k(\alpha + b\lambda)uvd\sigma \\ &= kc(u,v) \end{aligned}$$

car $\nabla\circ$ est linéaire , l'intégrale aussi. Par suite, c est linéaire par rapport à u et à v compte tenu de la symétrie.

Donc de (i) et (ii), on conclut que c est bilinéaire.

• Montrons la continuité de c.

Il s'agit de montrer qu'il existe $k \geq 0$ tel que

$$|c(u,v)| \leqslant k\|u,v\|_{\mathcal{H}}$$

où

$$\|u,v\|^2_{\mathcal{H}} = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\sqrt{\alpha}u\|^2_{L^2(\Gamma_N^2)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

On a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_{\Omega}|\nabla u.\nabla v| \leqslant \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

Comme $a \in L^{\infty}(\Omega)$ alors $\exists\ k_1 > 0,$ tel que $|a| \leqslant k_1\ p.p.\ sur\ \Omega.$

D'après l'inégalité de Hölder

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

On a $\alpha, b \in H^s(\Gamma_N^2)$ ce qui implique $\|\alpha + b\lambda\|_{H^s}$ existe et finie.

Alors

$$\begin{aligned}
|c(u,v)| &\leqslant \int_{\Omega}|\nabla u\nabla v|dx + \int_{\Omega}(\lambda a + \lambda^2)|uv|dx + \int_{\Gamma_N^2}|\alpha + b\lambda||uv|d\sigma,\\
&\leqslant \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\\
&+ \int_{\Omega}(\lambda k_1 + \lambda^2)|uv|dx + \|\alpha + b\lambda\|_{H^s}.\|u\|_{L^2(\Gamma_N^2)}\|v\|_{L^2(\Gamma_N^2)},\\
&\leqslant mes(\Omega)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + (\lambda k_1 + \lambda^2)\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}\\
&+ \|\alpha + b\lambda\|_{H^s}.\|u\|_{L^2(\Gamma_N^2)}\|v\|_{L^2(\Gamma_N^2)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent c est continue sur $K \times K$.

- Montrons que c est coercive.

$a > a_0 > 0\ p.p$ et $b > b_0 > 0\ p.p$ donc

$$\lambda a + \lambda^2 \geqslant \lambda a_0 + \lambda^2 p.p \text{ et } \alpha + b\lambda \geqslant \alpha + b_0\lambda\ p.p.$$

Alors

$$|c(u,v)| \geqslant \int_{\Omega}|\nabla u\nabla v|dx + \int_{\Omega}(\lambda a_0 + \lambda^2)|uv|dx + \int_{\Gamma_N^2}(\alpha + b_0\lambda)|uv|d\sigma,$$

Ce qui nous permet donc d'écrire

$$|c(u,u)| \geqslant \int_{\Omega}|\nabla u|^2dx + \int_{\Omega}(\lambda a_0 + \lambda^2)|u|^2dx + \int_{\Gamma_N^2}(\alpha + b_0\lambda)|u|^2d\sigma.$$

On a

$$\|u\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\sqrt{\alpha}u\|_{L^2(\Gamma_N^2)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Donc

$$|c(u,u)| \geqslant \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\lambda a_0 + \lambda^2)\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\sqrt{\alpha}u\|_{L^2(\Gamma_N^2)}^2.$$

car $b_0\lambda > 0$, ce qui montre que $b_0\lambda + \alpha > \alpha$.

En prenant $\lambda > 0$ tel que $\lambda a_0 + \lambda^2 \geqslant 1$, on obtient

$$|c(u,u)| \geqslant \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\sqrt{\alpha}u\|^2_{L^2(\Gamma^2_N)} = \|u\|^2_{\mathcal{H}}.$$

D'où la coercivité de c.

Donc c est bilinéaire symétrique continue et coercive.

• Montrons que F est une forme linéaire continue.

On a

$$F : K \longrightarrow \mathbb{R}, v \longmapsto f(v) = \int_\Omega (g + (a+\lambda)f)v)dx + \int_{\Gamma^2_N} bfvd\sigma.$$

• Montrons que F est linéaire.

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a :

$$F(kv) = k\int_\Omega (g + (a+\lambda)f)v)dx + k\int_{\Gamma^2_N} bfvd\sigma kF(v).$$

De plus

$$\begin{aligned} F(v_1 + v_2) &= \int_\Omega (g + (a+\lambda)f)(v_1 + v_2)dx + \int_{\Gamma^2_N} bf(v_1 + v_2)d\sigma, \\ &= \int_\Omega (g + (a+\lambda)f)v_1dx + \int_\Omega (g + (a+\lambda)f)v_2dx + \int_{\Gamma^2_N} bfv_1d\sigma + \int_{\Gamma^2_N} bfv_2d\sigma. \end{aligned}$$

En regroupant les termes, on obtient

$$F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2).$$

Par suite F est linéaire.

• Montrons que F est continue.

On veut montrer que $|f(v)| \leqslant \beta\|v\|$, pour tout $v \in K$ où β est une constante réelle. Alors

$$\begin{aligned} F(v) &\leqslant \int_\Omega |g + (a+\lambda)f||v|dx + \int_{\Gamma^2_N} |bf||v|d\sigma, \\ &\leqslant \|g + (a+\lambda)f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|bf\|_{L^2(\Gamma^2_N)}\|v\|_{L^2(\Gamma^2_N)}, \\ &\leq \int_\Omega |g||v|dx + (a+\lambda)\int_\Omega |f||v|dx + b\int_{\Gamma^2_N} |f||v|d\sigma. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schawtz, on a :

$$|F(v)| \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + (a+\lambda)\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + b\|f\|_{L^2(\Gamma^2_N)}\|v\|_{L^2(\Gamma^2_N)}.$$

En appliquant l'inégalité de Poincaré, on a :

$$|F(v)| \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1_{\Gamma_D}(\Omega)} + (a+\lambda)\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1_{\Gamma_D}(\Omega)} + b\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1_{\Gamma_D}(\Omega)},$$
$$\leq (\|g\|_{L^2(\Omega)} + (a+\lambda)\|f\|_{L^2(\Omega)} + b\|f\|_{L^2(\Omega)})\|v\|_{H^1_{\Gamma_D}(\Omega)}.$$

Alors F est continue sur $H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$. D'après tout ce qui précède, c est une forme bilinéaire continue et coercive sur $H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ et F est une forme linéaire continue sur $H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$; alors d'après le théorème de Lax-Milgram, on conclut qu'il existe une unique solution $U = (u,v)^T \in \mathcal{H}$ telle que $c(u,v) = F(v), \forall v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$.
Par conséquent, il existe $U \in D(\mathcal{A})$ qui vérifie $(\lambda I + \mathcal{A})U = F$ pour tout $F \in \mathcal{H}$. Ce qui montre que $\lambda I + \mathcal{A}$ est surjectif et cela implique que $\mathcal{A}$ est maximal.

On conclut que l'opérateur $\mathcal{A}$ est maximal monotone et $-\mathcal{A}$ génère un C_0 semi-groupe de contraction dans $\mathcal{H}$. □

Nous avons besoin également de ce résultat

Proposition 2.2.3. *$D(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{H}$.*

Démonstration.

Soit $F = (u,v)^T \in \mathcal{H}$ tel que $(F, M_0) = 0$ pour tout $M_0 \in D(\mathcal{A})$. Vérifions que $F = 0$. En effet, d'après la proposition précédente, on sait qu'il existe $M_0 \in D(\mathcal{A})$ tel que

$$M_0 + \mathcal{A}M_0 = F$$

car $\lambda I + \mathcal{A}$ est surjectif.

$$0 = (F, M_0) \Rightarrow \|M_0\|^2 + \langle \mathcal{A}M_0, M_0\rangle \geq 0.$$

$\mathcal{A}$ étant accrétif, alors

$$Re\langle \mathcal{A}M_0, M_0\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0.$$
$$\Rightarrow \langle -\mathcal{A}M_0, M_0\rangle_{\mathcal{H}} \leq 0$$
$$\Rightarrow \|M_0\|^2 - Re\langle \mathcal{A}M_0, M_0\rangle_H = 0$$
$$\Rightarrow Re\langle \mathcal{A}M_0, M_0\rangle_H = \|M_0\|^2$$

Donc

$$M_0 = 0$$

et l'équation

$$M_0 + \mathcal{A}M_0 = F$$

$$\Rightarrow F = 0.$$

Ainsi, nous avons prouvé que $D(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{H}$. □

Pour la preuve du Théorème 2.2.1, nous avons :
D'après la proposition 2.2.2, l'opérateur $\mathcal{A}$ est maximal monotone sur l'espace $\mathcal{H}$. Donc d'après le théorème de Hille-Yosida pour toute donnée initiale $U_0 \in \mathcal{H}$ le problème (2.1) admet une unique solution faible $U \in C\Big([0,+\infty[, H^1_{\Gamma_D}(\Omega)\Big) \cap C^1\Big([0,+\infty[), L^2(\Omega)\Big)$.
En utilisant toujours le théorème de Hille-Yosida, pour toute donnée initiale $U_0 \in D(A)$, le problème (2.1) admet une unique solution forte $U \in C\Big([0;+\infty[, D(A)\Big)$.

Nous pouvons donc conclure que le problème (2.1) est bien posé.

2.3 Quelques résultats techniques

Notre premier objectif est d'énoncer des résultats de régularité pour n'importe quel élément $D(\Delta)$. Pour cela , nous rappelons que la singularité de fissure standard S_j, associée à la fissure σ_j avec la pointe de fissure S_j est définie par :

$$S_j(r_j,\theta_j) = r_j^{\frac{1}{2}} \cos\Big(\frac{\theta_j}{2}\Big),$$

où $S_j(r_j,\theta_j)$ sont des coordonnées polaires centrées en S_j telles que $\theta_j = 0$ *ou* 2π sur la fissure σ_j. Nous fixons également une fonction de coupure radiale Φ_j égale à 1 près de S_j et telle que $\Phi_j = 0$ à l'extérieur d'une boule $B(S_j,\varepsilon_j)$ avec ε_j suffisamment petit dans l'ordre que $\Phi_j = 0$ près de $\dfrac{\partial\Omega}{\sigma_j}$.

Lemme 2.3.1. *Il existe α_0(assez petit et dépendant de Ω) tel que tout $u \in D(\Delta)$ admet le fractionnement suivant :*

$$u = u_R + \sum_{j=1}^{n} c_j(u)\Phi_j S_j,$$

où $c_j(u) \in \mathbb{R}$ et u_R appartient à $W^{2,p}(\Omega)$, avec $p = \dfrac{4}{3} + \alpha^*, \forall \alpha^* \in [0,\alpha_0]$.

Démonstration.

Pour la preuve de ce lemme, nous appliquons le corollaire 4.4.3.8 de [14] (voir remarque 4.4.4.15 de [14]) avec $p \leq 2$ tel que

$$\frac{1}{2} < 2 - \frac{2}{p} < \frac{\pi}{\omega_m},$$

où ω_m est l'angle maximal sur les bords de Dirichlet Γ_D, et du Neumann Γ_N^2 et entre Γ_N^1 et Γ_N^2 (c'est-à-dire $< 2\pi$ en raison de nos hypothèses).
Notez que l'interpolation triviale

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega), \forall p \leq 2,$$

implique, via le théorème de trace, l'interpolation

$$H^{\frac{1}{2}}(E) \hookrightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(E), \forall p \leq 2,$$

pour tout bord E de Γ_N^2.

□

Lemme 2.3.2. *Pour tout $u, z \in D(\Delta)$, nous avons*

$$\int_\Omega \Delta u z dx = -\int_\Omega \nabla u.\nabla z dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} z d\sigma. \tag{2.9}$$

Démonstration.

Selon le lemme précèdent, nous avons

$$u = u_R + \sum_{j=1}^{n} c_j(u)\Phi_j S_j, \tag{2.10}$$

$$z = z_R + \sum_{j=1}^{n} c_j(z)\Phi_j S_j, \tag{2.11}$$

avec $c_j(u), c_j(z) \in \mathbb{R}$ et u_R, z_R sont dans $W^{2,p}(\Omega)$ avec $p = \frac{4}{3} + \alpha^*, \forall \alpha^* \in [0, \alpha_0]$ où $\alpha_0 > 0$ est suffisamment petit.
Nous remarquons que pour $\alpha^* < \frac{2}{3}$, l'interpolation du théorème de Sobolev permet donc de dire

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q},$$

Pour tout $p \leq q \leq q_0 := \frac{8 + 6\alpha^*}{2 - 3\alpha^*}$. On voit que le conjugué de $p' > 1$ de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) est plus petit que 0. Par conséquent, on obtient :

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p'}(\Omega).$$

Pour la suite de cette preuve, nous allons utiliser le théorème suivant :

Théorème 2.3.3. [14] *Soit Ω un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière Γ est un polygone curviligne. Supposons que $0 \in \Gamma$.*
Soit V un voisinage de 0 tel que

$$V \cap \bar{\Omega} \subseteq \{(r\cos\theta, r\sin\theta) | r \geq 0, a \leq \eta \leq b\} \text{ avec } b - a \leq 2\pi.$$

Enfin, soit u une fonction qui est lisse sur $\bar{\Omega} - \{0\}$ et qui coïncide avec $r^\alpha \varphi(\theta)$ dans $V \cap \Omega$ où $\varphi \in C^\infty([a,b])$.
Puis $u \in W_p^s(\Omega)$ pour

$$(i) Re(\alpha) > s - \frac{2}{p}$$

tandis que $u \notin W_p^s(\Omega)$ pour

$$(ii) Re(\alpha) \leq s - \frac{2}{p}$$

lorsque $Re(\alpha)$ n'est pas entier.

