UNIVERSITÉ NORBERT ZONGO
* * * * *
UNITÉ DE FORMATION ET DE RECHERCHE
EN SCIENCES ET TECHNOLOGIES
* * * * *
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER DE MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES ET APPLICATIONS

Option : **Mathématiques Fondamentales**

Spécialité : **Équations aux Dérivées Partielles**

Thème :
Sur les classes d'équations de diffusion quasi-linéaire bien posées dans l'espace entier.

présenté par :
ROAMBA Mahamadi

Sous la direction de :
Dr Arouna OUÉDRAOGO
Maître de Conférences en
Mathématiques Appliquées
Université Norbert ZONGO

Sous la co-direction de :
Dr Mohamed KARIMOU GAZIBO
Maître Assistant en
Mathématiques Appliquées
Université Abdou Moumouni de Niamey

Soutenu publiquement le 29 février 2024 devant le jury composé de :

Président: Dr Kounhinir SOMÉ, Maître de Conférences en Mathématiques Appliquées à l'Université Norbert ZONGO.

Membres:

Dr Ibrahime KONATÉ, Maître assistant en Mathématiques Appliquées à l'Université Thomas SANKARA (Examinateur).

Dr Mohamed KARIMOU GAZIBO, Maître assistant en Mathématiques Appliquées à l'Université Abdou Moumouni de Niamey (Co-encadreur).

Dr Arouna OUÉDRAOGO, Maître de Conférences en Mathématiques Appliquées à l'Université Norbert ZONGO (Encadreur).

Année académique 2022-2023.

Remerciements.

Je formule mes premiers remerciements à mon directeur de mémoire, Dr Arouna OUÉDRAOGO qui a accepté superviser mon travail. Je suis enthousiaste de l'avoir comme enseignant depuis le début de mon cursus universitaire. Ça sera un grand plaisir pour moi de pouvoir poursuivre ma marche sous ses auspices. Longue à vie à vous.

Merci grandement.

Mes remerciements convergent maintenant vers mon co-directeur Dr Mohamed KARIMOU GAZIBO qui, de loin à piloter ce travail. Merci beaucoup pour votre bienveillance et vos encouragements dont j'ai bénéficiés. Merci beaucoup pour la patience.

Longue vie à vous et du meilleur au peuple frère du Niger.

Je remercie ici Dr Kounhinir SOMÉ, Maître de Conférences en Mathématiques Appliquées à l'Université Norbert ZONGO qui m'a beaucoup inspiré et soutenu dans mon trajet. Merci d'avoir accepté présider le jury. Longue vie à vous.

Grand merci.

Je suis reconnaissant envers Dr Arouna OUÉDRAOGO, Dr Ibrahime KONATÉ et Dr Mohamed KARIMOU GAZIBO qui ont accepté d'être membres du jury. Merci infiniment.

À tout le personnel de l'UFR/ST de l'Université Norbert ZONGO je vous dis merci.

Je remercie enfin mes parents, mes frères et sœurs, mes amis et connaissances qui me portent dans leur prière. Longue vie à tous.

Merci, merci.

Dédicaces.

À mes parents.

Notations.

$\mathbb{N}$: Ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.

p.p : presque partout.

resp. : respectivement.

const : constante.

$f * g$: produit de convolution.

ρ_n : suite régularisante.

EDP : Équations aux Dérivées Partielles.

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$: ouvert de $\mathbb{R}^N,\ N \in \mathbb{N}^*$.

$C_c(\Omega)$: espace des fonctions continues à support compact dans Ω.

$C^k(\Omega)$: espace des fonctions k fois continûment différentiables sur $\Omega(k \geq 0)$.

$C^\infty(\Omega) = \underset{k\geq 0}{\cap} C^k(\Omega)$.

$C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$.

$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$.

$\mathcal{D}(\Omega)$: espace des fonctions-test.

$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$.

$\mathcal{D}'(\Omega)$: ensemble des distributions sur Ω.

$\text{Supp}\, f = \overline{\{f \in \Omega, f(x) \neq 0\}}$.

$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right) = \text{grad} u$.

$D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}.\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_N^{\alpha_N}} u \qquad$ où $\quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i.$

$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ = Laplacien de u.

$[x, y]$: segment de droite d'extrémités x et y.

$\mathrm{d}x$: Mesure de Lebesgue.

$L^p(\Omega) = \left\{ u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}x < \infty \right\}, \ 1 \le p < \infty.$

$L^\infty(\Omega) = \{ u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et il existe } C \text{ tel que } |u(x)| \le C \text{ p.p } x \in \Omega \}.$

$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ u : u \in L^1(K) \text{ pour tout compact K de } \Omega \right\}.$

$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \nabla u \in (L^p(\Omega))^N \right\}$: espace de Sobolev.

$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$: espace de Sobolev.

$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^N, \ |\alpha| \le m \}$ pour tout

$1 \le p \le \infty$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 1$; muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \left(\sum_{\alpha : |\alpha| \le m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}$$

$W^{m,p}(\Omega)$: espace de Sobolev.

$W_0^{1,p}(\Omega)$: la fermeture de $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. On note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Résumé.

Nous explicitons dans ce mémoire, l'article de Boris Andreianov et Mohamed Maliki [1] sur les classes d'équations de diffusion quasi-linéaire bien posées dans l'espace entier. Dans cet article [1], il est question de problèmes elliptiques dégénérés dans $\mathbb{R}^N$ sous la forme $u = \Delta\varphi(x,u) + f(x)$, avec localement en u des non-linéarités uniformément continues. Bien que notre intérêt se porte particulièrement sur le cadre L^∞, nous portons également un regard sur les solutions dans L^1_{loc} et dans les espaces L^1 pondérés. Par ailleurs nous donnons quelques conditions suffisantes pour que les propriétés d'unicité et de comparaison soient valables pour les solutions associées ; ces conditions sont exprimées en terme de module de continuité de $u \mapsto \varphi(x,u)$. Sous des restrictions supplémentaires sur la dépendance de φ sur x, on en déduit les résultats d'existence pour les classes de solutions et de données correspondantes. En particulier il s'agit pour nous de montrer que pour une non-linéarité générale continue croissante au sens large $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, l'espace L^∞ muni de la topologie de L^1_{loc} est une classe bien posée pour le problème $u = \Delta\varphi(u) + f(x)$.

Mots clés : équation elliptique quasi-linéaire, équation stationnaire, solutions L^∞, Inégalité de Kato, condition de Keller-Osserman, unicité, bien-posé.

Abstract.

We make explicit in this memory the article by Boris Andreianov and Mohamed Maliki on classes of well-posedness for quasilinear diffusion equations in the whole space [1]. In this article [1] it's about degenerate elliptic problems in $\mathbb{R}^N$ under the form $u = \Delta\varphi(x,u) + f(x)$, with locally in u uniformly continuous nonlinearities. Although our interest is particularly in the L^∞ framework, we also look at solutions in L^1_{loc} and in L^1 spaces weighted. Furthermore we give some sufficient conditions for the properties of uniqueness and comparison to be valid for the associated solutions ; these conditions are expressed in terms of the moduli of continuity of $u \mapsto \varphi(x,u)$. Under additional restrictions on the dependency of φ on x, we deduce the existence results for the corresponding classes of solutions and data. In particular, it is for us to show that for a non-decreasing continuous general non-linearity $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, the space L^∞ endowed with the L^1_{loc} topology is a well-posedness class for the problem $u = \Delta\varphi(u) + f(x)$.

Key words : Quasilinear elliptic equation, stationary equation, L^∞ solutions, Kato inequality, Keller-Osserman condition, uniqueness, well-posedness.

Table des matières

Notations **iv**

Résumé **v**

Introduction **1**

1 Notions préliminaires **3**
1.1 Notions d'Équations aux Dérivées Partielles 3
1.1.1 Définitions 3
1.1.2 Classification des EDP 4
1.2 Quelques rappels sur les espaces fonctionnels 5
1.2.1 Espaces de Lebesgue 5
1.2.2 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$. 8
1.3 Inégalité de Poincaré. 9
1.4 Notions d'opérateurs différentiels 9
1.5 Topologie 10
1.6 Module de continuité 12
1.7 Notations de base. 13
1.8 Solutions très faibles et inégalités de Kato. 14
1.9 Hypothèses sur φ et définitions. 15

2 Résultats de comparaison. **18**
2.1 Comparaison de L^1_{loc} solutions. 18
2.2 Comparaison dans les espaces L^1 pondérés. 20
2.3 Résultat de dépendance continue. 23

3 Résultats d'existence. **25**
3.1 Un résultat d'existence "de base" 25
3.2 Résultats bien posés dans $L^1\big(\mathbb{R}^N, e^{-c|x|}\big)$. 28
3.3 Résultats bien posés dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. 29
3.4 Résultats bien posés dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. 30

4 Unicité de solution. **33**
4.1 La propriété de contraction et de comparaison. 33
4.2 Résultats bien posés dans $L^1(\mathbb{R}^N, \rho)$ pour les solutions L^∞. 37

Conclusion **39**

Bibliographie **40**

Introduction

Les équations aux dérivées partielles (EDP) ont vu le jour après les travaux de Leibniz et Newton sur les infinitésimaux au début du 18ème siècle ; c'est Euler qui formula en 1757 le premier système d'EDP (dites équations d'Euler) pour décrire le mouvement d'un fluide incompressible. Les EDP peuvent être linéaires, c'est le cas de l'équation de la chaleur classique par exemple, ou non linéaires, comme les équations d'Euler ou Navier-Stokes qui décrivent le mouvement d'un fluide. Plusieurs exemples de problèmes non linéaires sont étudiés, avec des outils récents permettant de montrer l'existence et éventuellement l'unicité de la solution. Les EDP interviennent dans de nombreux modèles de physique, d'ingénierie ou de biologie, comme la propagation de la chaleur ou du son, l'écoulement des fluides, l'électrodynamique, la propagation des épidémies.

L'équation de diffusion non linéaire est une équation mathématique utilisée pour modéliser la propagation de phénomènes tels que la chaleur, la diffusion des particules ou la propagation des ondes. Dans le but d'approfondir l'étude [5] de l'unicité des solutions d'entropie aux EDP paraboliques-hyperboliques de convection-diffusion $u_t + \mathrm{div}F(u) - \Delta\varphi(u) = 0$ avec des non-linéarités non-lipschitziennes (cf[23, 43]; voir aussi [7, 10, 21, 22] pour les motivations sous-jacentes dans le cas hyperbolique pur), nous revisitons dans ce mémoire les travaux de Boris Andreianov et Mohamed Maliki sur l'analyse du caractère bien posé des solutions simplement bornées dans tout l'espace pour les équations de diffusion dégénérées $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$ du genre milieu poreux généralisé/diffusion rapide. Dans cet article, nous étudions en détail le cas stationnaire, c'est-à-dire les problèmes elliptiques du genre

$$u = \Delta\varphi(x,u) + f(x) \text{ dans } \mathbb{R}^N \tag{1}$$

Notre but principal est le principe de comparaison des solutions (le principe de comparaison implique l'unicité). Notre hypothèse principale est la continuité localement uniforme en u de la non-linéarité φ. Le principe de comparaison est notre outil principal afin de déduire l'existence de solutions et leur dépendance sur les données suivant les travaux de [4, 6] et en utilisant des résultats classiques comme dans le cadre $L^1(\mathbb{R}^N)$ ([44]).

En outre φ doit être du type Carathéodory, croissante au sens large en u.

En fait, au lieu de travailler avec des solutions L^∞ pures, nous étendons notre investigation aux solutions dans L^1_{loc} ou dans des espaces L^1 pondérés. Il est à noter que les estimations pondérées de la contraction (unicité) ont été une tendance dans les recherches récentes sur les équations de convection-diffusion, voir Endal et Jakobsen [15], Alibaud, Endal et Jakobsen [41].

Sur le cas stationnaire notons que Bénilan, Brézis et Crandall ont étudié minitieusement le problème sous la forme $\beta(w)_t - \Delta w \ni 0$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ (cf [44]). Une information supplémentaire qui a rapport à $L^1(\mathbb{R}^N, \rho)$ mise avec

$$\rho(x) = (1 + |x|^2)^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq (N-2)/2$$

est donnée dans la référence [9]. En revanche ces résultats ne couvrent pas le cas des solutions $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ générales, bien qu'ils s'en approchent assez. Ensuite, l'unicité des solutions distributionnelles de L^1_{loc} (qui couvre notre paramètre cible $L^\infty(\mathbb{R}^N)$) à l'équation $u = \Delta\varphi(u) + f$ pour $\varphi(z) = |z|^{m-1} z$, $0 < m < 1$ a été montrée par Brézis dans [13]. La même année, des résultats similaires ont été obtenus par Bokalo [12] pour le problème d'évolution associé sur $\mathbb{R} \times D$, $D \subset \mathbb{R}^N$ sans conditions à $t = \pm\infty$. Le résultat d'existence dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ est coontenu aussi dans [13], basé sur la localisation inhabituelle propriété de Baras et Pierre [8]. Les résultats de Brézis ont été généralisés par Gallouët et Morel [17] à une non-linéarité croissante arbitraire φ qui est concave sur $\mathbb{R}^+$, impaire et satisfait la condition de Keller-Osserman

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\int_0^z \varphi^{-1}(s)\mathrm{d}s}} < +\infty$$

(voir Keller [20], Osserman [42]). Cette condition garantit que la diffusion est si rapide (pour de grandes valeurs de u) que l'exigence qu'une solution soit définie globalement sur $\mathbb{R}^N$ devient une restriction stricte ; par exemple, la seule solution globalement définie de $u = \Delta(|u|^{m-1} u)$, $0 < m < 1$, est identiquement nulle.

Notre travail exploite largement les références [9, 13, 17].

Pour ce faire nous faisons un bref rappel d'éléments d'analyse mathématique qui servira d'outils de base pour la suite de notre travail. Cela constitue notre premier chapitre. Au deuxième chapitre nous donnons deux types de résultats de comparaison pour les solutions du problème (1). Ensuite le troisième chapitre complète les résultats d'unicité et de comparaison précédents avec les résultats d'existence correspondants. À partir de l'idée avancée dans [4], nous construisons des séquences monotones de solutions approchées, et utilisons des estimations ad hoc pour contrôler leur limite ponctuelle. Enfin le quatrième chapitre fournit les résultats d'unicité, de contraction et de comparaison pour le problème (1) dans les espaces pondérés $L^1(\mathbb{R}^N, \rho)$, avec $N \geq 3$ et des poids $\rho(x)$ satisfaisant $-\Delta\rho \geq 0$.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre nous faisons une présentation succinte d'éléments d'analyse mathématique puis donnons des outils utilisés dans ce document utiles dans la suite de notre travail.

1.1 Notions d'Équations aux Dérivées Partielles

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *et* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$*, une équation aux dérivées partielles (EDP) d'inconnue la fonction* u *est une relation entre* $u = u(x_1, x_2, x_3, ..., x_N)$ *et un nombre fini de dérivées partielles. Une EDP est sous la forme* :

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_N, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}, \cdots, \partial x_N^{k_N}}\right) = 0. \quad (1.1)$$

où $k_1, k_2, k_3, ..., k_N$ sont des entiers positifs tels que $k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_N = m$.

Résoudre une EDP dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$m c'est trouver une fonction suffisamment différentiable dans Ω telle que (1.1) soit satisfaîte dans Ω.

L'ordre $m \in \mathbb{N}$ d'une équation aux dérivées partielles est celui de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé.

Exemples :

1. $\Delta u = 0$ équation de Laplace.
2. $\Delta u - f = 0$ équation de Poisson.
3. $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ équation de la chaleur, difffusion homogène.
4. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ équation des ondes.
5. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + u = 0$ équation des télégraphistes.
6. $i\Psi_t + \Delta\Psi = V\Psi$ équation de Schrödinger.

Une équation aux dérivées partielles est quasi-linéaire si elle est linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé de la fonction u.

Définition 1.1.2. *On dit qu'une équation aux dérivées partielles du second ordre est quasi-linéaire si elle est de la forme :*

$$a\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$
$$+ c\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + F\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

où a, b, c et F sont des fonctions définies dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

1.1.2 Classification des EDP

On distingue trois grandes catégories d'équations aux dérivées partielles :

1. Les équations de type elliptique ;
2. Les équations de type parabolique ;
3. Les équations de type hyperbolique.

Considérons l'équation du second ordre suivante :

$$\boldsymbol{a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = g.} \tag{1.2}$$

L'équation (1.2) est dite :

— **elliptique** si $\boldsymbol{b^2 - 4ac < 0}$;
— **parabolique** si $\boldsymbol{b^2 - 4ac = 0}$;
— **hyperbolique** si $\boldsymbol{b^2 - 4ac > 0}$.

Exemples d'équations aux dérivées partielles selon la catégorie.