Démonstration.

Prouver qu'une dérivée d'ordre w de u se comporte comme somme finie de fonction $r^{\alpha-m}\psi(\theta)$ où $\psi \in \Big([a,b]\Big)$, dans $V \cap \Omega$ (ceci est vrai sauf si a est un entier où les annulations peuvent se produire). Par conséquent sa *rième* puissance est une intégrale dans Ω si $Re(\alpha) \geqslant m - \frac{2}{r}$. En d'autres termes

$$\begin{cases} u \in W_r^m(\Omega), & si \quad Re(\alpha) > m - \frac{2}{r} \\ u \notin W_r^m(\Omega), & si \quad Re(\alpha) < m - \frac{2}{r} \end{cases}$$

Par l'intégrale de Sobolev, il s'ensuit que

(a) $u \in W_p^s(\Omega)$ à condition qu'il existe un entier $m > s$ et un $r \in]1, p[$ tel que $Re\alpha > m - \frac{2}{r}$ et $m - \frac{2}{r} = s - \frac{2}{r}$. Cette dernière condition est toujours remplie lorsque $p \geqslant 2$.

(b) $u \notin W_p^s(\Omega)$, lorsqu'il existe un entier $m \leqslant s$ et un $r \geqslant p$ tel que $Re(\alpha) \leqslant m - \frac{2}{r}$ et $m - \frac{2}{r} = s - \frac{2}{p}$. Cette dernière condition est toujours remplie quand $p \leqslant 2$. Jusqu'à présent, nous avons prouvé (i) lorsque $p \geqslant 2$ et (ii) lorsque $p \leqslant 2$. Nous n'essaierons pas d'étendre (i) à toutes les valeurs de $p < 2$ puisque ceci nécessite l'utilisation d'espaces pondérés comme nous l'avons déjà mentionné précédemment.
Cependant, l'extension de (ii) à tout $p > 2$ est simplement au moins lorsque $s - \frac{2}{p}$, n'est

pas un entier. En effet, une dérivée d'ordre m de u est clairement Hölder continu avec un exposant plus grand $Re(\alpha) - m$ lorsque $m < Re(\alpha) \leqslant m + 1$ et par conséquent la deuxième implication de Sobolev implique (ii) dans les autres cas où $Re(\alpha) \leqslant s - \frac{2}{p}$. $\square$

En utilisant ce théorème, l'intégrale de Sobolev permet donc d'écrire que :

$$\Phi_j S_j \in W^{1,p'}(\Omega), \qquad \forall j = 1, ..., n.$$

Ces deux dernières propriétés impliquent que

$$D(\Delta) \hookrightarrow W^{1,p'}(\Omega).$$

Cette intégrale permet d'utiliser la formule standard de Green et on obtient (voir Théorème 1.2.2) :

$$\int_\Omega \Delta u_R z \, dx = -\int_\Omega \nabla u_R . \nabla z \, dx + \int_\Gamma \frac{\partial u_R}{\partial \nu} z \, d\sigma. \tag{2.12}$$

Pour la partie singulière de u, pour un arbitraire $j = 1, ..., n$, nous écrivons

$$\int_\Omega \Delta(\Phi_j S_j) z \, dx = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{\Omega_j, \varepsilon} \Delta(\Phi_j S_j) z \, dx,$$

où

$$\Omega_j, \varepsilon = \Omega \backslash B(S_j, \varepsilon).$$

Puisque $\Phi_j S_j$ est singulier dans Ω_j, ε, on peut appliquer la formule de Green et on obtient :

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega_j, \varepsilon} \Delta(\Phi_j S_j) z \, dx = &- \int\limits_{\Omega_j, \varepsilon} \nabla(\Phi_j S_j) . \nabla z \, dx \\ &+ \int\limits_{\Gamma \backslash B(S_j, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \nu}(\Phi_j S_j) z \, d\sigma \\ &- \frac{1}{2} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^{2\pi} \cos\Big(\frac{\theta_j}{2}\Big) z(\varepsilon, \theta_j) \, d\theta_j. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Montrons que le dernier terme tend vers 0 si ε tend vers 0. En effet, en utilisant (2.11) on peut écrire

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^{2\pi} \cos\Big(\frac{\theta_j}{2}\Big) z(\varepsilon, \theta_j) \, d\theta_j = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^{2\pi} \cos\Big(\frac{\theta_j}{2}\Big) \Big(z_R + \sum_{j=1}^{n} c_j(z) \Phi_j S_j(\varepsilon, \theta_j)\Big) \, d\theta_j.$$

En développant cette dernière égalité et en posant $\sum\limits_{j=1}^{n} \Phi_j S_j = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \cos\Big(\frac{\theta_j}{2}\Big)$ nous obtenons :

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^{2\pi} \cos\Big(\frac{\theta_j}{2}\Big) z(\varepsilon, \theta_j) \, d\theta_j = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^{2\pi} \cos\Big(\frac{\theta_j}{2}\Big) z_R(\varepsilon, \theta_j) \, d\theta_j + \varepsilon c_j(z) \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\Big(\frac{\theta_j}{2}\Big) d\theta_j.$$

Puisque $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ donc $z_R(\varepsilon, \theta_j)$ peut être uniformément estimé dans ε et donc

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{\theta_j}{2}\right) z(\varepsilon, \theta_j)\ d\theta_j = 0.$$

En revenant à (2.13), on obtient

$$\int_{\Omega_{j,\varepsilon}} \Delta(\Phi_j S_j) z\ dx = -\int_{\Omega_{j,\varepsilon}} \nabla(\Phi_j S_j).\nabla z\ dx + \int_{\Gamma \setminus B(S_j,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \nu}(\Phi_j S_j) z\ d\sigma$$

En passant à la limite si $\varepsilon \longrightarrow 0$, nous constatons que

$$\int_{\Omega} \Delta(\Phi_j S_j) z\ dx = -\int_{\Omega} \nabla(\Phi_j S_j).\nabla z\ dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu}(\Phi_j S_j) z\ d\sigma. \tag{2.14}$$

De (2.12) et (2.14) nous en déduisons l'identité (2.9). □

Remarque 2.3.4.

L'identité (2.9) du lemme précédent est bien connu (voir théorème 1.5.3.11 de [14]) mais la différence reste sur l'hypothèse ν et sur le fait que le membre de droit de l'intégrale peut être remplacé par d'un crochet de dualité.

Maintenant, étant donné que $u \in D(\Delta)$, nous nous intéressons à la solution $z \in H^1(\Omega)$ de

$$\begin{cases} \Delta z = 0\ dans\ \Omega \\ z = 0\ sur\ \Gamma_D \\ \dfrac{\partial z}{\partial \nu} = 0\ sur\ \Gamma_N^1 \\ z = u\ sur\ \Gamma_N^2 \end{cases} \tag{2.15}$$

En posant $z = \omega + u$, nous avons : $\Delta z = \Delta\omega + \Delta u$.

En multipliant par w puis en intégrant sur Ω, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \Delta z w dx = \int_{\Omega} (\Delta\omega w + \Delta u w) dx$$

Or $\Delta z = 0$ dans Ω. Donc

$$\int_{\Omega} \Delta\omega w dx = -\int_{\Omega} \Delta u w dx,$$

En appliquant la formule de Green, nous avons :

$$\int_{\Omega} \Delta\omega w dx = -\int_{\Omega} \nabla\omega\nabla w dx + \int_{\Gamma_D \cup \Gamma_N^2} \frac{\partial\omega}{\partial\nu} w d\sigma$$

comme $w = 0$ *sur* $\Gamma_D \cup \Gamma_N^2$ alors

$$\int_\Omega \Delta\omega w dx = -\int_\Omega \nabla\omega\nabla w dx$$

et

$$-\int_\Omega \Delta u w dx = \int_\Omega \nabla u\nabla w dx - \int_{\Gamma_D\cup\Gamma_N^2} \frac{\partial u}{\partial \nu} w d\sigma;$$

donc

$$-\int_\Omega \Delta u w dx = \int_\Omega \nabla u\nabla w dx.$$

Nous pouvons donc dire que w est l'unique solution de

$$\int_\Omega \nabla\omega\nabla w dx = -\int_\Omega \nabla u\nabla w dx, \forall w \in V,$$

où $\omega \in V := \{w \in H^1(\Omega) : w = 0 \ sur \ \Gamma_D \cup \Gamma_N^2\}$.

Cela signifie que $\omega \in V$ est une solution faible du problème

$$\begin{cases} \Delta\omega = -\Delta u \ dans \ \Omega \\ \omega = 0 \qquad sur \ \Gamma_D \cup \Gamma_N^2, \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial\nu} = 0 \qquad sur \ \Gamma_N^1. \end{cases}$$

En d'autres termes, ω appartient à

$$D(\Delta_{Dir}) = \{v \in E(\Delta; L^2(\Omega)) \cap V : \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ sur \ \Gamma_N^1\}.$$

Lemme 2.3.5. *Il existe α_1 (assez petit et dépendant de Ω) tel que $v \in D(\Delta_{Dir})$ admet le fractionnement*

$$v = v_R + \sum_{j=1}^{n} c_j(v)\Phi_j S_j,$$

où $c_j(v) \in \mathbb{R}$ et v_R appartenant à $W^{2,p}(\Omega)$, avec $p = \frac{4}{3} + \alpha^*, \forall \alpha^* \in [0, \alpha_1]$.

Démonstration.

Pour la preuve de ce lemme, nous appliquons le corollaire 4.4.3.8 de [11] (voir remarque 4.4.4.15 de [11]) avec $p \leq 2$ tels que

$$\frac{1}{2} < 2 - \frac{2}{p} < \min\Big\{\frac{\pi}{\omega_m}, \frac{\pi}{2\omega_{mixed}}\Big\},$$

où ω_{mixed} l'angle maximal entre les arrêtes de Γ_N^1 *et* Γ_N^2 et qui est inférieur à π due à notre hypothèse (2.4) □

Corollaire 2.3.6. *Soit z une unique solution de (3.7) avec $u \in D(\Delta)$ et $v \in D(\Delta_{Dir})$. Alors nous avons*

$$\int_\Omega \Delta u z \, dx = -\int_\Omega \nabla u.\nabla z \, dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} z \, d\sigma, \tag{2.16}$$

$$\int_\Omega \Delta v z \, dx = -\int_\Omega \nabla v.\nabla z \, dx + \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} z \, d\sigma. \tag{2.17}$$

Démonstration.

Comme $u \in D(\Delta)$, il admet le fractionnement (2.10) et par le Lemme 2.3.5, z admet le fractionnement (2.11). Or $z = u + \omega$.

Ce qui permet d'écrire $z_R = u_R + \omega_R$.

Dans cette égalité, nous obtenons $\omega_R = z_R - u_R$ et pour

$$c_j(z) = c_j(u) + c_j(\omega), \qquad \forall j = 1, ..., n.$$

Nous avons :

$$\omega_R = z - \sum_{j=1}^{n} \Big(c_j(z) + c_j(z)\Big)\Phi_j S_j - u + \sum_{j=1}^{n} c_j(u)\Phi_j S_j,$$

En développant, nous obtenons

$$\omega_R = z - u - \sum_{j=1}^{n} c_j(z)\Phi_j S_j - \sum_{j=1}^{n} c_j(\omega)\Phi_j S_j + \sum_{j=1}^{n} c_j(u)\Phi_j S_j$$

Après simplification, nous concluons que

$$\omega = \omega_R + \sum_{j=1}^{n} c_j(\omega)\Phi_j S_j$$

D'après le Lemme 2.3.5, v admet le fractionnement

$$v = v_R + \sum_{j=1}^{n} c_j(u)\Phi_j S_j.$$

Donc en appliquant exactement le Lemme 3.0.5, nous obtenons les identités (2.16) et (2.17). □

Dans ce chapitre, nous avons reformuler le problème en un problème de Cauchy homogène que nous avons utilisé pour montrer que le problème à étudier est bien posé. Nous avons donné également quelques résultats techniques dont certains sont utilisés dans notre chapitre trois

Chapitre 3

Résultat de stabilité

3.1 Introduction et résultat principal

3.1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous faisons l'étude sur la stabilité de solution du problème (2.1). Cette notion constitue une problématique de la théorie du contrôle. La stabilité permet alors de garantir la décroissance de l'énergie des solutions c'est-à-dire $E(t) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$ dans le cas dissipatif donné dans le chapitre 2, E est l'énergie du problème (2.1). Dans cette partie nous nous intéressons donc à la notion de stabilité exponentielle. Pour toute solution de (2.1), on définit l'énergie comme suit :

$$E(t) = \frac{1}{2}\Big(\int_\Omega u_t^2(x,t) + |\nabla u(x,t)|^2 dx + \int_{\Gamma_N^2} \alpha |u(x,t)|^2 d\sigma \Big) \tag{3.1}$$

Par la suite, nous supposons que le domaine vérifie les conditions géométriques (2.2), (2.3) et (2.4). Ce qui nous permet donc de donner le résultat principal de la stabilité exponentielle suivant du problème (2.1) sous les hypothèses géométriques.