— L'équation de type elliptique est donnée par l'équation de Poisson

$$\Delta u(x) = \sum_1^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = f(x),$$

pour tout $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ où $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée. L'inconnue est la fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

— L'équation de type parabolique est donnée par l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \Delta T(x,t) = 0,$$

pour tout $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $t > 0$. L'inconnue est la fonction $T : \Omega \times]0; +\infty[\to \mathbb{R}$.

— Les équations de type hyperbolique sont données par

- l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

pour tout $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $t > 0$ où $a \in \mathbb{R}$ est donné,

- l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

pour tout $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ et tout $t > 0$.

1.2 Quelques rappels sur les espaces fonctionnels

1.2.1 Espaces de Lebesgue

• **Espaces de Lesbesgue classiques**

Soient $N \geq 1$, un entier naturel et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}x$.

Définition 1.2.1. .

i) *Pour $1 \leq p < +\infty$, on désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace de Lebesgue défini par :*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable}\,; \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

On le munit de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

ii) *Pour $p = \infty$, on définit*

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable } ; \exists\, C \geq 0 \ ; |f(x)| \leq C \text{ p.p } x \in \Omega \right\}.$$

munit de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup \operatorname{ess}_{x\in\Omega} |f(x)| = \inf \Big\{ C > 0\,;\ |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \Big\}.$$

On désigne par L^1_{loc} l'ensemble des fonctions localement intégrables sur Ω, i.e

$$L^1_{loc}(\Omega) = \Big\{ u : u \in L^1(K) \text{ pour tout compact K de } \Omega \Big\}.$$

Remarque 1.2.1. $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 1.2.1. (**Inégalité de Hölder**)
Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$.
Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et $\displaystyle\int_\Omega |(fg)(x)|\, dx \leq \|f\|_p \, \|g\|_{p'}$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Théorème 1.2.2. (**de convergence monotone**)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives sur Ω. On suppose que, pour tout $x \in \Omega$ la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit f la fonction définie par

$$f \begin{cases} X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \\ x \longmapsto \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x). \end{cases}$$

Alors on a, au sens des égalités de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n dx = \int_\Omega f dx.$$

Définition 1.2.2. (**Convergence presque partout**)
Soient (E, T, m) un espace mesuré, F un ensemble, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E dans F et f une fonction de E dans F ($F = \mathbb{R}$ ou $F = \mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$, par exemple). On dit que que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers f, s'il existe une partie A de E négligeable telle que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in E \setminus A$. On note $f_n \longrightarrow f$ p.p.

Définition 1.2.3. (**Convergence en mesure**)
Soient (E, T, m) un espace mesuré, F un ensemble ($F = \mathbb{R}$ ou $F = \mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$, par exemple); $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables et f une fonction mesurable ; on dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f si :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} m(\{x \in E; |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

On notera alors $f_n \longrightarrow_{mesure} f$.

Définition 1.2.4. (**équi-intégrabilité**)
Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on dit que qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $L^p(\Omega)$, est p-équi-intégrable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $E \subset \Omega$ mesurable avec $mes(E) < \delta$, on ait

$$\int_E |f_n(x)|^p\, dx < \varepsilon.$$

Si $p = 1$, on dit simplement que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable.

Un théorème important permettant de montrer la convergence forte d'une suite à partir d'une convergence presque partout est le théorème de Vitali.

Théorème 1.2.3. (**de Vitali.**)
Soit $1 \leq p < +\infty, \Omega \subset \mathbb{R}^N$ mesurable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\Omega)$ convergeant presque partout vers une fonction f. Alors

$$f_n \longrightarrow f \text{ fortement dans } L^p(\Omega) \Leftrightarrow (f_n)_n \text{ est } p-\text{équi-intégrable.}$$

Proposition 1.2.1. (**Convolution**)
Soient $f \in L^1(\Omega)$ et $g \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors, pour p.p $x \in \Omega$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable.
On pose

$$(f * g)(x) = \int_\Omega f(x-y)g(y)dy.$$

Alors, $(f * g) \in L^p(\Omega)$ et $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p$.

Définition 1.2.5. (**Suites régularisantes**)
*On appelle **suite régularisante** sur $\mathbb{R}^N$ toute suite $(\phi)_{n\geq 1}$ de fonctions telle que*

i) $(\phi)_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$,

ii) $Supp(\phi)_n \subset B(0, \frac{1}{n})$,

iii) $\int_\Omega (\phi)_n = 1$,

iv) $(\phi)_n \geq 0$.

Définition 1.2.6. (**Mesure de Radon**)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, on appelle mesure de Radon sur Ω un élément de $(\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}))'$, c'est-à-dire une application linéaire continue (pour la mesure infinie) de $\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.2.4. *Le dual de $L^\infty(\Omega)$ contient strictement $L^1(\Omega)$ et s'identifie à l'espace des mesures de Radon.*

Définition 1.2.7. (**mesure de Dirac**)
Soit x_0 un élément fixé de Ω. On appelle masse de Dirac au point δ_{x_0}, la mesure δ_{x_0} sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ définie par

$$\forall \mathcal{A} \in \mathcal{P}(\Omega), \delta_{x_0}(\mathcal{A}) = \begin{cases} 1 \ \ si \ \ x_0 \in \mathcal{A}, \\ 0 \ \ sinon. \end{cases}$$

Proposition 1.2.2. (**Intégrale par rapport à une mesure de Dirac**)
Soit ω_0 fixé dans Ω et δ_{ω_0} la mesure de Dirac en ce point. Une fonction mesurable $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $= \mathbb{C}$) est toujours δ_{ω_0}-intégrable. Si $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}$, la δ_{ω_0}-intégrabilité équivaut à la finitude de $f(\omega_0)$. Quand f est δ_{ω_0}-intégrable, on a

$$\int_\Omega f d\delta_{\omega_0} = f(\omega_0).$$

Lemme 1.2.1. (**de Fatou.**)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives sur Ω, alors

$$\int_\Omega \left(\lim_{n\to+\infty} \inf f_n \right) dx \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \left(\int_\Omega f_n dx \right).$$

Théorème 1.2.5. (**de convergence dominée de Lebesgue**)
Soit $1 \leq p < +\infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ une suite telle que :

i) *$f_n \longrightarrow f$ p.p ;*

ii) *Il existe $g \in L^p(\Omega)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$ p.p sur Ω.*

Alors,

$$f \in L^p(\Omega) \ \ et \ \ \|f_n - f\|_p \longrightarrow 0 \ \ quand \ n \longrightarrow +\infty.$$

• Espaces de Lebesgue à poids.

On peut obtenir des variantes de tous les espaces construits à partir de normes de L^p en remplaçant la mesure de Lebesgue par une autre mesure, le plus souvent absolument continue, mais qui précise par exemple le comportement des fonctions à l'infini. Ainsi, on peut introduire les espaces de Lebesgue à poids, $L^p(\Omega, \rho)$ via la définition suivante.

Définition 1.2.8. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Si $\rho : \Omega \to]0; +\infty[$ est une fonction intégrable, on définit les espaces de Lebesgue à poids comme*

$$L^p(\Omega, \rho) = \left\{ f \ \text{ mesurable} : |f|^p_{L^p(\Omega,\rho)} = \int_\Omega |f(x)|^p \, \rho(x) \, dx < \infty \right\}.$$

1.2.2 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$.

• **Les espaces** $W^{1,p}(\Omega)$.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \nabla u \in (L^p(\Omega))^N \right\}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{1,p} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}.$$

Si $p = \infty$, on munit $W^{1,\infty}(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \Big(\sup_\Omega |u| + \sup_\Omega |\nabla u| \Big).$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est

$$\begin{cases} \text{un espace de Banach} & \text{si } 1 \leq p \leq \infty; \\ \text{réflexif} & \text{si } 1 < p < \infty; \\ \text{séparable} & \text{si } 1 \leq p < \infty. \end{cases}$$

On pose $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$. L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$\big(u, v\big)_{H^1(\Omega)} = \big(u, v\big)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)},$$

la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}, .$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable. $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$

• **Les espaces** $W^{m,p}(\Omega)$.

Soit $m \geq 2$ un entier et p un réel tel que $1 \leq p \leq \infty$. On définit

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^N, \ |\alpha| \leq m \}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \left(\sum_{\alpha : |\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}$$

.

Notons que par récurrence, on a

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \ \ \forall\, i = \overline{1, N} \right\}$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$ est un espace de Banach.

On pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$; $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$\big(u,v\big)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \Big(\|D^\alpha u\|, \|D^\alpha v\|\Big)_{L^p(\Omega)}$$

est un espace de Hilbert.