3.1.2 Résultat principal

Théorème 3.1.1. [5] *Soit Ω un domaine polygonal de $\mathbb{R}^2$ qui satisfait (2.2), (2.3) et (2.4). Il existe alors $\gamma > 0$ et $\beta > 0$ tels que l'énergie de la solution du problème (2.1) satisfait*

$$E(t) \leq \gamma e^{-\beta t} E(0), \forall t \geq 0. \tag{3.2}$$

Remarque 3.1.2.

Pour notre connaissance, aucun résultat de la stabilité n'est connu si un amortissement interne n'est pas ajouté au voisinage des fissures. Si le domaine est sans fissures, alors le résultat de la stabilité exponentielle n'est valable que par une rétroaction aux limites sur Γ_N^2 sous les hypothèses (2.2) et (2.3). Nous référons aux [9, 15, 18, 19].

Pour un objectif futur nous rappelons le résultat fondamental suivant :

Lemme 3.1.3. [15] *Soit $E : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante telle qu'il existe une constante $T > 0$ indépendante de t qui vérifie :*

$$\int_t^{+\infty} E(s)ds \leq TE(t), \forall t \geq 0. \tag{3.3}$$

Alors

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\frac{t}{T}}, \forall t \geq T. \tag{3.4}$$

Tout le travail qui va suivre entre dans l'optique de donner la preuve du Théorème 4.0.10.

3.2 Preuve du résultat principal

Pour démontrer le théorème concernant la stabilité exponentielle de la solution du problème (2.1), nous allons la décomposer en plusieurs étapes. Le premier objectif est d'établir une estimation sur l'énergie du système et montrer que cette énergie décroit exponentiellement dans le temps en utilisant la méthode du multiplicateur.

Cette méthode consiste d'abord de façon générale à multiplier l'équation concernée du système par des fonctions bien définies ou adaptées. Ensuite, intégrer par parties sur le domaine d'étude et en déduire une estimation de la stabilité de la solution du problème à étudier. Comme hypothèses, nous considérons un domaine polygonal Ω de $\mathbb{R}^2$ qui satisfait les conditions (2.2), (2.3) et (2.4). Ces conditions garantissent les propriétés géométriques pour l'application de la méthode du multiplicateur et la démonstration sera basée sur cette méthode.

Pour commencer, nous multiplions la première équation du système (2.1) par u_t qui est notre premier multiplicateur. Ce qui permet d'écrire :

$$u_{tt}u_t - \Delta u u_t + a u_t u_t = 0.$$

En intégrant sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega u_{tt}u_t dx - \int_\Omega \Delta u u_t dx + \int_\Omega a|u_t|^2 dx = 0.$$

En utilisant la formule de Green, nous avons :

$$\int_\Omega u_{tt}u_t dx + \int_\Omega \nabla u_t \nabla u dx - \int_{\Gamma_N^2} \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t d\sigma + \int_\Omega a|u_t|^2 dx = 0.$$

Comme

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -(\alpha u + b u_t) \ sur \ \Gamma_N^2 \times [0, \infty[\text{ sur } \Gamma_N^2,$$

alors on a

$$\int_\Omega u_{tt}u_t \ dx + \int_\Omega \nabla u_t \nabla u \ dx + \int_{\Gamma_N^2} (\alpha u + b u_t) u_t \ d\sigma + \int_\Omega a|u_t|^2 dx = 0.$$

Ainsi,

$$\int_\Omega u_{tt}u_t \ dx + \int_\Omega \nabla u_t \nabla u \ dx + \int_{\Gamma_N^2} \alpha u u_t \ d\sigma + \int_{\Gamma_N^2} b|u_t|^2 \ d\sigma + \int_\Omega a|u_t|^2 dx = 0.$$

Cela donne

$$\int_\Omega u_{tt}u_t \ dx + \int_\Omega \nabla u_t \nabla u \ dx + \int_{\Gamma_N^2} \alpha u u_t \ d\sigma = - \int_{\Gamma_N^2} b|u_t|^2 \ d\sigma - \int_\Omega a|u_t|^2 dx. \tag{3.5}$$

On constate que

$$\int_\Omega u_{tt}u_t \ dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt} u_t^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t^2 dx. \tag{3.6}$$

On a aussi

$$\int_\Omega \nabla u_t \nabla u \ dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx. \tag{3.7}$$

Dans la même logique on a :

$$\int_{\Gamma_N^2} \alpha u u_t \ d\sigma = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_N^2} \alpha |u|^2 \ d\sigma. \tag{3.8}$$

En remplaçant (3.6), (3.7) et (3.8) dans (3.5), on trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\int_\Omega u_t^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma_N^2} \alpha |u|^2 \ d\sigma\Big] = - \int_{\Gamma_N^2} b|u_t|^2 \ d\sigma - \int_\Omega a|u_t|^2 dx.$$

Nous déduisons que,

$$E'(t) = - \int_{\Gamma_N^2} b|u_t|^2 \ d\sigma - \int_\Omega a|u_t|^2 dx \leq 0. \tag{3.9}$$

Par conséquent $E(t)$ est décroissante. De ce fait,

$$E(t) \leq E(0) \qquad \forall t \geq 0.$$

Soit $0 \leq S \leq T$, on a :

$$\int_S^T E'(t)\ dxdt = -\int_S^T \int_\Omega a(x)u_t^2\ dxdt - \int_S^T \int_{\Gamma_N^2} b(x)u_t^2 dxdt,$$

ce qui permet d'écrire

$$\Big[E(t)\Big]_S^T = -\int_S^T \int_\Omega a(x)u_t^2\ dxdt - \int_S^T \int_{\Gamma_N^2} b(x)u_t^2 dxdt.$$

Donc

$$E(S) - E(T) = \int_S^T \int_\Omega a(x)u_t^2\ dxdt + \int_S^T \int_{\Gamma_N^2} b(x)u_t^2 dxdt, \qquad \forall\ 0 \leq S \leq T. \tag{3.10}$$

Maintenant, nous mettons en application la méthode du multiplicateur par morceaux (voir [22]) mais adaptée à notre situation. Pour toute extrémité σ_j d'une fissure, on considère une fonction coupure η_j, telle que $\eta_j = 1$ près de σ_j et avec un support au voisinage de σ_j.

Nous supposons également que le support de η_j ne rencontre pas le support de η_i *si* $i \neq j$. Soit le multiplicateur $\widetilde{m}(x)$ défini par :

$$\widetilde{m}(x) = \Big(1 - \sum_{j=1}^n \eta_j(x)\Big)(x - x_0),$$

nous prenons

$$\widetilde{M}(u)(x) = 2\Big(\sum_{j=1}^n (x - S_j)\eta_j(x) + \widetilde{m}(x)\Big).\nabla u(x) + u(x).$$

Lemme 3.2.1. [5] *Si u est une solution forte du problème (2.1), alors u vérifie*

$$\begin{aligned}
-2\int_0^T E(t)\ dt &+ \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 \sum_{j=1}^n (x - S_j).\nabla\eta_j\ dxdt - \int_0^T \int_\Omega |\nabla|^2 \sum_{j=1}^n (x - x_0).\nabla\eta_j\ dxdt \\
&- 2\int_0^T \int_\Omega (x_k - x_{0k}) \sum_{j=1}^n \frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} dxdt \\
&- \int_0^T \int_\Omega \sum_{j=1}^n (x_k - S_{jk})\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} dxdt \\
&- \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\widetilde{M}(u)dx|_0^T - \int_0^T \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial t})^2 \sum_{j=1}^n (x_k - S_j).\nabla\eta_j dxdt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 \sum_{j=1}^n (x - x_0).\nabla\eta_j dxdt -
\end{aligned}$$

$$\int_\Omega \int_0^T a(x)(\frac{\partial u}{\partial t})\widetilde{M}(u)dtdx + \int_0^T \int_\Gamma \Big(\sum_{j=1}^n (x-S_j)\eta_j + \widetilde{m}\Big).\nu(\frac{\partial u}{\partial t})^2 d\sigma dt$$
$$- \int_0^T \int_\Gamma \left[\widetilde{m} + \sum_{j=1}^n \eta_j(x-S_j)\right].\nu|\nabla u|^2 d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial \nu} u d\sigma\ dt$$
$$+ 2\int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial \nu}\left[\widetilde{m} + \sum_{j=1}^n \eta_j(x-S_j)\right].\nabla u d\sigma\ dt$$
$$+ \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \alpha|u|^2 d\sigma dt = 0. \tag{3.11}$$

Démonstration.

Nous utilisons la méthode du multiplicateur. Pour cela nous multiplions (2.1) par $\widetilde{M}(u)$. Ce qui donne

$$u_{tt}\widetilde{M}(u) - \Delta u\widetilde{M}(u) + au_t\widetilde{M}(u) = 0.$$

En intégrant sur Ω et pour tout $0 \leq S \leq T$, on a

$$\int_0^T \int_\Omega u_{tt}\widetilde{M}(u)dxdt + \int_0^T \int_\Omega -\Delta u\widetilde{M}(u)dxdt + \int_0^T \int_\Omega au_t\widetilde{M}(u)dxdt = 0.$$

Pour simplifier les écritures, nous posons donc

$$Q = \int_0^T \int_\Omega u_{tt}\widetilde{M}(u)dxdt, P = \int_0^T \int_\Omega -\Delta u\widetilde{M}(u)dxdt \text{ et } L = \int_0^T \int_\Omega au_t\widetilde{M}(u)dxdt.$$

• transformation de P.

En remplaçant $\widetilde{M}(u)$ par son expression dans P, cela donne

$$P = \int_0^T \int_\Omega -\Delta u\left[\Big(2\sum_{j=1}^n (x-S_j)\eta_j(x) + \widetilde{m}(x)\Big).\nabla u(x) + u(x)\right]dxdt$$

. Cela implique que

$$P = \int_0^T \int_\Omega \Big(- 2\Delta u\sum_{j=1}^n (x-S_j)\eta_j.\nabla u - 2\Delta u\ \widetilde{m}.\nabla u - \Delta uu\Big)dxdt,$$

Donc

$$P = \int_0^T \int_\Omega -2\Delta u\sum_{j=1}^n (x-S_j)\eta_j.\nabla u dxdt - \int_0^T \int_\Omega 2\Delta u\ \widetilde{m}.\nabla u dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta uu dxdt.$$

Pour toute extrémité S_j de la fissure σ_j et u une solution forte du problème (2.1), on obtient en utilisant la formule de Green

$$\begin{aligned}\int_\Omega -\Delta u\ \eta_j(x-S_j).\nabla u dx &= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_j(x_k-S_{jk})\frac{\partial u}{\partial x_k})dx\\ &\quad -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\eta_j(x-S_j).\nabla u d\sigma\\ &= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial(x_k-S_{jk})}{\partial x_i}\eta_j\frac{\partial u}{\partial x_k}dx+\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i}(x_k-S_{jk})\frac{\partial u}{\partial x_k}dx\\ &\quad +\int_\Omega \eta_j(x_k-S_{jk})\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial u}{\partial x_k})dx-\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\eta_j(x-S_j).\nabla u d\sigma.\end{aligned}$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\int_\Omega \eta_j(x_k-S_{jk})\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial u}{\partial x_k})dx=\frac{1}{2}\int_\Gamma |\nabla u|^2\eta_j(x_k-S_{jk})-\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 div(\eta_j(x-S_j))dx.$$

Et

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial(x_k-S_{jk})}{\partial x_i}\eta_j\frac{\partial u}{\partial x_k}dx=\int_\Omega |\nabla u|^2\eta_j dx.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_\Omega -\Delta u\ \eta_j(x-S_j).\nabla u dx &= \int_\Omega |\nabla u|^2\eta_j dx+\int_\Omega (x_k-S_{jk})\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}dx\\ &\quad -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 div((x-S_j)\eta_j)dx\\ &\quad +\frac{1}{2}\int_\Gamma \eta_j(x-S_j).\nu|\nabla u|^2 d\sigma-\int_\Gamma \eta_j\frac{\partial u}{\partial \nu}(x-S_j).\nabla u d\sigma.\end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega -2\Delta u\sum_{j=1}^n \eta_j(x-S_j).\nabla u dxdt &= \int_0^T\int_\Omega 2|\nabla u|^2\sum_{j=1}^n \eta_j dxdt\\ &\quad +\int_0^T\int_\Omega 2\sum_{j=1}^n (x_k-S_{kj})\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}dxdt\\ &\quad -\int_0^T\int_\Omega div\left[\sum_{j=1}^n (x-S_j)\eta_j\right]dxdt\\ &\quad +\int_0^T\int_\Omega \sum_{j=1}^n (x-S_j).\nu|\nabla u|^2 dxd\sigma\\ &\quad -2\int_0^T\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\sum_{j=1}^n (x-S_j)\eta_j\nabla d\sigma dt.\end{aligned}\tag{3.12}$$

De plus, la formule de Green donne

$$\begin{aligned}\int_\Omega -\Delta u\widetilde{m}.\nabla u dx &= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\big(\widetilde{m}_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\big)dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\ \widetilde{m}.\nabla u\ d\sigma \\ &= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \widetilde{m}_k}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}dx + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\widetilde{m}_k\frac{\partial u}{\partial x_i}(\frac{\partial u}{\partial x_k})dx \\ &- \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\widetilde{m}.\nabla u d\sigma.\end{aligned}$$

Intégrons par parties l'expression

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\widetilde{m}_k\frac{\partial u}{\partial x_i}(\frac{\partial u}{\partial x_k})dx.$$

Pour cela, posons : $U' = \frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial u}{\partial x_i})$, ce qui donne $U = \frac{\partial u}{\partial x_i}$
et $V = \frac{\partial u}{\partial x_i}\widetilde{m}_k$ donc en dérivant par rapport à la variable x_k, on a

$$V' = \frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial u}{\partial x_i}\widetilde{m}_k).$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}V' &= \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial u}{\partial x_i})\widetilde{m}_k + \frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial}{\partial x_i}\widetilde{m}_k \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial u}{\partial x_i})\widetilde{m}_k + \frac{\partial u}{\partial_{x_i}}div(\widetilde{m}_k).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\widetilde{m}_k\frac{\partial u}{\partial x_i}(\frac{\partial u}{\partial x_k})dx &= \int_\Gamma |\nabla u|^2\widetilde{m}_k d\sigma \\ &- \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\widetilde{m}_k\frac{\partial u}{\partial x_i}(\frac{\partial u}{\partial x_k})dx \\ &- \int_\Omega |\nabla|^2 div(\widetilde{m}_k)dx.\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\widetilde{m}_k\frac{\partial u}{\partial x_i}(\frac{\partial u}{\partial x_k})dx &= \frac{1}{2}\int_\Gamma |\nabla u|^2\widetilde{m}.\nu d\sigma \\ &- \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla|^2 div(\widetilde{m})dx.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega -\Delta u\widetilde{m}.\nabla u\ dx &= -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\ \widetilde{m}.\nabla u\ d\sigma + \frac{1}{2}\int_\Gamma |\nabla u|^2\widetilde{m}.\nu d\sigma \\ &- \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 div(\widetilde{m})dx + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \widetilde{m}_k}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}dx.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_0^T\int_\Omega -2\Delta u\widetilde{m}.\nabla u\ dxdt = -2\int_0^T\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\ \widetilde{m}.\nabla u\ d\sigma dt + \int_0^T\int_\Gamma |\nabla u|^2\widetilde{m}.\nu d\sigma dt \\ - \int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 div(\widetilde{m})dxdt + 2\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \widetilde{m}_k}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}dxdt. \tag{3.13}$$

On a aussi

$$\int_\Omega -\Delta u u dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_{\Gamma_N}\frac{\partial u}{\partial \nu}u d\sigma.$$

Donc

$$\int_0^T\int_\Omega -\Delta u u dxdt = \int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt - \int_0^T\int_{\Gamma_N}\frac{\partial u}{\partial \nu}u d\sigma dt. \tag{3.14}$$

Et donc, en faisant $P = (3.12) + (3.13) + (3.14)$ nous avons :

$$\begin{aligned} P &= \int_0^T\int_\Omega -\Delta u\widetilde{M}(u)dxdt \\ &= -\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 div\left[\sum_{j=1}^n (x-S_j)\eta_j + \widetilde{m}\right]dxdt + 2\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \widetilde{m}_k}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}dxdt \\ &+ 2\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2\sum_{j=1}^n \eta_j dxdt \\ &+ 2\int_0^T\int_\Omega \sum_{j=1}^n (x_k - S_{jk})\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}dxdt + \int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt \\ &+ \int_0^T\int_\Gamma \left[\widetilde{m} + \sum_{j=1}^n \eta_j(x-S_j)\right].\nu|\nabla u|^2 d\sigma dt - \int_0^T\int_{\Gamma_N}\frac{\partial u}{\partial \nu}u d\sigma\ dt \\ &- 2\int_0^T\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\left[\widetilde{m} + \sum_{j=1}^n \eta_j(x-S_j)\right].\nabla u d\sigma dt. \end{aligned}$$

Comme

$$div(\widetilde{m}) = (x-x_0).\nabla(1-\sum_{j=1}^n \eta_j) + 2(1-\sum_{j=1}^n \eta_j),$$

on peut donc écrire

$$-\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 div\left[\sum_{j=1}^n (x-S_j)\eta_j + \widetilde{m}\right]dxdt = -\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2\left[\sum_{j=1}^n (x-S_j)\nabla\eta_j \right. \\ - \sum_{j=1}^n \eta_j + (x-x_0).\nabla\sum_{j=1}^n \eta_j \\ \left. + 2 - 2\sum_{j=1}^n \eta_j\right].$$

En développant puis en simplifiant, nous obtenons

$$-\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 div\left[\sum_{j=1}^n (x-S_j)\eta_j + \widetilde{m}\right]dxdt = -2\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt$$
$$-\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 \sum_{j=1}^n (x-S_j).\nabla\eta_j dxdt$$
$$+\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 \sum_{j=1}^n (x-x_0).\nabla\eta_j dxdt.$$

Et

$$2\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial\widetilde{m}}{\partial x_i}\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}dxdt = 2\int_0^T\int_\Omega (x_k-x_{0k})\sum_{j=1}^n \frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}dxdt + 2\int_0^T\int_\Omega \left(1-\sum_{j=1}^n\eta_j\right)|\nabla u|^2 dxdt.$$

En remplaçant ces nouvelles expressions dans P, on obtient :

$$\begin{aligned}
P = &-2\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt \\
&-\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 \sum_{j=1}^n (x-S_j).\nabla\eta_j dxdt \\
&+\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt - \int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 \sum_{j=1}^n (x-x_0).\nabla\eta_j dxdt \\
&+2\int_0^T\int_\Omega (x_k-x_{0k})\sum_{j=1}^n \frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}dxdt + 2\int_0^T\int_\Omega (1-\sum_{j=1}^n\eta_j)|\nabla u|^2 dxdt \\
&+2\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 \sum_{j=1}^n \eta_j dxdt \\
&+\int_0^T\int_\Omega \sum_{j=1}^n (x_k-S_{jk})\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}dxdt + \int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt \\
&+\int_0^T\int_\Gamma \left[\widetilde{m} + \sum_{j=1}^n \eta_j(x-S_j)\right].\nu|\nabla u|^2 d\sigma dt - \int_0^T\int_{\Gamma_N}\frac{\partial u}{u}d\sigma dt \\
&-2\int_0^T\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial\nu}\left[\widetilde{m} + \sum_{j=1}^n \eta_j(x-S_j)\right].\nabla u d\sigma dt.
\end{aligned}$$

Et comme

$$-2\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt + 2\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 \sum_{j=1}^n \eta_j dxdt + 2\int_0^T\int_\Omega (1-\sum_{j=1}^n\eta_j)|\nabla u|^2 dxdt = 0,$$

alors

$$
\begin{aligned}
P = &- \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 \sum_{j=1}^n (x - S_j).\nabla \eta_j dx dt \\
&- \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 \sum_{j=1}^n (x - x_0).\nabla \eta_j dx dt \\
&+ 2 \int_0^T \int_\Omega (x_k - x_{0k}) \sum_{j=1}^n \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \sum_{j=1}^n (x_k - S_{jk}) \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 dx dt \\
&+ \int_0^T \int_\Gamma \left[\widetilde{m} + \sum_{j=1}^n \eta_j (x - S_j) \right] .\nu |\nabla u|^2 d\sigma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial u} d\sigma dt \\
&- 2 \int_0^T \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \left[\widetilde{m} + \sum_{j=1}^n \eta_j (x - S_j) \right] .\nabla u d\sigma dt.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Remarque 3.2.2.

Dans le cas $\bar{\Gamma}_N^2 \cap \bar{\Gamma}_D = \{s_1, s_2\}$ traité dans le [8] (mais exclut ici), on obtiendrait

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega -\Delta u \widetilde{M}(u) dx dt \geq &- \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 \sum_{j=1}^n (x - S_j).\nabla \eta_j dx dt \\
&- \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 \sum_{j=1}^n (x - x_0).\nabla \eta_j dx dt \\
&+ 2 \int_0^T \int_\Omega (x_k - x_{0k}) \sum_{j=1}^n \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \sum_{j=1}^n (x_k - S_{jk}) \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 dx dt \\
&+ \int_0^T \int_\Gamma \left[\widetilde{m} + \sum_{j=1}^n \eta_j (x - S_j) \right] .\nu |\nabla u|^2 d\sigma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial u} d\sigma dt \\
&- 2 \int_0^T \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \left[\widetilde{m} + \sum_{j=1}^n \eta_j (x - S_j) \right] .\nabla u d\sigma dt.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

- Transformation de

$$
Q = \int_0^T \int_\Omega u_{tt} \widetilde{M}(u) dx dt
$$

En remplaçant $\widetilde{M}(u)$ par son expression, on a :

$$
Q = \int_0^T \int_\Omega u_{tt} \left[\Big(2 \sum_{j=1}^n (x - S_j) \eta_j(x) + \widetilde{m}(x) \Big) .\nabla u(x) + u(x) \right] dx dt.
$$

En développant cette dernière expression on a :

$$Q = \int_0^T \int_\Omega 2u_{tt} \sum_{j=1}^{n} (x - S_j)\eta_j . \nabla u dx dt + \int_0^T \int_\Omega 2u_{tt} \widetilde{m} . \nabla u dx dt + \int_0^T \int_\Omega u_{tt} u dx dt.$$

Posons

$$N = \int_0^T \int_\Omega 2u_{tt} \sum_{j=1}^{n} (x - S_j)\eta_j . \nabla u dx dt,$$

$$\mathcal{E} = \int_0^T \int_\Omega 2u_{tt} \widetilde{m} . \nabla u dx dt \text{ et } \mathcal{F} = \int_0^T \int_\Omega u_{tt} u dx dt.$$

Pour ces transformations, nous commençons par N.

Nous avons

$$\int_0^T \int_\Omega u_{tt}(x - S_j)\eta_j . \nabla u dx dt = \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x - S_j)\eta_j . \nabla u dx dt$$

En intégrant par parties par rapport à la variable t, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x - S_j)\eta_j . \nabla u dx dt &= \int_\Omega \eta_j \frac{\partial u}{\partial t}(x - S_j) . \nabla u dx|_0^T dt \\
&\quad - \int_0^T \int_\Omega \eta_j (x_k - S_{jk}) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big) dx dt \\
&= \int_\Omega \eta_j \frac{\partial u}{\partial t}(x - S_j) . \nabla u dx|_0^T dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 div(\eta_j (x - S_j)) dx dt \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma \eta_j (x - S_j) . \nu \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 d\sigma dt.
\end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}
N &= \int_\Omega 2 \frac{\partial u}{\partial t} \sum_{j=1}^{n} \eta_j (x - S_j) . \nabla u dx|_0^T dt \\
&\quad - \int_0^T \int_\Gamma \sum_{j=1}^{n} \eta_j (x - S_j) . \nu \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 d\sigma dt \\
&\quad + \int_0^T \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 div\Big[\sum_{j=1}^{n} \eta_j (x - S_j)\Big] dx dt.
\end{aligned}$$

Transformons $\mathcal{E}$.