- **Les espaces** $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Soit $1 \leq p \leq \infty$; $W_0^{1,p}(\Omega)$ est la fermeture de $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. On note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable ; il est réflexif si $1 < p < \infty$. $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

1.3 Inégalité de Poincaré.

Proposition 1.3.1. (en dimension 1)
Soit I un intervalle borné. Alors il existe une constante C (dépendant de $\bar{I}$) telle que

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\,\|u'\|_{L^p(I)} \quad \forall\ u \in W_0^{1,p}(I).$$

Proposition 1.3.2. (en dimension N)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Alors il existe une constante C (dépendant de Ω et de p) telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\,\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad 1 \leq p < \infty.$$

1.4 Notions d'opérateurs différentiels

Pour $N \in \mathbb{N}$, on note $x = (x_i)_{i=\overline{1,N}}$ un vecteur de $\mathbb{R}^N$.
On appelle champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^N$ une application

$$\begin{aligned} v\colon \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R}^N \\ x &\mapsto v(x) = (v(x_1), \ldots, v(x_N)). \end{aligned}$$

Pour une fonction $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, son gradient est le champ de vecteurs défini par :

$$\operatorname{grad} u(x) = \nabla\, u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}(x)\right)$$

Pour un champ de vecteurs $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on apelle divergence de v la fonction définie par :

$$\operatorname{div} v(x) = \nabla\,.(v(x)) = \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial v}{\partial x_2}(x) + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_N}(x).$$

On appelle Laplacien d'une fonction $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\Delta u(x) = \operatorname{div}(\nabla u)(x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}(x) + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_N^2}(x) = \sum_1^N \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x).$$

Définition 1.4.1. (**L'opérateur p-Laplacien.**)
L'opérateur p-Laplacien $(1 < p < \infty)$ *est un opérateur aux dérivées partielles quasi-linéaires elliptiques du second ordre défini par*

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\, \nabla u) \;\; \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Pour $p \neq 2$, $\Delta_p u$ l'opérateur est dégénéré.

Si $p = 2$, il coïncide avec l'opérateur de Laplace usuel Δ.

1.5 Topologie

Définition 1.5.1. *Soit X un ensemble. On dit qu'une application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ est une* ***distance*** *sur X si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- (***i***) *symétrie : pour tout $(x, y) \in X^2$, on a $d(x, y) = d(y, x)$,*
- (***ii***) *positivité : pour tout $(x, y) \in X^2$, on a $d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,*
- (***iii***) *inégalité triangulaire : pour tout $(x, y, z) \in X^3$, on a $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.*

Le couple (X, d) est alors appelé **espace métrique**.

Quelques exemples
• Prenons $X = \mathbb{R}$ et $d(x, y) = |x - y|$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Cela définit un espace métrique. C'est la **distance usuelle** sur $\mathbb{R}$.
• Prenons $X = \mathbb{R}^N$: les applications suivantes définies de $\mathbb{R}^N$ vers $\mathbb{R}$ sont des distances.

$$d_1(x, y) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^N |x_j - y_j|$$

$$d_2(x, y) \overset{\text{déf}}{=} \left(\sum_{j=1}^N (x_j - y_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_\infty(x, y) \overset{\text{déf}}{=} \max_{1 \leq j \leq N} |x_j - y_j|$$

Définition 1.5.2. *Soient (X, d) un espace métrique, x un point de X et α un réel strictement positif. On appelle boule ouverte (resp. boule fermée) de centre x et de rayon α, et l'on note $B(x, \alpha)$ $(resp.\, B_f(x, \alpha))$ l'ensemble des points y de X tels que $d(x, y) < \alpha$ $(resp.\, d(x, y) \leq \alpha)$.*

La notion de distance permet de définir de manière très simple et générale, le concept de limite d'une suite et celui de fonction continue.

Définition 1.5.3. (*Convergence des suites*). *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace métrique (X,d) et ℓ un point de X. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si*

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, n_0\in\mathbb{N},\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Longrightarrow d(x_n,\ell)<\varepsilon.$$

Définition 1.5.4. (*Continuité des fonctions*). *Soient $(X,d),(Y,\sigma)$ deux espaces métriques. On considère une fonction f de X dans Y et un point x_0 de X. La fonction f est continue en x_0 si et seulement si*

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\alpha>0\,/\,d(x,x_0)<\alpha\Longrightarrow\sigma(f(x),f(x_0))<\varepsilon.$$

Définition 1.5.5. *On dit qu'une fonction $f:X_1\to X_2$ entre deux espaces métriques (X_1,d_1) et (X_2,d_2) est* ***uniformément continue*** *si l'on a :*

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0\,,\forall\,x,y\in X_1,\ d_1(x,y)<\delta\Longrightarrow d_2(f(x),f(y))<\varepsilon.$$

Remarque 1.5.1. ▷ La notion de continuité uniforme est une propriété globale.
▷ Une fonction uniformément continue est nécessairement continue.

Définition 1.5.6. *Soit k un réel positif. Une application f entre deux espaces métriques (X_1,d_1) et (X_2,d_2) est dîte lipschitzienne de rapport k si*

$$\forall\,(x,y)\in X_1\times X_2,\ d_2(f(x),f(y))\leq kd_1(x,y).$$

Proposition 1.5.1. (*Composition des fonctions continues*). *Soient $(X,d),(Y,\sigma),(Z,\gamma)$ trois espaces métriques, f et g deux fonctions respectivement de X dans Y et Y dans Z. Soit un point x_0 de X tel que f soit continue en x_0 et g le soit en $f(x_0)$. Alors la fonction $g\circ f$ est continue en x_0.*

Proposition 1.5.2. (*Suites et fonctions continues*). *Soient $(X,d),(Y,\sigma)$ deux espaces métriques, f une fonction de X dans Y et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et que la fonction f est continue en ℓ. Alors la suite d'éléments de Y définie par $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.*

Définition 1.5.7. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une fonction $\|\cdot\|:E\to\mathbb{R}^+$ est appelée* ***norme*** *sur E si elle vérifie les conditions suivantes :*

i) $\|x\|=0\Longleftrightarrow x=0$,
ii) $\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\forall\,x\in E,\ \|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$,
iii) $\forall\,(x,y)\in E^2,\ \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

Le couple $(E,\|\cdot\|)$ est alors appelé **espace vectoriel normé**.

Remarque 1.5.2. Sur $E\times E$, on définit la fonction d par :

$$\forall\,(x,y)\in E^2,\ d(x,y)=\|x-y\|\,.$$

On vérifie aisément que d est une distance sur E. On l'appelle **distance associée à la norme**.

Définition 1.5.8. *Une partie A d'un espace vectoriel E est dite* ***convexe*** *si*

$$\forall\,(x,y)\in A\times A,\ [x,y]\subset A.$$

Définition 1.5.9. *Soit A une partie convexe de E et $f : A \to \mathbb{R}$, une fonction. On dit que f est convexe si*

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall\, \lambda \in]0; 1[, f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

On dit que f est **concave** si $-f$ est convexe.

Définition 1.5.10. (**Condition de Keller-Osserman**)
Une fonction f satisfait la condition de Keller-Osserman si

$$\forall\ \alpha > 0, \int_{\alpha}^{+\infty} \left(\int_0^t f(s)\mathrm{d}s \right)^{-1/2} \mathrm{d}t < +\infty.$$

Définition 1.5.11. (**Fonction Carathéodory**). *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, φ une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite de Carathéodory, si elle vérifie* :

1. L'application : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ t \longmapsto \varphi(x, t)$ est continue presque pour tout $x \in \Omega$.
2. L'application : $\Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \ t \longmapsto \varphi(x, t)$ est mesurable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1.6 Module de continuité

Définition 1.6.1. (**Module de continuité**). *Un module de continuité est une application $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que*

i) $\omega(0) = 0$,

ii) ω *est croissante,*

iii) ω *est sous-additive* (*c'est-à-dire* $\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+$, $\omega(a+b) \leq \omega(a) + \omega(b)$).