En intégrant par parties,

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \widetilde{m} . \nabla u dx dt = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \widetilde{m} . \nabla u dx|_0^T - \int_0^T \int_\Omega \widetilde{m}_k \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial_{xk}}\right) dx dt.$$

or

$$\int_0^T \int_\Omega -\widetilde{m}_k \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial_{xk}}\right) dxdt = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 div\widetilde{m} - \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Gamma \widetilde{m}.\nu\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 d\sigma dt,$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \int_0^T \int_\Omega 2u_{tt}\widetilde{m}.\nabla u dxdt \\
&= 2\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\widetilde{m}.\nabla u dx|_0^T + \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 div\widetilde{m}\ dxdt \\
&- \int_0^T \int_\Gamma \widetilde{m}.\nu\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 d\sigma dt. \\
F &= \int_0^T \int_\Omega u_{tt} u dxdt = \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u dxdt \\
&= \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} u dx|_0^T - \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
Q &= N + \mathcal{E} + F \\
&= \int_\Omega 2\frac{\partial u}{\partial t}\sum_{j=1}^n \eta_j(x - S_j).\nabla u dx|_0^T \\
&- \int_0^T \int_\Gamma \sum_{j=1}^n \eta_j(x - S_j).\nu\big(\frac{\partial u}{\partial t}\big)^2 d\sigma dt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \big(\frac{\partial u}{\partial t}\big)^2 div\Big[\sum_{j=1}^n \eta_j(x - S_j)\Big] dxdt \\
&+ 2\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\widetilde{m}.\nabla u dx|_0^T + \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 div\widetilde{m}\ dxdt \\
&- \int_0^T \int_\Gamma \widetilde{m}.\nu\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 d\sigma dt \\
&+ \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} u dx|_0^T - \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt.
\end{aligned}$$

En simplifiant l'expression, on obtient

$$\begin{aligned}
Q &= \int_0^T \int_\Omega u_{tt} \widetilde{M}(u) dxdt \\
&= \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \widetilde{M}(u) dxdt = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \widetilde{M}(u) dx|_0^T \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 div\left[\sum_{j=1}^n \eta_j(x - S_j) + \widetilde{m}\right] dxdt - \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt \\
&- \int_0^T \int_\Gamma \left(\sum_{j=1}^n \eta_j(x - S_j) + \widetilde{m}\right).\nu \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 d\sigma dt.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 div\left[\sum_{j=1}^n \eta_j(x - S_j) + \widetilde{m}\right] dxdt &= 2\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \sum_{j=1}^n (x - S_j).\nabla \eta_j dxdt \\
&- \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \sum_{j=1}^n (x - S_j).\nabla \eta_j dxdt.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit alors que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \widetilde{M}(u) dxdt &= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \widetilde{M}(u) dx|_0^T + \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \sum_{j=1}^n (x - S_j).\nabla \eta_j dxdt \\
&- \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \sum_{j=1}^n (x - x_0).\nabla \eta_j dxdt + \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt \qquad (3.16) \\
&- \int_0^T \int_\Gamma \left(\sum_{j=1}^n \eta_j(x - S_j) + \widetilde{m}\right).\nu \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 d\sigma dt.
\end{aligned}$$

• Transformation de L

$$L = \int_0^T \int_\Omega a u_t \widetilde{M} dxdt = \int_0^T \int_\Omega a \frac{\partial u}{\partial t} \widetilde{M} dxdt.$$

Comme $Q + P + L = 0$, alors on a

$$
\begin{aligned}
-\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 \sum_{j=1}^n (x-S_j).\nabla\eta_j dxdt &- \int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 \sum_{j=1}^n (x-x_0).\nabla\eta_j dxdt \\
&+ 2\int_0^T\int_\Omega (x_k - x_{0k}) \sum_{j=1}^n \frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} dxdt \\
&+ \int_0^T\int_\Omega \sum_{j=1}^n (x_k - S_{jk}) \frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} dxdt + \int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt \\
&+ \int_0^T\int_\Gamma \left[\widetilde{m} + \sum_{j=1}^n \eta_j (x-S_j)\right].\nu |\nabla u|^2 d\sigma dt - \int_0^T\int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial u} d\sigma dt \\
&- 2\int_0^T\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\left[\widetilde{m} + \sum_{j=1}^n \eta_j (x-S_j)\right].\nabla u d\sigma dt + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\widetilde{M}(u) dx|_0^T \\
&+ \int_0^T\int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 \sum_{j=1}^n (x-S_j).\nabla\eta_j dxdt \\
&- \int_0^T\int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 \sum_{j=1}^n (x-x_0).\nabla\eta_j dxdt + \int_0^T\int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 dxdt \\
&- \int_0^T\int_\Gamma \left(\sum_{j=1}^n \eta_j (x-S_j) + \widetilde{m}\right).\nu \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 d\sigma dt \\
&+ \int_0^T\int_\Omega a\frac{\partial u}{\partial t}\widetilde{M} dxdt = 0.
\end{aligned}
$$

Ce qui donne

$$
\begin{aligned}
-\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 \sum_{j=1}^n (x-S_j).\nabla\eta_j dxdt &- \int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 \sum_{j=1}^n (x-x_0).\nabla\eta_j dxdt \\
&+ 2\int_0^T\int_\Omega (x_k - x_{0k}) \sum_{j=1}^n \frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} dxdt \\
&+ \int_0^T\int_\Omega \sum_{j=1}^n (x_k - S_{jk}) \frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} dxdt + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\widetilde{M}(u) dx|_0^T \\
&+ \int_0^T\int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 \sum_{j=1}^n (x-S_j).\nabla\eta_j dxdt \\
&- \int_0^T\int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 \sum_{j=1}^n (x-x_0).\nabla\eta_j dxdt \\
&+ \int_0^T\int_\Omega a\frac{\partial u}{\partial t}\widetilde{M} dxdt +
\end{aligned}
$$

$$\int_0^T\int_\Gamma\left[\widetilde{m}+\sum_{j=1}^n\eta_j(x-S_j)\right].\nu|\nabla u|^2d\sigma dt-\int_0^T\int_{\Gamma_N}\frac{\partial u}{\partial u}d\sigma dt$$
$$-2\int_0^T\int_\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}\left[\widetilde{m}+\sum_{j=1}^n\eta_j(x-S_j)\right].\nabla ud\sigma dt$$
$$-\int_0^T\int_\Gamma\left(\sum_{j=1}^n\eta_j(x-S_j)+\widetilde{m}\right).\nu\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2d\sigma dt$$
$$+\int_0^T\int_{\Gamma_N^2}\alpha u^2d\sigma dt$$
$$=-\int_0^T\int_\Omega|\nabla u|^2dxdt$$
$$-\int_0^T\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2dxdt+\int_0^T\int_{\Gamma_N^2}\alpha|u^2|d\sigma dt$$
$$=-2\int_0^T E(t)dt.$$

Posons

$$I_1=\int_0^T\int_\Omega|\nabla u|^2\sum_{j=1}^n(x-S_j).\nabla\eta_jdxdt$$
$$-\int_0^T\int_\Omega|\nabla u|^2\sum_{j=1}^n(x-x_0).\nabla\eta_jdxdt$$
$$-2\int_0^T\int_\Omega(x_k-x_{0k})\sum_{j=1}^n\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}dxdt$$
$$-2\int_0^T\int_\Omega\sum_{j=1}^n(x_k-S_{jk})\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}dxdt-\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial t}\widetilde{M}(u)dx|_0^T$$
$$-\int_0^T\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\sum_{j=1}^n(x-S_j).\nabla\eta_jdxdt$$
$$+\int_0^T\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\sum_{j=1}^n(x-x_0).\nabla\eta_jdxdt-\int_0^T\int_\Omega a\frac{\partial u}{\partial t}\widetilde{M}(u)dxdt,$$

et

$$
\begin{aligned}
I_2 = &- \int_0^T \int_\Gamma \left[\widetilde{m} + \sum_{j=1}^n \eta_j(x - S_j)\right].\nu|\nabla u|^2 d\sigma dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial \nu} u d\sigma dt \\
&+ 2\int_0^T \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\left[\widetilde{m} + \sum_{j=1}^n \eta_j(x - S_j)\right].\nabla u d\sigma dt \\
&+ \int_0^T \int_\Gamma \left(\sum_{j=1}^n \eta_j(x - S_j) + \widetilde{m}\right).\nu\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 d\sigma dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \alpha|u^2| d\sigma dt.
\end{aligned}
$$

Alors par le Lemme 4.0.13 nous obtenons

$$I_1 + I_2 = 2\int_0^T E(t)dt.$$

□

Nous estimons maintenant de manière appropriée I_1, I_2 .

Les valeurs de I_2 sur Γ_D, Γ_N^1 et Γ_N^2, sont respectivement :

En utilisant (2.3) et l'expression de $\widetilde{m}$, nous avons

$$I_2(\Gamma_D) = \int_0^T \int_{\Gamma_D} (x - x_0).\nu|\nabla u|^2 d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_D} \left(\sum_{j=1}^n \eta_j(x - S_j) + \widetilde{m}\right).\nu\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 d\sigma dt \leq 0.$$

$$I_2(\Gamma_N^1) = 0.$$

Et

$$
\begin{aligned}
I_2(\Gamma_N^2) = &\int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \left(\sum_{j=1}^n \eta_j(x - S_j) + \widetilde{m}\right).\nu\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 d\sigma dt \\
&- \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \left[\widetilde{m} + \sum_{j=1}^n \eta_j(x - S_j)\right].\nu|\nabla u|^2 d\sigma dt \\
&+ 2\int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \frac{\partial u}{\partial \nu}\left[\widetilde{m} + \sum_{j=1}^n \eta_j(x - S_j)\right].\nu\nabla u d\sigma dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \alpha|u^2| d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \frac{\partial u}{\partial \nu} u d\sigma dt.
\end{aligned}
$$

Remarque 3.2.3.

Si les fissures ne sont pas droites, nous ne pouvons pas garantir que $I_2(\Gamma_N^1) = 0$, de la même manière si Γ_D rencontre une fissure, alors $I_2(\Gamma_D)$ n'est plus positif.

Lemme 3.2.4. [5] *Soit u une solution forte du problème (2.1). Il existe $C > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ de telle sorte que pour chaque $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$*

$$I_2(\Gamma_N^2) \leq \varepsilon \int_0^T E(t)dt + \frac{C}{\varepsilon}\left(E(0) + \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \alpha|u|^2 d\sigma dt \right), \forall\ T > 0. \tag{3.17}$$

Démonstration.

Posons $m = \widetilde{m} + \sum_{j=1}^{n} \eta_j(x - S_j)$.

En remplaçant m par son expression dans $I_2(\Gamma_N^2)$, on a

$$\begin{aligned} I_2(\Gamma_N^2) = &\int_0^T \int_{\Gamma_N^2} m.\nu \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 d\sigma dt \\ &- \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} m.\nu |\nabla u|^2 d\sigma dt \\ &+ 2\int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \frac{\partial u}{\partial \nu} m.\nu \nabla u d\sigma dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \alpha|u^2| d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \frac{\partial u}{\partial \nu} u d\sigma dt. \end{aligned}$$

En factorisant, on obtient

$$I_2(\Gamma_N^2) = \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \left(m.\nu \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - m.\nu|\nabla u|^2 \right) d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \frac{\partial u}{\partial t}(2m.\nu\nabla u + u) d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \alpha|u^2| d\sigma dt.$$

En remplaçant m et $\frac{\partial u}{\partial t}$ par leurs expressions, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \frac{\partial u}{\partial t}(2m.\nu\nabla u + u) d\sigma dt &= -\int_0^T \int_{\Gamma_N^2} (\alpha u + b\frac{\partial u}{\partial t}) \left[2\left(\widetilde{m} + \sum_{j=1}^{n} \eta_j(x - S_j) \right).\nabla u + u \right] d\sigma dt \\ &= -\int_0^T \int_{\Gamma_N^2} (\alpha u + b\frac{\partial u}{\partial t}) \widetilde{M}(u) d\sigma dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} I_2(\Gamma_N^2) &= \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \left(m.\nu \big(\frac{\partial u}{\partial t}\big)^2 - m.\nu|\nabla u|^2 - \big(\alpha u + b\frac{\partial u}{\partial t}\big)\widetilde{M}(u) \right) d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \alpha|u^2| d\sigma dt, \\ &= \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \left(m.\nu \big(\frac{\partial u}{\partial t}\big)^2 - m.\nu|\nabla u|^2 - \big(\alpha u + b\frac{\partial u}{\partial t}\big)\big(2m.\nu\nabla u + u\big) \right) d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \alpha|u^2| d\sigma dt. \end{aligned}$$

En développant puis en simplifiant, nous obtenons

$$I_2(\Gamma_N^2) = \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \left(m.\nu \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 - m.\nu |\nabla u|^2 - 2\alpha m.\nu u \frac{\partial u}{\partial t} \nabla u - 2b m.\nu \frac{\partial u}{\partial t} \nabla u - b \frac{\partial u}{\partial t} u \right) d\sigma dt.$$

Sur Γ_N^2, nous avons

$$m.\nu(x) = \Big(\widetilde{m} + \sum_{j=1}^{n} \eta_j(x)(x - S_j)\Big).\nu(x).$$

En remplaçant $\widetilde{m}$ par son expression puis en développant, nous obtenons

$$m.\nu(x) = \left(1 - \sum_{j=1}^{n} \eta_j(x)\right)(x - x_0).\nu(x) + \sum_{j=1}^{n} \eta_j(x)(x - S_j).\nu(x).$$

Et nous déduisons par les hypothèses (2.3) et (2.4), qu'il existe une constante $m_0 > 0$ telle que

$$m.\nu(x) \geq m_0, \qquad \forall x \in \Gamma_N^2.$$

Ce qui permet de donner l'estimation suivante :

$$\int_0^T \int_{\Gamma_N^2} m.\nu \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 d\sigma dt \leqslant \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \|m\|_\infty \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 d\sigma dt.$$

En utilisant l'inégalité de Young, nous obtenons

$$\int_0^T \int_{\Gamma_N^2} -2bm.\nu \nabla u \frac{\partial u}{\partial t} d\sigma dt \leqslant \frac{\|m\|_\infty^2 \|b\|}{\varepsilon} \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} b\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 d\sigma dt + \varepsilon \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} u^2 d\sigma dt.$$

$$-\int_0^T \int_{\Gamma_N^2} b \frac{\partial u}{\partial t} u d\sigma dt \leqslant \frac{\|b\| b}{2\varepsilon} \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 + \varepsilon \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} u^2 d\sigma dt.$$