Un module de continuité est continu, car pour tout $h_1 \in]0; a]\ (a \in \mathbb{R}_*^+)$ et pour tout $h > 0$ tel que $h_1 + h < a$ on a

$$|\omega(h_1 + h) - \omega(h_1)| \leq \omega(h). \tag{1.3}$$

De plus, pour tous réels λ et h tels que λh et $h \in]0; a]\ (a \in \mathbb{R}_*^+)$, on a :

$$\omega(\lambda h) \leq (\lambda + 1)\omega(h). \tag{1.4}$$

En effet, si $\lambda \leq 1$ c'est trivial (car ω croissante) ; si $\lambda > 1$, il existe un entier $n>0$ tel que $n < \lambda \leq n+1$; et puisque $\lambda h \in\ ]0; a]$ et que ω est sous-additive et croissante, on a :

$$\omega(\lambda h) \leq \omega(nh) + \omega((\lambda - n)h) \leq n\omega(h) + \omega(h),\ \ \text{d'où}\ \ \omega(\lambda h) \leq (\lambda + 1)\omega(h).$$

Remarque 1.6.1. Si ω est un module de continuité pour lequel $\dfrac{\omega(h)}{h} \longrightarrow 0$, quand $h \longrightarrow 0$, ω est alors identiquement nul. En effet, d'après (1.3), ω est alors dérivable sur $]0; a]$ et sa dérivée est nulle ; et comme $\omega(h) \longrightarrow 0$, ω est bien identiquement nulle.

Quelques critères sur les modules de continuité.

1. Si ω_1 et ω_2 sont deux modules de continuité, $\omega = \omega_1 \circ \omega_2$ est un module de continuité (sur l'intervalle de définition de $\omega_1 \circ \omega_2$).
2. Soit $\omega :]0; a] \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $(a \in \mathbb{R}_*^+)$ une fonction continue croissante telle que $\omega(h) \longrightarrow 0$ quand $h \longrightarrow 0$. Si $x \mapsto \frac{\omega(x)}{x}$ est une fonction décroissante sur $]0, a]$; donc si ω est une fonction concave sur $]0; a]$, ω est un module de continuité.

Exemple : Sur $]0; \frac{1}{e}]$, $x \mapsto \sqrt{x \log \frac{1}{x}}$ est un module de continuité. Cela résulte de (1.4) puisque $x \mapsto \sqrt{x}$ est un module de continuité sur $]0; +\infty[$ et que d'après (1.3), $x \log \frac{1}{x}$ est un module de continuité sur $]0; \frac{1}{e}]$.

Théorème 1.6.1. *[14] Si ω est un module de continuité sur $]0; a]$, il existe un module de continuité concave ω_1 satisfaisant*

$$\omega(x) \leq \omega_1(x) \leq 2\,\omega(x), \quad \forall x \in]0; a].$$

Remarque 1.6.2. Un module de continuité n'est pas forcément concave.

1.7 Notations de base.

La notation $a \vee b$, respectivement, $a \wedge b$ représente le maximum respectivement le minimum de $a, b \in \mathbb{R}$.

La partie positive, (resp. négative) d'une fonction g est notée par g^+ (resp. g^-) ; on a

$$\begin{cases} g^+ & = g \vee 0 \\ g^- & = -(g \wedge 0) \\ g & = g^+ - g^-. \end{cases}$$

Pour $R > 0$, B_R représente la boule de $\mathbb{R}^N$ du rayon R centré à l'origine.

$$B_R = \big\{x \in \mathbb{R}^N; |x| < R\big\}.$$

Pour un ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^m$, on note par $\mathbb{1}_A(\cdot)$ la fonction caractéristique de A. On note $\text{sign}^+(\cdot)$ la fonction caractéristique de $]0; +\infty[$.

Pour une fonction mesurable positive bornée ρ sur $\mathbb{R}^N$, on note par $L^1(\mathbb{R}^N, \rho)$ l'ensemble des fonctions mesurables de norme finie $\|f\|_{L^1(\rho)} := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\,\rho(x)\mathrm{d}x$.

Le graphe maximal monotone qui est l'inverse de $\varphi(x, \cdot)$ sera noté par $\beta(x, \cdot)$. Sa section minimale est la fonction

$$\beta_0 : (x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longmapsto \big\{b \mid \forall\, c \in \beta(x, z), |b| \leq |c|\ \big\}.$$

Remarque 1.7.1. *Pour tout $w : \mathbb{R}^N \longmapsto \mathbb{R}$ mesurable, la composition $\beta_0 : (\cdot, w(\cdot))$ est mesurable. En effet, par exemple pour $\lambda \geq 0$, on a :*

$$\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid \beta_0 : (x, w(x)) \leqslant \lambda\big\} = \big\{x \in \mathbb{R}^N \mid \varphi(x, \lambda) \leq w(x)\big\};$$

cet ensemble est mesurable par les hypothèses sur φ et w.

1.8 Solutions très faibles et inégalités de Kato.

Considérons le problème (1). Dans ce qui suit, nous prenons toujours les solutions très faibles (distributionnelles), que nous appelons $\mathcal{D}'$ solutions par souci de concision.

Définition 1.8.1. *Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Une fonction $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ telle que $w := \varphi \circ u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ est appelée une $\mathcal{D}'$ solution du problème* (1) *si pour tout $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \big(u\xi - w\Delta\xi - f\xi\big) = 0.$$

Dans la suite, nous considérons deux suites u_i, $i = 1, 2$ ($\mathcal{D}'$ solutions du même problème) correspondant à des données différentes.

Pour les fonctions $\varphi \circ u_i := \varphi(\cdot, u_i(\cdot))$ nous écrivons w_i.

La fonction $w_1 - w_2$ est notée par W. Dans la proposition suivante nous rappelons (et généralisons légèrement) les inégalités de Kato [13], [19] valables pour les solutions u_1, u_2 au sens de la définition 1.8.1. Nous présentons les ensembles suivants :

$$\mathcal{S} := \big\{S \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}) \mid S(0) = 0,$$
$$S' \text{est croissante au sens large, bornée, continue par morceaux}\big\}.$$

$\mathcal{S}_0 := \big\{S \in \mathcal{S} \mid zS'(z) \geq 0\big\}$. En particulier, $S := z \mapsto z^+$ appartient à $\mathcal{S}_0$.

Lemme 1.8.1. (*Brézis [13] Lemme A.2*) *Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone, croissante au sens large telle que p soit continue sauf en un nombre fini de sauts et $p(\mathbb{R})$ soit bornée.*

Soient $P(r) = \int_0^r p(s)ds$, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ avec $\Delta u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Alors

$\Delta P(u) \geq (\Delta u)p(u)$ *sur* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Preuve. [19]. □

Proposition 1.8.1. *Supposons que u_i $\mathcal{D}'$ solutions du problème* (1) *correspondant aux données f_i, respectivement $i = 1, 2$. Alors pour tout $S \in \mathcal{S}$, pour tout $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^+$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^N} ((u_1 - u_2)S'(W)\xi - S(W)\Delta\xi) \leq \int_{\mathbb{R}^N} (f_1 - f_2)S'(W)\xi. \tag{1.5}$$

En outre,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_1 - u_2)^+\xi - W^+\Delta\xi \leq \int_{\mathbb{R}^N} (f_1 - f_2)\,\mathrm{sign}^+\,(u_1 - u_2)\xi. \tag{1.6}$$

Preuve. Comme le laplacien distributionnel $-\Delta W$ de W est égal à $f_1 - f_2 - u_1 + u_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, l'inégalité (1.5) découle du lemme 1.8.1.
Pour obtenir (1.6), on raisonne comme dans [11] en choisissant $\pi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et en considérant la relation

$$-\Delta(W + \varepsilon\pi) = f_1 - f_2 - u_1 + u_2 - \varepsilon\Delta\pi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

Soit $S'_\varepsilon(z) = \min\left\{\frac{z^+}{\varepsilon}, 1\right\}$, $S_\varepsilon(z) = \int_0^z S'_\varepsilon(s)ds$, pour $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 1.8.1, on obtient avec la fonction $W + \varepsilon\pi$ et la "fonction test" $S'(W + \varepsilon\pi)$

$$-\Delta S_\varepsilon(W + \varepsilon\pi) \leq (f_1 - f_2 - u_1 + u_2)S'_\varepsilon(W + \varepsilon\pi) - \varepsilon\Delta\pi S'_\varepsilon(W + \varepsilon\pi) \text{ sur } D'(\mathbb{R}^N).$$

Lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$ le membre de droite s'annule et celui de gauche converge vers $-\Delta(W^+)$ sur $D'(\mathbb{R}^N)$. De plus, $S'_\varepsilon(W+\varepsilon\pi)$ converge dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ vers la fonction $\text{sign}^+(W) + \pi\mathbb{1}_{W=0}$. En prenant $\pi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ convergeant vers $\text{sign}^+(u_1 - u_2)$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ nous avons l'inégalité (1.6). □

1.9 Hypothèses sur φ et définitions.

Formulation des hypothèses

(H_0) | $\varphi : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction Carathéodory croissante au sens large dans la seconde variable ;
φ est uniformément continue dans la seconde variable sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$;

(lorsqu'on parle de solutions L^∞, nous assouplissons l'hypothèse de continuité uniforme locale appropriée).

Il est usuel de supposer la normalisation $\varphi(x, 0) = 0$ presque partout, et $\beta_0(x, k) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $k \in \mathbb{R}$ (cf. les résultats d'existence de [13], [16]). Notre cadre ne diffère que par translation par une solution donnée u_*. Par souci de simplicité, nous exigeons que (H_{aut}) ou φ soit indépendante de x, normalisée par $\varphi(0) = 0$ (auquel cas $f_* \equiv 0$, $u_* \equiv 0$) ; ou

(H_{surj}) | pour presque partout $x \in \mathbb{R}^N$, $\varphi(x, \cdot)$ est surjective ;
il existe $f_*, u_* \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$
telles que u_* soit une D' solution de (1) de donnée f_* ;
et pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\beta_0(\cdot, w_*(\cdot) + k) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, où $w_* = \varphi \circ u_*$.

Précisons que (H_{surj}) est vérifiée sous l'hypothèse suivante :

(H'_{surj}) | pour tout $k \in \mathbb{R}$, presque partout $x \in \mathbb{R}^N$, $\varphi(x, \cdot)$ est surjective,
et $\beta_0(\cdot, k) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Cette hypothèse correspond au cas où $\beta_0(x, 0) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ de sorte que (H_{surj}) soit vraie avec le choix $u_* \equiv f_* = \beta_0(x, 0)$ et $w_* \equiv 0$.

Il est à noter aussi que puisqu'il existe $|\beta_0(\cdot, w_*(\cdot))| \leqslant |u_*| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, une hypothèse de croissance sur $\beta_0(x, \cdot)$ du type $|\beta_0(x, r + k)| \leqslant C(k)\,|\beta_0(r)|$ garantit que $|\beta_0(\cdot, w_*(\cdot) + k)| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Cela permet d'obtenir un polynôme (uniforme en x) de croissance eponentielle de $\beta_0(x, \cdot)$.
L'hypothèse de surjectivité sur $\varphi(x, \cdot)$ dans (H_{surj}) peut être assouplie (cf hypothèse

(H_{surj})). Cependant, soulignons que certaines restrictions sur la dépendance du domaine de $\beta_0(x,\cdot)$ par rapport à x sont nécessaires pour parvenir à l'existence (cf [8, exemple 3.1], qui peut être interprété comme un exemple de non-existence pour formulation).

Définition 1.9.1. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Carathéodory.*

i) Supposons que φ est uniformément continue par rapport à la seconde variable. On dit alors que φ admet un module de continuité et on appelle la fonction

$$r \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sup\{|\varphi(x,z) - \varphi(x,\hat{z})| \ / \ x \in \mathbb{R}^N, z, \hat{z} \in \mathbb{R}, |z-\hat{z}| \leq r\} \in \mathbb{R}^+, \quad (1.7)$$

le meilleur module de continuité de φ. Dans la suite, la fonction donnée par (1.7) sera notée par $\omega_0(\cdot)$. Plus généralement, toute fonction continue sous-additive croissante au sens large $\omega : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ avec $\omega(0) = 0$ telle que ω domine $\omega(0)$ est appelée *module de continuité de φ*.

ii) Étant donné un module de continuité ω, on définit (au sens généralisé) son inverse ϖ par la Remarque 1.9.1***v***) ci-dessous. En particulier, l'inverse du meilleur module de continuité ω_0 sera noté par ϖ_0.

iii) Lorsque φ est uniformément continue par rapport à la seconde variable, la quantité

$$|\varphi(x, z+y) - \varphi(x,y)|$$

est dominée par une fonction affine de $z \in \mathbb{R}^+$ indépendant de $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}$ (dans ce cas, on dit que φ *est sous-linéaire*). Si en plus, on a $\lim\limits_{z\to+\infty} \dfrac{\omega_0(z)}{z} = 0$, on dit que φ *est strictement sous-linéaire.*

Remarque 1.9.1.

i) Le meilleur module de continuité ω_0 de φ est un module de continuité de φ.

ii) Dans la suite, nous supposerons toujours que φ dépend de sa seconde variable ; alors pour tout module de continuité ω de φ on a $\omega(r) \geq \omega_0(r) > 0$ pour $r > 0$.

iii) Si φ est indépendant de x, la fonction tronquée $z \mapsto \big(\varphi(z) \vee \varphi(-M)\big) \wedge \varphi(M)$ admet un module de continuité, pour tout $M > 0$.

iv) Étant sous-additive, la fonction ω_0 est sous-linéaire ; donc sa coque concave

$$\widehat{\omega} : r \in \mathbb{R}^+ \mapsto \inf\{g(r) \mid g \text{ est concave sur } \mathbb{R}^+, g \geq \omega_0 \text{ sur } \mathbb{R}^+\}$$

est bien définie. La fonction $\widehat{\omega}$ est le plus petit module de continuité concave de φ. Si φ est strictement sous-linéaire, alors son plus petit module de continuité concave $\widehat{\omega}$ est aussi strictement sous-linéaire.

v) Si ω est un module de continuité de φ, on peut l'inverser ; la procédure est sans difficulté si ω est strictement croissante. Dans le cas général, soit $\varpi : \omega(\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}) \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est la plus grande fonction telle que $\omega \circ \varpi$ soit l'application identité sur $\omega(\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\})$. Si nécessaire nous étendons ϖ en $+\infty$ sur $\mathbb{R}^+ \setminus \omega(\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\})$.

vi) L'inverse ϖ de ω ainsi définie est une fonction super-additive non décroissante avec $\varpi(0) = 0$.

vii) Si φ admet un module de continuité, il peut être choisi concave et bijectif. Dans ce cas ϖ est convexe et strictement croissante.

Définition 1.9.2. *On dit que φ vérifie la condition de Keller Osserman généralisée, si φ admet un module de continuité bijectif $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tel que la fonction inverse ϖ de ω satisfait*

$$(H_{KO}) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{z\varpi(z)}} < +\infty.$$

Remarque 1.9.2.

Pour des raisons techniques, il convient de supposer ω bijectif dans la définition ci-dessus. Mais la condition de Keller Osserman généralisée ainsi définie est équivalente à l'exigence que (H_{KO}) soit satisfaite avec $\varpi = \varpi_0$, avec la convention que $\dfrac{1}{\infty} = 0$.

En effet, supposons que (H_{KO}) soit vérifiée avec $\varpi = \varpi_0$. Si $\lim\limits_{r\to+\infty} \omega_0(r) < +\infty$, on pose $\omega(r) = \omega_0(r) + \sqrt{r}$, qui est un module de continuité bijectif de φ ; puisque $\varpi(z) = \omega^{-1}(z)$ est équivalent à z^2 en $+\infty$, on a toujours (H_{KO}) avec ϖ. Maintenant, supposns que ω_0 est surjectif mais pas strictement croissant. Puis nous étendons ϖ_0 à zéro sur $\mathbb{R}^-$ et utilisons la convolution avec un noyau d'ammolissement standard θ dans $[-1, 1]$ pour définir $\varpi(r) = (\varpi_0 * \theta)(r - 1)$. Par construction, $\varpi(0) = 0$, est continue et hérite de la super-additivité de ϖ_0 ; c'est donc une fonction bijective continue sur $\mathbb{R}^+$. Puisqu'on a $\varpi \leq \varpi_0$ on obtient aussi $\varpi(z) \geq (\varpi_0)(z - 2)$ par la définition de ϖ.

Remarque 1.9.3. Il est plus courant de formuler la condition de Keller Osserman en exigeant que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\int_0^z \varpi(s)\mathrm{d}s}} < +\infty. \tag{1.8}$$

Il a été montré par Gallouët et Morel [16] que $\limsup\limits_{z\to+\infty} \dfrac{z}{\varpi(z)}$ est finie, les deux conditions (H_{KO}) et (1.8) sont équivalentes (voir [17], page 904). Dans notre cadre, ϖ est une fonction super-linéaire, donc cette équivalence est vraie.

Chapitre 2

Résultats de comparaison.

Dans cette section, nous donnons deux types de résultats de comparaison pour les solutions du problème (1) avec une non-linéarité de φ uniformément continue par rapport à la seconde variable. Les résultats dans [13], [17] sont à visiter sous une condition de Keller-Osserman généralisée sur le module de continuité de φ.

2.1 Comparaison de L^1_{loc} solutions.

Théorème 2.1.1. *Supposons que φ satisfasse (H_0) et la condition de Keller Osserman généralisée (H_{KO}) de la définition* 1.9.2.