En prenant α suffisamment petit en additionnant ces différentes estimations, nous avons

$$I_2(\Gamma_N^2) \leq \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \left(\left(\|m\|_\infty + \frac{\|b\|_\infty \|b\|_\infty^2 b}{\varepsilon} + \frac{\|b\|_\infty b}{2\varepsilon} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \varepsilon u^2 \right) d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \left(2\varepsilon - m.\nu\right) |\nabla u|^2 d\sigma dt.$$

avec ε une constante définie positive. L'estimation précédente pour $\varepsilon < \frac{m_0}{2}$, permet de déduire cette nouvelle estimation

$$I_2(\Gamma_N^2) \leq \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \left(\left(\|m\|_\infty + \frac{\|b\|_\infty \|b\|_\infty^2 b}{\varepsilon} + \frac{\|b\|_\infty b}{2\varepsilon} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \varepsilon u^2 \right) d\sigma dt + \frac{C}{\varepsilon} \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \alpha |u|^2 d\sigma dt.$$

Comme b est uniformément défini positif, il existe une constante $c_1 > 0$ telle que

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \left(\|m\|_\infty + \frac{\|b\|_\infty \|b\|_\infty^2 b}{\varepsilon} + \frac{\|b\|_\infty b}{2\varepsilon} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 d\sigma dt &\leq \frac{c_1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} b \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 d\sigma dt \\ &\leq -\frac{c_1}{\varepsilon} \int_0^T E'(t) dt \\ &\leq -\frac{c_1}{\varepsilon} (E(T) - E(0)) \\ &\leq \frac{c_1}{\varepsilon} E(0).\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Poincaré, nous avons

$$\begin{aligned}\varepsilon \int_{\Gamma_N^2} u^2 &\leq c_2 \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\ &\leq 2 c_2 \varepsilon E(t),\end{aligned}$$

donc

$$\varepsilon \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} u^2 d\sigma dt \leq 2 c_2 \varepsilon \int_0^T E(t) dt.$$

où c_2 est une constante positive indépendant de t. En combinant ces différentes estimations, on obtient (3.20). □

Pour tout j, nous considérons une fonction coupure $\widetilde{\eta}_j$ telle que $\widetilde{\eta}_j = 1$ près de η_j dans $\sup \eta_j$ avec support dans un voisinage de $\sup \eta_j$.
En définissant $O = \cup_{j=1}^n \sup \eta_j$ et $O' = \cup_{j=1}^n \sup \widetilde{\eta}_j$, nous avons le résultat suivant :

Lemme 3.2.5. *Soit u une solution forte de (2.1). Alors, il existe $C > 0$ telle que pour tout $T > 0$*

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_O |\nabla u|^2 dx dt \leq C \Bigg[E(0) + \int_0^T \int_{O'} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + u^2 \right) dx dt \\ + \int_0^T \int_{O' \cap \Gamma_N^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 d\sigma dt + \int_0^T \int_{O' \cap \Gamma_N^2} u^2 d\sigma dt \Bigg].\end{aligned} \tag{3.18}$$

Démonstration.

Nous multiplions le problème (2.1) par $\widetilde{\eta_j} u$ puis nous intégrons, on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega u_{tt} \widetilde{\eta_j} u dx dt - \int_0^T \int_\Omega \Delta u \widetilde{\eta_j} u dx dt + \int_0^T \int_\Omega a u_t \widetilde{\eta_j} u dx dt = 0$$

Posons

$$A=\int_0^T\int_\Omega -\Delta u\widetilde{\eta_j}udxdt, B=\int_0^T\int_\Omega u_{tt}\widetilde{\eta_j}udxdt \text{ et } C=\int_0^T\int_\Omega au_t\widetilde{\eta_j}udxdt$$

Nous allons donc intégrer par parties

$$\begin{aligned}
A&=\int_0^T\int_\Omega -\Delta u\widetilde{\eta_j}udxdt\\
&=\int_0^T\int_\Omega \nabla u.\nabla\ (\widetilde{\eta_j}u)dxdt-\int_0^T\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial\nu}\ \widetilde{\eta_j}ud\sigma dt\\
&=\int_0^T\int_\Omega \Big(\nabla u.(u\nabla\ \widetilde{\eta_j}+\widetilde{\eta_j}\ \nabla u)\Big)dxdt-\int_0^T\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial\nu}\ \widetilde{\eta_j}ud\sigma dt\\
&=\int_0^T\int_\Omega u\nabla u.\nabla\ \widetilde{\eta_j}dxdt+\int_0^T\int_\Omega|\nabla u|^2\widetilde{\eta_j}dxdt-\int_0^T\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial\nu}\ \widetilde{\eta_j}ud\sigma dt.
\end{aligned}$$

On a en intégrant par parties

$$\int_0^T\int_\Omega u\nabla u.\nabla\ \widetilde{\eta_j}dxdt=-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega u^2\Delta\widetilde{\eta_j}dxdt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma u^2\frac{\partial\widetilde{\eta_j}}{\partial\nu}d\sigma dt.$$

Alors

$$\begin{aligned}
A=&\int_0^T\int_\Omega|\nabla u|^2\widetilde{\eta_j}dxdt\\
&-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega u^2\Delta\widetilde{\eta_j}dxdt-\int_0^T\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial\nu}\ \widetilde{\eta_j}ud\sigma dt\\
&+\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma u^2\frac{\partial\widetilde{\eta_j}}{\partial\nu}d\sigma dt.
\end{aligned}$$

En remplaçant $\frac{\partial u}{\partial\nu}$ par $-(\alpha u+bu_t)$ sur Γ_N^2 on a

$$A=\int_0^T\int_\Omega|\nabla u|^2\widetilde{\eta_j}dxdt-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega u^2\Delta\widetilde{\eta_j}dxdt+\int_0^T\int_{\Gamma_N^2}\Big((\alpha u+bu_t)\widetilde{\eta_j}u+\frac{1}{2}u^2\frac{\partial\widetilde{\eta_j}}{\partial\nu}\Big)d\sigma dt.$$

$$B=\int_0^T\int_\Omega u_{tt}\widetilde{\eta_j}udxdt=\int_0^T\int_\Omega\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\widetilde{\eta_j}udxdt$$

$$=\int_0^T\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial t}\widetilde{\eta_j}udx|_0^T-\int_0^T\int_\Omega\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2\widetilde{\eta_j}dxdt.$$

Et

$$C = \int_0^T \int_\Omega a \frac{\partial u}{\partial t} \widetilde{\eta_j} u dx dt.$$

En additionnant A, B et C, et sur j, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 \widetilde{\eta_j} dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega u^2 \Delta \widetilde{\eta_j} dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \Big((\alpha u + b u_t) \widetilde{\eta_j} u + \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial \widetilde{\eta_j}}{\partial \nu} \Big) d\sigma dt \\ + \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \widetilde{\eta_j} u dx |_0^T - \int_0^T \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial t} \Big)^2 \widetilde{\eta_j} dx dt \\ + \int_0^T \int_\Omega a \frac{\partial u}{\partial t} \widetilde{\eta_j} u dx dt = 0.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 \sum_{j=1}^n \widetilde{\eta_j} dx dt = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega u^2 \Delta \Big(\sum_{j=1}^n \widetilde{\eta_j} \Big) dx dt - \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \sum_{j=1}^n \widetilde{\eta_j} u dx |_0^T \\ - \int_0^T \int_\Omega a \frac{\partial u}{\partial t} \widetilde{\eta_j} u dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \Big(- (\alpha u + b u_t) \widetilde{\eta_j} u - \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial \widetilde{\eta_j}}{\partial \nu} \Big) d\sigma dt.\end{aligned}$$

Et comme $\widetilde{\eta_j} = 1$ près de η_j, en utilisant maintenant les inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned}- \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} u dx |_0^T &= - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(T) u(T) dx + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(0) u(0) dx, \\ &\leqslant \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial t} \Big)^2 (T) dx + \varepsilon \int_\Omega u^2(T) dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial t} \Big)^2 (0) dx + \varepsilon \int_\Omega u^2(0) dx, \\ &\leqslant C E(0).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega a \frac{\partial u}{\partial t} u dx dt &\leqslant \|a\|_\infty \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial t} \Big)^2 dx dt + \varepsilon \int_0^T \int_\Omega u^2 dx dt, \\ &\leqslant C \Big[\int_0^T \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial t} \Big)^2 dx dt + \int_0^T \int_\Omega u^2 dx dt \Big].\end{aligned}$$

De manière analogue, on a

$$\int_0^T \int_{\Gamma_N^2} b \frac{\partial u}{\partial t} u d\sigma dt \leqslant C \Big[\int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \Big(\frac{\partial u}{\partial t} \Big)^2 d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} u^2 d\sigma dt \Big].$$

En utilisant donc ces différentes estimations, on obtient donc

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 dx dt \leqslant C \Bigg[E(0) + \int_0^T \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial t} \Big)^2 dx dt + \int_0^T \int_\Omega u^2 dx dt \\ + \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \Big(\frac{\partial u}{\partial t} \Big)^2 d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} u^2 d\sigma dt \Bigg] - \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \alpha u^2 d\sigma dt.\end{aligned}$$

□

Afin d'obtenir l'inégalité intégrale demandée, nous allons estimer les termes

$\int_0^T \int_{O'} u^2 dxdt$ *et* $\int_0^T \int_{O' \cap \Gamma_N^2} u^2 d\sigma dt$ de (3.18), ainsi que le terme $\int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \alpha |u|^2 d\sigma dt$ de (3.17)

Pour cela, nous prouvons les lemmes suivants.

Lemme 3.2.6. [5] *Soit u une solution forte du problème (2.1). Alors il existe une constante positive C telle que pour tout $T > 0$ et $\varepsilon \in [0,1]$, on a*

$$\int_0^T \int_\Omega a u^2 dxdt \leq \frac{C}{\varepsilon} \left(E(0) + \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \alpha u^2 d\sigma dt \right) + \varepsilon \int_0^T E(t) dt. \tag{3.19}$$

Démonstration.

$\forall t \geq 0$, considérons le problème : trouver $z = z(t)$ solution de

$$\begin{cases} \Delta z = au \text{ dans } \Omega \\ z = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

En multipliant par $w \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ du problème et en intégrant sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega \Delta z w dx = \int_\Omega auw dx$$

En utilisant la formule de Green, on peut écrire

$$-\int_\Omega \nabla z . \nabla w dx + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial z}{\partial \nu} w d\sigma = \int_\Omega auw dx$$

Comme $\frac{\partial z}{\partial \nu} = 0 \qquad$ sur Γ_N alors

$$\int_\Omega \nabla z . \nabla w dx = -\int_\Omega auw dx.$$

Par conséquent le problème admet la formulation faible : soit $w \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ l'unique solution de

$$\int_\Omega \nabla z . \nabla w dx = -\int_\Omega auw dx \qquad \forall w \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega). \tag{3.20}$$

En prenant $w = z$ dans (3.20) nous obtenons

$$\int_\Omega |\nabla z|^2 dxdt = -\int_\Omega auz dx.$$

Par les inégalités de cauchy-Schwarz et de Poincaré, cela donne

$$\int_\Omega |\nabla z|^2 dxdt \leq C_1 \int_\Omega a u^2 dx \leq C_2 E(t).$$

En particulier, en utilisant l'inégalité de Poincaré à nouveau et un théorème de trace, nous obtenons

$$\int_\Omega |\nabla z|^2 dxdt \leq C_1 \int_\Omega a u^2 dx \leq C_3 \int_\Omega a|\nabla u|^2 dx \leq C_4 E(t).$$

En passant donc à la norme nous avons

$$\|z\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \|\sqrt{a}u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_4 E(t), \tag{3.21}$$

$$\|z\|^2_{L^2(\Gamma^2_N)} \leq C_5 \|\sqrt{a}u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_6 E(t). \tag{3.22}$$

La différenciation (3.20) par rapport à t, z' est solution du problème

$$\begin{cases} \Delta z' = au' \text{ dans } \Omega \\ z' = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial z'}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \tag{3.23}$$

Ensuite les considérations ci dessous conduisent à

$$\|z'\|_{L^2}(\Omega) \leq C_1 \int_\Omega a u'^2 dx \leq -C_1 E'(t). \tag{3.24}$$

Par la suite, en multipliant (2.1) par z puis en intégrant on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + a u_t\Big) z dx dt = 0 \tag{3.25}$$

Nous transformons maintenant les deux premiers termes de membre de gauche. Puisque u et z appartiennent au domaine $D(\Delta)$ de Δ, par le Lemme 3.0.5 nous avons

$$-\int_0^T \int_\Omega \Delta u z dx dt = \int_0^T \int_\Omega \nabla z . \nabla u dx dt - \int_0^T \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} z d\sigma dt.$$

Par conséquent, par (3.20) (puisque u appartient à $H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$) et les conditions de limites sont satisfaites par u. Donc on peut remplacer $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ par son expression. Ce qui permet d'obtenir

$$-\int_0^T \int_\Omega \Delta u z dx dt = -\int_0^T \int_\Omega a u^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma^2_N} b \frac{\partial u}{\partial t} z d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma^2_N} \alpha u z d\sigma dt.$$

Pour le deuxième terme de (3.25) en intégrant par parties au temps, nous obtenons directement

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} z dx dt = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} z dx|_0^T - \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial t} dx dt.$$