Alors pour tout $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, il existe au plus une $\mathcal{D}'$ solution au problème (1). *De plus, si u_i $(i = 1, 2)$ sont $\mathcal{D}'$ solutions de* (1) *correspondant à $f_i, i = 1, 2$, alors $f_1 \leq f_2$ implique $u_1 \leq u_2$.*

Remarque 2.1.1.

Ici et dans les résultats suivants, les propriétés de comparaison persistent si nous supposons que u_1 est une sous-solution, et u_2 est une sur-solution des équations correspondantes, avec une définition standard des sous et super-solutions très faibles.

Preuve. Rappelons que $W = w_1 - w_2 = \varphi \circ u_1 - \varphi \circ u_2$. Soit ω le module de continuité bijectif de φ tel que $\varpi = \omega^{-1}$ satisfasse (H_{KO}). Choisissons $f_1 \leq f_2$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Étape 1. De l'inégalité de Kato (1.6), on a $(u_1 - u_2)^+ - \Delta W^+ \leq f_1 - f_2 \leq 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Mais

$$W^+(x) = (\varphi(x, u_1(x)) - \varphi(x, u_2(x)))^+ \leq \omega((u_1(x) - u_2(x))^+) \tag{2.1}$$

grâce à la monotonie de $\varphi(x, \cdot)$ on a $\varpi(W^+) - \Delta W^+ \leq 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, avec ϖ satisfaisant la condition de Keller Osserman.

Si ϖ était convexe, on a $W^+ \leq 0$ presque partout dans $\mathbb{R}^N$ (voir [17]). En fait, la super-additivité de ϖ et l'observation que $\varpi(z) \leq const \times z$ au voisinage de zéro suffisent pour obtenir le résultat.

Étape 2. On construit une famille de fonctions barrières $w_R \geq 0$ définies sur les cubes ouverts Π_R de $\mathbb{R}^N$ de côté $2R > 0$, centrés à l'origine. Les propriétés suivantes sont nécessaires :

i) $w_R(x) \to +\infty$ lorsque x s'approche de la frontière $\partial\Pi_R$;

ii) Lorsque $R \to +\infty$, w_R converge uniformément vers zéro sur des sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^N$;

iii) L'inégalité $\varpi(w_R) - \Delta w_R \geq 0$ est vérifiée dans $\mathcal{D}'(\Pi_R)$.

Un candidat adéquat est la somme $w_R(x) := \sum_{i=1}^N \tilde{w}_R(|x_i|)$, où $\tilde{w}_R : [0, R] \mapsto \mathbb{R}^+$ est donnée par

$$\tilde{w}_y = (H_{w_0})^{-1}(\sqrt{2}y), \quad H_{w_0}(u) = \int_{w_0}^{u} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{G(z) - G(w_0)}}, \quad G(z) = \int_0^z \varpi(s)\mathrm{d}s$$

avec $w_0{>}0$. Cette construction correspond à la valeur

$$R = R(w_0) = \int_{w_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{G(z) - G(w_0)}}.$$

Cette valeur est finie, grâce à la condition de Keller Osserman (voir **Remarque 1.9.3**) et au fait que la monotonie de ϖ, $G(z) - G(w_0) \geq \varpi(w_0)(z - w_0)$ pour $z{>}0$.

Par définition, $\tilde{w} \in C^1([0, R]) \cap C^2([0, R])$, et pour $y > 0, \tilde{u}_R''(y) = \varpi(w_R(y))$; de plus $\tilde{w}_R(y) = w_0 + \frac{\varpi(w_0)}{2}y^2 + \bar{\bar{o}}(y^2)$ comme $y \to 0$. Ainsi la fonction $y \mapsto \tilde{w}_R(|y|)$ est dans $C^2((-R, R))$, et on a ponctuellement sur Π_R,

$$0 = \sum_{i=1}^N \Big(\varpi(\tilde{w}_R(|x_i|)) - \Delta\tilde{w}_R(|x_i|)\Big) \leqslant \varpi\Big(\sum_{i=1}^N w_R(|x_i|)\Big) - \Delta\Big(\sum_{i=1}^N \tilde{w}_R(|x_i|)\Big)$$

$$= \varpi(w_R(x)) - \Delta w_R(x),$$

puisque ϖ est super-additive. Par conséquent ***iii***) est valable. Du fait de la super-additivité de ϖ, on a nécessairement $\limsup_{z\to 0} \frac{\varpi(z)}{z} < +\infty$, et donc $\frac{1}{\sqrt{G(z)}}$ diverge en zéro. Cela implique la propriété ***i***). Finalement notons que $R = R_{w_0} \to \infty$ si et seulement si $w_0 \to 0$. Pour tout $i = 1, \ldots, N$, on a

$$|x_i| = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{w_0}^{\tilde{w}_R(|x_i|)} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{G(z) - G(w_0)}}.$$

Ainsi la divergence de $\frac{1}{\sqrt{G(z)}}$ à zéro implique que $\tilde{w}_R(|x_i|)$ tend uniformément vers zéro lorsque $|x_i|$ reste bornée et w_0 converge vers zéro ; s'en suit la propriété ***ii***).

Étape 3. À l'étape 1, on a $-\Delta W^+ \leq 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Être non négatif et harmonique, W^+ est, en particulier, localement borné sur $\mathbb{R}^N$. Multiplions l'inégalité ***iii***) par (-1) dans la deuxième étape puis combinons-la avec la première étape (avec l'inégalité $\varpi(W^+) - \Delta W^+ \leq 0$). On obtient

$$\varpi(W^+) - \varpi(w_R) - \Delta(W^+ - w_R) \leqslant 0 \quad \text{ dans } \mathcal{D}'(\Pi_R).$$

On a $-\Delta(W^+ - w_R)^+ \leqslant 0$ dans $\mathcal{D}'(\Pi_R)$ par la monotonie de ϖ et l'utilisation de l'inégalité de Kato. Par ***i***) de la deuxième étape, pour ε suffisamment petit, w_R est supérieur à la quantité finie ess $\sup_{x\in\Pi_R} W^+$ sur la frontière du sous-domaine $\Pi_{R-\varepsilon}$. Comme $\varepsilon \to 0$, le principe de comparaison pour le laplacien donne l'inégalité $W^+ \leqslant w_R$ dans Π_R. Comme $R \to +\infty$, la propriété ***ii***) de la deuxième étape implique $W^+ \leqslant 0$ presque partout sur $\mathbb{R}^N$. Ce qui signifie que $u_1 \leqslant u_2$ et la preuve est complète. □

2.2 Comparaison dans les espaces L^1 pondérés.

Nous établissons ici des estimations quantitatives de dépendance continue pour une sous-classe de $\mathcal{D}'$ solutions du problème (1). L'estimation (2.1) associée à l'inégalité de Kato généralisée (1.5) donne

$\forall\ S \in \mathcal{S}, \forall\ \xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varpi(W)S'(W)\xi \ \leq \int_{\mathbb{R}^N} S(W)\Delta\xi + \int_{\mathbb{R}^N} (f_1 - f_2)S'(W)\xi. \tag{2.2}$$

Afin d'exploiter (2.2) nous allons restreindre la classe de données admissibles f et les solutions u aux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^N$ avec un poids bien choisi ρ décroissant à l'infini. Nous choisissons pour $\mathcal{S}$ une fonction dans $\mathcal{S}_0$ vérifiant la relation

$$S'(z)\varpi(z) = const \times S(z); \tag{2.3}$$

parce nous avons besoin que S soit croissante au sens large, nous devons tronquer les solutions de (2.2). Par la Remarque 1.9.1***iii***), nous choisissons un module concave de continuité ω de φ, que nous régularisons plus tard. Nous n'avons plus besoin ici de la condition de Keller Osserman généralisée.

Soient φ satisfaisant (H_0) et ω_0 son meilleur de module continuité donné par (1.7). Alors φ est sous-linéaire, c'est-à-dire que $\limsup_{z\to+\infty} \omega_0(z)/z$ est finie. Nous définissons

$$m_\infty := 1/(\limsup_{z\to+\infty} \omega_0(z)/z) \in]0; +\infty] \tag{2.4}$$

(le cas où $m_\infty = +\infty$ correspond au cas φ strictement sous-linéaire). Régularisons d'abord ω_0.