Ces deux identités dans (3.25) donne

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} z dx|_0^T - \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial t} dx dt - \int_0^T \int_\Omega a u^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} b\frac{\partial u}{\partial t} z d\sigma dt$$
$$+ \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \alpha u z d\sigma dt + \int_0^T \int_\Omega a\frac{\partial u}{\partial t} z dx dt = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega a u^2 dx dt &= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} z dx|_0^T - \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial t} dx dt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega a\frac{\partial u}{\partial t} z dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} b\frac{\partial u}{\partial t} z d\sigma dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \alpha u z d\sigma dt.\end{aligned} \tag{3.26}$$

En utilisant l'inégalité de Young et les estimations précédentes nous avons

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial t} dx dt \le \varepsilon \int_0^T E(t) dt - \frac{C_1}{2\varepsilon}\int_0^T E'(t) dt \le \frac{C_1}{2\varepsilon} E(0) + \varepsilon \int_0^T E(t) dt.$$

$$\int_0^T \int_{\Gamma_N^2} b\frac{\partial u}{\partial t} z d\sigma dt \le \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T \int_{\Gamma_N^2} b(\frac{\partial u}{\partial t})^2 dt d\sigma + \varepsilon \|b\|_\infty \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} z^2 dt d\sigma$$
$$\le \frac{1}{2\varepsilon} E(0) + C\varepsilon \int_0^T E(t) dt.$$

$$\int_0^T \int_\Omega a\frac{\partial u}{\partial t} z dx dt \le \frac{\|a\|_\infty}{2\varepsilon}\int_0^T \int_\Omega a\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 dx dt + \varepsilon \int_0^T \int_\Omega z^2 dx dt$$
$$\le C\left(\frac{1}{\varepsilon} E(0) + \varepsilon \int_0^T E(t) dt\right).$$

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} z dx|_0^T &= -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(T) z(T) dx + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(0) z(0) dx \\ &\le \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega u_t^2(T) dx + \varepsilon \int_\Omega z^2(T) dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega u_t^2(0) dx + \varepsilon \int_\Omega z^2(0) dx \\ &\le C E(0).\end{aligned}$$

$$\int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \alpha u z d\sigma dt \leq \frac{\|\alpha\|_\infty}{2\varepsilon} \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \alpha u^2 d\sigma dt + \varepsilon \int_0^T \int_{\Gamma_N^2} z^2 d\sigma dt$$
$$\leq C\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_N^2} \int_0^T \alpha u^2 d\sigma dt + \varepsilon \int_0^T E(t) dt\right).$$

Ces estimations utilisées dans (3.26) conduisent à (3.19). □

Lemme 3.2.7. *Soit u une solution forte du problème (2.1). Alors il existe une constante positive $C > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit telle que pour tout $T > 0$ et $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, nous avons*

$$\int_0^T \int_{O' \cap \Gamma_N^2} u^2 d\sigma dt \leq \frac{C}{\varepsilon^5}\left(E(0) \int_{\Gamma_N^2} \int_0^T \alpha u^2 d\sigma dt\right) + \varepsilon \int_0^T E(t) dt. \tag{3.27}$$

Démonstration.

Par le théorème de trace dans O', il existe $C > 0$ telle que

$$\int_{O' \cap \Gamma_N^2} u^2 d\sigma \leq C \|u\|^2_{H^{\frac{3}{4}}(O')}.$$

Maintenant, en utilisant une inégalité d'interpolation (voir par exemple le théorème 1.4.4.3 de [12]), nous déduisons qu'il existe $K > 0$ tel que

$$\int_{O' \cap \Gamma_N^2} u^2 d\sigma \leq C\Big(\varepsilon^2 \|u\|^2_{H^1(O')} + K^2 \varepsilon^{-6} \|u\|^2_{L^2(O')}\Big),$$

pour tout $\varepsilon > 0$. En posant $\eta = C\varepsilon^2$, nous trouvons que

$$\int_{O' \cap \Gamma_N^2} u^2 d\sigma \leq \eta \int_{O'} |\nabla u|^2 dx + C\eta^{-3} \|u\|^2_{L^2(O')},$$

pour tout $\eta \in [0, 1]$.

En intégrant cette expression dans $[0, T]$. On a

$$\int_0^T \int_{O' \cap \Gamma_N^2} u^2 d\sigma dt \leq \eta \int_0^T \int_{O'} |\nabla u|^2 dx dt + C\eta^{-3} \int_0^T \|u\|^2_{L^2(O')} dt.$$

En utilisant le lemme 4.0.18 (estimation (3.19)), nous obtenons

$$\int_0^T \int_{O' \cap \Gamma_N^2} u^2 d\sigma dt \leq \eta \int_0^T E(t) dt + C\eta^{-3}\left(\frac{C}{\varepsilon}\left(E(0) + \int_{\Gamma_N^2} \int_0^T \alpha u^2 d\sigma dt\right) + \varepsilon \int_0^T E(t) dt\right),$$

pour tous les $\eta \in]0, 1]$ et pour tous les $\varepsilon \in]0, 1]$. Cette estimation est équivalente à

$$\int_0^T \int_{O' \cap \Gamma_N^2} u^2 d\sigma dt \leq \left(\eta + \frac{C\varepsilon}{\eta^3}\right) \int_0^T E(t) dt + \frac{C\varepsilon}{\varepsilon \eta^3} E(0),$$

pour tous les $\eta \in [0,1]$ et pour tous les $\varepsilon \in]0,1]$. En choisissant ε de telle sorte que

$$\frac{C\varepsilon}{\eta^3} = \eta,$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon = C^{-1}\eta^4,$$

on obtient

$$\int_0^T \int_{O'\cap\Gamma_N^2} u^2 d\sigma dt \leq 2\eta \int_0^T E(t)dt + \frac{C\varepsilon}{\eta^5}\left(E(0) + \int_{\Gamma_N^2}\int_0^T \alpha u^2 d\sigma dt\right),$$

pour tous les $\eta \in [0,1]$ assez petit. Cela prouve (3.27) en prenant $2\eta = \varepsilon$. □

Lemme 3.2.8. *Soit u une solution forte du problème (2.1). Alors il existe une constante positive telle que $T > 0$ et $\varepsilon \in]0,1[$, on a*

$$\int_0^T \int_{\Gamma_N^2} \alpha u^2 d\sigma dt \leq \frac{C}{\varepsilon} E(0) + \varepsilon \int_0^T E(t)dt. \tag{3.28}$$

Démonstration.

On procède comme dans [15] mais ici en tenant compte de la présence des fissures. Pour tout $t > 0$, nous considérons $z = z(t) \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} \Delta z = 0 \text{ dans } \Omega \\ z = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_N^1, \\ z = u \qquad \text{sur } \Gamma_N^2. \end{cases} \tag{3.29}$$

Ceci est équivalente à $z = \omega + u$ où $\omega \in V = \{w \in H^1(\Omega) : w = 0 \text{ sur } \Gamma_D \cup \Gamma_N^2\}$ solution de

$$\int_\Omega \nabla\omega.\nabla w dx = -\int_\Omega \nabla u.\nabla w dx, \qquad \forall w \in V.$$

Cette identité est équivalente à

$$\int_\Omega \nabla z.\nabla w dx = 0 \qquad \forall w \in V. \tag{3.30}$$

En prenant $w = z - u$, nous trouvons en particulier

$$\int_\Omega \nabla z.\nabla(z-u)dx = 0.$$

En développant l' identité ci-dessus, elle est aussi équivalente à

$$\int_\Omega \nabla z.\nabla w dx = \int_\Omega \nabla z.\nabla z dx \geq 0. \tag{3.31}$$

Montrons maintenant que z satisfait également

$$\int_\Omega f.z dx = -\int_\Gamma z\frac{\partial v_f}{\partial \nu}d\Gamma,\ \forall f \in L^2(\Omega), \tag{3.32}$$

où $v_f \in V$ est l'unique solution de

$$\int_\Omega \nabla v_f.\nabla w dx = \int_\Omega f w dx, \qquad \forall w \in V.$$

En effet de (3.30) nous pouvons écrire

$$\int_\Omega \nabla v_f.\nabla z dx = 0.$$

Comme z est solution de (3.29) avec $u(t) \in D(\Delta)$ et v_f appartient à $D(\Delta_{Dir})$, en multipliant (3.29) par v_f puis par la formule de Green, nous déduisons que

$$-\int_\Omega \nabla v_f z dx + \int_\Gamma z\frac{\partial v_f}{\partial \nu}d\Gamma = 0.$$

Cela prouve l'identité (3.32) puisque $\Delta v_f = -f$.

En prenant donc $f = z$ dans l'identité (3.32), on peut écrire

$$\int_\Omega |z|^2 dx = -\int_\Gamma z\frac{\partial v_f}{\partial \nu}d\Gamma = -\int_{\Gamma_N^2} u\frac{\partial v_f}{\partial \nu}d\Gamma,$$

puisque $z = u$ sur Γ_N^2, $\frac{\partial v_z}{\partial \nu} = 0$ sur Γ_N^1et $z = 0$ sur Γ_D. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\int_\Omega |z|^2 dx \leq \Big(\int_{\Gamma_N^2} |u|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\Gamma_N^2} \Big|\frac{\partial v_f}{\partial \nu}\Big|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Ce qui donne

$$\int_\Omega |z|^2 dx \leq \|u\|_{L^2(\Gamma_N^2)}\Big\|\frac{\partial v_z}{\partial \nu}\Big\|_{L^2(\Gamma_N^2)}. \tag{3.33}$$

Par le Lemme 3.0.4 nous avons pour tout $\alpha > 0$ assez petit

$$\|v_{zR}\|_{W^{2,p}}(\Omega) \leq K\|z\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.34}$$

pour une certaine constante positive K quand $p = \frac{4}{3} + \alpha^*$. Le (3.34), le théorème de trace standard et l'interpolation $W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma_N^2) \hookrightarrow L^2(\Gamma_N^2)$ permettent d'écrire

$$\Big\|\frac{\partial v_z}{\partial \nu}\Big\|_{L^2(\Gamma_N^2)} = \Big\|\frac{\partial v_{zR}}{\partial \nu}\Big\|_{L^2(\Gamma_N^2)} \leq K_1\|z\|_L^2(\Gamma),$$

pour une certaine constante positive K_1. En insérant cette estimation dans (3.33) nous arrivons à

$$\int_\Omega |z|^2 dx \leq C_0 \int_{\Gamma_N^2} |u|^2 d\Gamma,$$

où C_0 est une constante positive. Puisque z' est une solution du problème (3.29) avec u' à la place de u. Par conséquent

$$\int_\Omega |z'|^2 dx \leq C_0 \int_{\Gamma_N^2} |u'|^2 d\Gamma.$$

En multipliant la première identité de (2.1) par z et en intégrant sur $\Omega \times [0,T]$, on a

$$\int_{\Omega\times[0,T]} z(u'' - \Delta u + au')dxdt = 0.$$

En appliquant la formule de Green (permise par le Corollaire 3.0.9) et en tenant compte des conditions aux limites dans (2.1), on obtient

$$\int_{\Omega\times[0,T]} (zu'' + \nabla z.\nabla u + au'z)dxdt + \int_{\Gamma_N^2\times[0,T]} (\alpha u + bu')ud\sigma dt = 0.$$

En intégrant par parties par rapport à, on a

$$\int_{\Omega\times[0,T]} zu''dxdt = \int_\Omega zu'dx|_0^T + \int_{\Omega\times[0,T]} z'u'dxdt.$$

Alors

$$\int_{\Omega\times[0,T]} (-z'u' + \nabla z.\nabla u + au'z)dxdt + \int_{\Gamma_N^2\times[0,T]} (\alpha u + bu')ud\sigma dt + \int_\Omega zu'dx|_0^T = 0.$$

Et en utilisant (3.31), on obtient

$$\int_{\Gamma_N^2\times[0,T]} \alpha|u|^2 d\sigma dt \leq -\int_{\Gamma_N^2\times[0,T]} buu'd\sigma dt + \int_{\Gamma_N^2\times[0,T]} z'u'dxdt - \int_{\Omega\times[0,T]} au'zdxdt - \int_\Omega zu'dx\Big|_0^T$$

Transformons maintenant chaque terme de l'inégalité précédente en utilisant l'inégalité de Young.

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_N^2\times[0,T]} buu'd\sigma dt &\leq b\frac{1}{4\varepsilon}\int_{\Gamma_N^2\times[0,T]} u'^2 d\sigma dt + \varepsilon b\int_{\Gamma_N^2\times[0,T]} u^2 d\sigma dt \\
&\leq \frac{1}{4\varepsilon}\int_{\Gamma_N^2\times[0,T]} bu'^2 d\sigma dt + \varepsilon\|b\|\int_{\Gamma_N^2\times[0,T]} u^2 d\sigma dt, \\
&\leq \frac{1}{4\varepsilon}E(0) + C\varepsilon\int_0^T E(t)dt.
\end{aligned}$$

$$\int\limits_{\Gamma_N^2\times[0,T]} z'u'dxdt \leq \varepsilon \int\limits_{\Omega\times[0,T]} |z'|^2dxdt + \frac{1}{4\varepsilon}\int\limits_{\Omega\times[0,T]} |u'|^2dxdt$$
$$\leq \varepsilon C_0 \int\limits_{\Gamma_N^2\times[0,T]} |u'|^2d\sigma dt + \frac{1}{4\varepsilon}\int\limits_{\Omega\times[0,T]} |u'|^2dxdt$$
$$\leq \varepsilon C_0 E(0) + \varepsilon \int\limits_0^T E(t)dt.$$

$$\int\limits_{\Omega\times[0,T]} au'zdxdt \leq \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{\Omega\times[0,T]} a|u'|^2dxdt + \varepsilon \int\limits_{\Omega\times[0,T]} z^2dxdt,$$
$$\leq \frac{\|a\|_\infty}{4\varepsilon}\int\limits_{\Omega\times[0,T]} a|u'|^2dxdt + \varepsilon \int\limits_{\Omega\times[0,T]} z^2dxdt,$$
$$\leq C\Big(\frac{1}{\varepsilon}E(0) + \varepsilon\int\limits_0^T E(t)dt.\Big).$$

$$-\int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}zdt|_0^T = -\int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(T)z(T)dx + \int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(0)z(0)dx,$$
$$\leq \frac{1}{4\varepsilon}\int\limits_\Omega u_t^2(T)dx + \varepsilon\int\limits_\Omega z^2(T)dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int\limits_\Omega u_t^2(0)dx + \varepsilon\int\limits_\Omega z^2(0)dx,$$
$$\leq CE(0).$$

Ces différentes estimations permettent d'écrire

$$\int\limits_{\Gamma_N^2\times[0,T]} buu'd\sigma dt \leq C\Big(\frac{1}{\varepsilon}E(0) + \varepsilon\int\limits_0^T E(t)dt\Big) + \frac{1}{4\varepsilon}E(0) + C\varepsilon\int\limits_0^T E(t)dt$$
$$+ \varepsilon C_0E(0) + \varepsilon\int\limits_0^T E(t)dt + CE(0),$$
$$\leq \frac{C}{\varepsilon}E(0) + \varepsilon\int\limits_0^T E(t)dt.$$

Ce qui s'achève la démonstration. □

Remarque 3.2.9.

le Lemme 4.0.19 n'est nécessaire que si α n'est pas uniformément borné dans $O' \cap \Gamma_N^2$, mais selon notre hypothèse, cela pourrait se produire par exemple dans le cas lorsque $int\Gamma \neq 0$.

Pour la suite de la démonstration du Théorème 4.0.10, par le Lemme 4.0.16 et le

Lemme 4.0.20, on obtient

$$\begin{aligned} I_2 &= I_2(\Gamma_N^2) + I_2(\Gamma_D) + I_2(\Gamma_N^1) \\ &\leq I_2(\Gamma_N^2) \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon} E(0) + \varepsilon \int_0^T E(t)dt, \end{aligned}$$

en rappelant que

$$I_2(\Gamma_D) \leq 0 \text{ et } I_2(\Gamma_N^1) = 0.$$

En faisant quelques transformations, I_1 devient

$$\begin{aligned} I_1 =& 2\int_0^T \int_\Omega \Big[|\nabla u|^2 - \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2\Big] \sum_{j=1}^n (S_j - x_0).\nabla \eta_j dxdt \\ &- 2\int_0^T \int_\Omega (x_k - x_{0k}) \sum_{j=1}^n \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dxdt \\ &- 2\int_0^T \int_\Omega \sum_{j=1}^n (x_k - S_{jk}) \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dxdt - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \widetilde{M}(u) dx|_0^T \\ &- \int_0^T \int_\Omega a \frac{\partial u}{\partial t} \widetilde{M} dxdt. \end{aligned}$$

On a

$$2\int_0^T \int_\Omega \Big[|\nabla u|^2 - \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2\Big] \sum_{j=1}^n (S_j - x_0).\nabla \eta_j dxdt \leqslant C \int_0^T \int_\Omega \Big[|\nabla u|^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2\Big] dxdt,$$

avec C une constante positive.

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \widetilde{M}(u) dx|_0^T &= -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(T) \widetilde{M}(u)(T) dx + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(0) \widetilde{M}(u)(0) dx, \\ &\leqslant \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Omega u_t^2(T) dx + \varepsilon \int_\Omega \widetilde{M}^2(u)(T) dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Omega u_t^2(0) dx + \varepsilon \int_\Omega \widetilde{M}^2(u)(0) dx \\ &\leqslant CE(0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_\Omega a \frac{\partial u}{\partial t} \widetilde{M} dx &\leqslant \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T \int_\Omega a \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 dxdt + \varepsilon \int_0^T \int_\Omega \widetilde{M}^2(u) dxdt, \\ &\leqslant \frac{C}{\varepsilon} \int_0^T \int_\Omega a \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 dxdt + \varepsilon \int_0^T \int_\Omega E(t) dt. \end{aligned}$$

$$-2\int_0^T\int_\Omega (x_k-x_{0k})\sum_{j=1}^n \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}dxdt \leqslant \int_0^T\sum_{j=1}^n\Big[\frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega (x_k-x_{0k})^2\Big(\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)^2 dxdt$$
$$+\varepsilon\int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)^2\Big(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i}\Big)^2 dxdt\Big],$$
$$\leqslant \frac{C_1}{4\varepsilon}\int_0^T\int_\Omega |\nabla u_k|^2 dxdt + C_2\varepsilon\int_0^T\int_\Omega |\nabla u_i|^2 dxdt.$$

En remplaçant $\widetilde{M}(u)$ par son expression, on a

$$\int_0^T\int_\Omega a\frac{\partial u}{\partial t}\widetilde{M}dxdt = \int_0^T\int_\Omega 2a\frac{\partial u}{\partial t}\sum_{j=1}^n(x-S_j).\nabla u dxdt + \int_0^T\int_\Omega 2a\frac{\partial u}{\partial t}\widetilde{m}.\nabla u dxdt + \int_0^T\int_\Omega a\frac{\partial u}{\partial t}u dxdt.$$

En appliquant l'inégalité de Young, on obtient

$$I_1 \leq \int_0^T\int_O \Big(\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2+|\nabla u|^2\Big)dxdt + \frac{C}{\varepsilon}\int_0^T\int_\Omega a(x)\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 dxdt + \varepsilon\int_0^T\int_\Omega u^2 dxdt + CE(0)$$
$$\leq \int_0^T\int_O \Big(\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2+|\nabla u|^2\Big)dxdt + \frac{C}{\varepsilon}E(0) + \varepsilon\int_0^T E(t)dt.$$

D'après le Lemme 4.0.13, nous savons que

$$2\int_0^T E(t)dt = I_1 + I_2.$$

On peut alors écrire

$$2\int_0^T E(t)dt \leq I_1 + I_2,$$
$$\leqslant \int_0^T\int_O \Big(\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2+|\nabla u|^2\Big)dxdt + \frac{C}{\varepsilon}E(0) + \varepsilon\int_0^T E(t)dt +$$
$$\frac{C}{\varepsilon}E(0) + \varepsilon\int_0^T E(t)dt + \frac{C}{\varepsilon}E(0) + \varepsilon\int_0^T E(t)dt.$$

Par conséquent à partir du Lemme 4.0.13, le Lemme 4.0.18 et le Lemme 4.0.19, nous obtenons qu'il existe une constante $C>0$ telle qu'on obtient l'estimation suivante

$$2\int_0^T E(t)dt \leq \frac{C}{\varepsilon^5}E(0) + \varepsilon\int_0^T E(t)dt,$$

pour tout ε assez petit. En choisissant $\varepsilon < 2$, on obtient

$$\int_0^T E(t)dt \leq C_1 E(0),$$

où C_1 est une constante positive indépendant de T. Puisque notre système est invariant par translation. Nous obtenons pour tout $S \geq 0$,

$$\int_S^{S+T} E(t)dt \leq C_1 E(0).$$

En laissant tendre T à l'infini nous avons montré que l'énergie de notre système satisfait (3.3). Par conséquent, le Lemme 4.0.12 nous permet de conclure la stabilité exponentielle du problème (2.1).

Ce chapitre est le lieu où nous avons étudié la stabilité exponentielle de l'énergie E du problème à étudier. Pour cette étude nous a permet de donner la preuve du résultat principal. c'est également le dernier chapitre de ce mémoire.

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, il est question de la stabilisation de l'équation des ondes dans un domaine polygonal avec des fissures étudiée par Bayili Gilbert et Nicaise Serge dans [5]. Pour notre part, après une introduction générale pour contextualiser la problématique, nous avons présenté les généralités nécessaires à la compréhension du sujet. Nous avons ensuite formulé le problème en posant des bases solides pour son étude.
La section sur le résultat de stabilité nous a permis de démontrer la stabilité exponentielle de l'énergie E du problème. Cette analyse a été approfondie par la présentation du résultat principal, accompagné de sa preuve détaillée.

Comme perspective à ce travail, nous allons nous intéresser à l'étude numérique du problème (2.1) par des expériences en laboratoire ou sur le terrain, avec pour objectif de confirmer leur application dans des situations réelles.

Bibliographie

[1] R. Adams. : Sobolev Spaces. Academic Press, New York (1994)

[2] R. A. Adams and J. J. F. Fournier : Sobolev spaces, volume 140 of Pure Appl. Math., Academic Press. New York, NY : Academic Press, 2nd ed. edition, 2003.

[3] N. Aissa., D.Hamroun. :Stabilization of a wave-wave system.Portugaliae Mathematica.Vol.61 Fasc.2-2004.

[4] Grégoire Allaire. Conception optimale de structures, volume 58 of Math. Appl. (Berl.). Berlin : Springer, 2007.

[5] G. Bayili and S. Nicaise. Stabilization of the wave equation in a polygonal domain with cracks. Revista matemática complutense, 27 :259-289, 2014.

[6] H.Brézis : Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Paris : Masson, 1994.

[7] R. Brossard.,J.P Lohéac. : Stabilisation frontière du système élastodynamique dans un polygone plan. C.R.Acad.Sci.Paris, Série I.338, 213-218 (2004)

[8] R. Brossard., J-L. ohéac,. : Boundary stabilization of elastodynamic systems, II. The case of a linear feedback. J. Dyn. Control Syst. 16, 355-375 (2010)

[9] P-.R. Cornilleau., J.P. Lohéac., A. Osses : Nonlinear Neumann boundary stabilization of the wave equation using rotated multipliers. J. Dyn.Control Syst. 16, 163-188 (2010)

[10] P. Grisvard. : Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes en présence de singularités. J. Math. Pures Appl. 68, 215-259 (1989)

[11] P. Grisvard. : Contrôlabilité exacte avec des conditions mêlées. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I(305), 363-366 (1987)

[12] P. Grisvard. : Contrôlabilité exacte dans les polygones et polyèdres.C.R.Acad.Sci.Paris, Ser I(305), 367-370 (1987)

[13] P. Grisvard,. : Singularities in Boundary Value Problems, RMA 22. Springer, Berlin (1992)

[14] P. Grispard. : Elleptic problem in non smooth domains. In : Monograph Studies in Mathematics, vol.24.Pitman, London (1985)

[15] V. Komornik,. F. Alabau. :Boundary observability, contallability, and stabilization of linear elastodynamic systems.SIAM J. CONTROL OPTIM. Society for Industrial and Applied Mathematics Vol. 37, No. 2, pp. 521-542 (1998).

[16] N. Laanaia : Controlabilité exacte de l'équation des ondes dans un domaine mince à frontière ondulée.Portugaliae Mathematica. Vol. 57 Fasc. 4 2000

[17] K. Liu. :Locally distributed control and damping for the conservatives systems. SIAMJ.Contol Optim.35, 1574-1590 (1997)

[18] P. Martinez. : Boundary stabilization of the wave equation in almost star-shaped domain. SIAMJ.Control Optim.37, 673-694 (1999)

[19] M. Moussaoui : Singularités des solutions du problème mêlé, contolabilité exacte et stabilisation frontière.ESAIM Proc.2, 195-201 (1997)

[20] M.T. Niane., O. Seck,. : Contrôlabilité exacte frontìere de l'équation des ondes en présence de fissures par adjonction de contrôles internes au voisinage des sommets de fissures. C. R Acad. Sci. Paris Ser. I(316), 695-700 (1993)

[21] S. Nicaise. : Boundary exact controlability of interface problems with singularities II : Addition of internal controls. SIAM J. Control Optim. 35, 585-603 (1997)

[22] A. Pazy. : Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differentiel Equations, New York, NY :Pringer-verlag, 1983

[23] I. I. Vrabie. : Compactness methods for nonlinear evolutions., volume 75 of Pitman Monogr. Surv. Pure Appl. Math. Harlow, Essex : Longman Group ; New York, NY : Wiley and Sons, 2nd ed. edition, 1995.

[24] Ioan I. Vrabie. : C_0-semigroups and applications, volume 191 of North-Holland Math. Stud. Amsterdam : North-Holland, 2003.

[25] C. Seck., G. Bayili., A. Séne., M-T. Niane. : Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes dans des espaces de Sobolev non réguliers pour un ouvert polygonal. Afrika Mathematika, 23(1), 2012 p 1-9

[26] E. Zuazua. : Exponential decay for the semilinear wave equation with localized damping in unbounded domain.J.Math, pures et appl.70, 1991, p.513 à 529