Lemme 2.2.1. *Soit φ satisfaisant (H_0). Alors φ admet un module de continuité ω tel que $\Omega = \omega^{-1}$ est une fonction C^2 sur $\mathbb{R}^+$ avec $\varpi'(k) \uparrow m_\infty$ lorsque $k \to +\infty$.*

Preuve. La démonstration reprend les arguments utilisés pour justifier la Remarque 1.9.2, mais nous partons du plus petit module concave de continuité $\widehat{\omega}$ de la Remarque 1.9.1***iii***) au lieu de ω_0.
Raisonnons par l'absurde. Par la définition de $\widehat{\omega}$ on a clairement :

$$\limsup_{z\to+\infty} \widehat{\omega}(z)/z = \limsup_{z\to+\infty} \omega(z)/z.$$

Notons $(\widehat{\omega})^{-1} = \breve{\varpi}$; par construction, $\breve{\varpi}(k-2) \leq \varpi(k) \leq \breve{\varpi}(k)$. Par suite la convexité de ϖ permet d'avoir dans le cas $m_\infty < +\infty$,

$$\lim_{k\to\infty} \varpi'(k) = m_\infty \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \varpi(k)/k = m_\infty \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \breve{\varpi}(k)/k = \lim_{r\to\infty} r/\widehat{\omega}(r) = m_\infty.$$

Dans le cas $m_\infty = +\infty$, on commence par remplacer $\widehat{\omega}(\cdot)$ par $\widehat{\omega}(\cdot) + \sqrt{\cdot}$. □

Construisons maintenant une famille de fonctions dans $\mathcal{S}_0$ à utiliser dans (2.2). Fixons $k>0$ et considérons

$$S_k(z) = \begin{cases} \dfrac{\varpi(k)}{\varpi'(k)} \times \exp\left(\varpi'(k)\displaystyle\int_k^z \frac{\mathrm{d}s}{\varpi(s)}\right) & , 0 \le z < k \\ z - k + \dfrac{\varpi(k)}{\varpi'(k)} & , z \ge k, \end{cases} \tag{2.5}$$

où ϖ est construit dans le **lemme 2.2.1**.

Comme ϖ est convexe, $S_k(z)$ tend vers zéro lorsque z tend zéro. De ce fait on peut étendre S_k en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ avec $S_k(z) = 0$ pour $z \le 0$. En fait, S_k est différentiable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, k\}$: on a $S_k'(z) = 1$ pour $z > k$, et

$$S_k'(z) = \frac{\varpi(k)}{\varpi(z)} \times \exp\left(\varpi'(k)\int_k^z \frac{\mathrm{d}s}{\varpi(s)}\right) = \frac{\varpi'(k)}{\varpi(z)} S_k(z)$$

pour $z \in]0; k[$. Par convexité, $\varpi(z) \ge \varpi(k) + \varpi'(k)(z-k) \equiv \varpi'(k)S_k(z)$ pour $z \ge k$. Un calcul direct donne que pour $r \in]0; k[$, $S_k''(r)$ est de même signe que $\varpi'(k) - \varpi'(r)$; puisque ϖ est convexe S_k l'est aussi sur $]0; k[$. Ainsi $S_k \in \mathcal{S}_0$, plus exactement, il vérifie les propriétes suivantes :

$$\left|\begin{array}{l} S_k' \text{ est une fonction continue de Lipschitz bornée,} \\ S_k(z) = 0 \ \forall \ z \le 0, \\ S_k' \text{ est strictement croissante sur } [0; k], \\ S_k' = 1 \text{ pour } z \ge k, \\ S_k(z) \text{ vérifie } m_k S_k(z) \le S_k'(z)\varpi(z^+) \ \forall \ z \in \mathbb{R}, \text{ où } m_k = \varpi'(k^+). \end{array}\right. \tag{2.6}$$

Théorème 2.2.1. *Soient φ satisfaisant (H_0) et m_∞ donné par (2.4). Soit ϖ la fonction C^2 convexe sur $\mathbb{R}$ donnée par le lemme (2.2.1).*

Soit $k>0$. Posons $m_k := \varpi'(k)$ (on a $m_k \uparrow m_\infty$ lorsque $k \to 0$).

Soient $u_i, i = 1, 2$ solutions $\mathcal{D}'$ de (1) correspondant aux données $f_i \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et $w_i = \varphi \circ u_i$.

i) *Soit $\rho(x) = e^{-c|x|}$ avec $0 < c < \sqrt{m_k}$. Si $(f_1 - f_2)^+ \in L^1(\mathbb{R}^N, \rho)$ et $(w_1 - w_2)^+ \in L^1(\mathbb{R}^N, \rho)$, alors $(u_1 - u_2)^+ \in L^1(\mathbb{R}^N, \rho)$ et*

$$\int S_k((w_1 - w_2)^+)\rho \le \frac{1}{m_k - c^2}\int (f_1 - f_2)S_k'((w_1 - w_2)^+)\rho, \tag{2.7}$$

$$\int (u_1 - u_2)^+ S_k'((w_1 - w_2)^+)\rho \le \frac{m_k}{m_k - c^2}\int (f_1 - f_2)S_k'((w_1 - w_2)^+)\rho. \tag{2.8}$$

ii) *Soit $\rho(x) = e^{-\sqrt{m_k}|x|}$. Si $f_1 \le f_2$ et $(w_1 - w_2)^+ \in L^1(\mathbb{R}^N, \rho)$, alors $u_1 \le u_2$.*

Remarque 2.2.1.

i) Dans le cas $(f_1 - f_2)^+ \in L^1(\mathbb{R}^N)$, en laissant $c \to 0$ et $k \to 0$ dans (2.8) on en déduit le résultat classique T-contraction dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ de Bénilan [44]. Notre version est différente car nous avons besoin de la continuité uniforme de φ ; d'autre part nous exigeons seulement que $u_i, i = 1, 2$ soient solution $\mathcal{D}'$ de (1) satisfaisant $(\varphi \circ u_1 - \varphi \circ u_2)^+ \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tandis que dans [44] φ est indépendant de x et une haute intégrabilité (dans les espaces de Marcinkiewics) de chacune des fonctions $\varphi \circ u_{1,2}$ est supposée.

ii) Plus grande est la classe d'unicité $L^1(\mathbb{R}^N, e^{-\sqrt{m_k}|x|})$, plus grand est le paramètre k. Si de plus φ est strictement sous-linéaire alors $m_k \uparrow +\infty$ lorsque $k \to +\infty$, de sorte que l'unicité dans la classe $L^1(\mathbb{R}^N, e^{-c|x|})$ est vraie pour tout $c > 0$.

iii) L'unicité peut échouer dans $L^1(\mathbb{R}^N, e^{-c|x|})$ pour $c > \sqrt{m_\infty}$. Un exemple simple est fourni par le cas linéaire $\varphi = \frac{1}{m} Id$. Ici on a $m_\infty = m$, et pour $N = 1$ et $f = 0$, $u_1(x) \equiv 0$ et $u_2(x) = e^{\sqrt{m}x}$ sont tous deux solutions de (1) intégrables avec tout poids $\rho(x) = e^{-(\sqrt{m}+\varepsilon)|x|}$, $\varepsilon > 0$.

Démonstration du théorème 2.2.1. En utilisant les fonctions de poids radial et de test, nous désignons par la même lettre une fonction paire sur $\mathbb{R}$ et la fonction radiale correspondante.

Appliquons l'inégalité (2.2) avec la fonction S_k et les fonctions test radiales ξ. Pour une fonction paire non négative $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ décroissante au sens large sur $\mathbb{R}^+$, en supprimant le second terme (négatif) dans $\Delta\xi(|x|) = \xi''(|x|) + \frac{N-1}{|x|}\xi'(|x|)$, de (2.6) on déduit

$\forall\ \xi \in \mathcal{D}^+(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} m_k S_k(W^+)\xi(|x|) \leq \int_{\mathbb{R}^N} S_k(W^+)\xi''(|x|) + \int_{\mathbb{R}^N} (f_1 - f_2)^+ S_k'(W^+)\xi(|x|) \quad (2.9)$$

Soit $R \geq 0$ et $0 < c \leq \sqrt{m_k}$. Le fait que S_k' est bornée (en particulier S_k admet une croissance linéaire à l'infini) et les hypothèses d'intégrabilité sur $W^+ = (w_1 - w_2)^+$ permet d'approcher le poids $\rho(|x|) := e^{-c(|x|-R)^+}$ par les fonctions $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^+$ et de passer à la limite dans (2.9). En effet pour $L > 0$, on pose

$$\rho_L(|x|) = \begin{cases} exp(-c|x|) & , 0 \leq |x| \leq L \\ c\, exp(-cL)(|x| - L - \frac{1}{2c})^2 & , L < |x| < L + \frac{1}{2c} \\ 0 & , |x| > L + \frac{1}{2c} \end{cases}$$

(par souci de simplicité, nous décrivons uniquement le cas $R = 0$).

ρ_L est $C(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ et il est concave à l'origine. Ainsi ρ_L peut être approchée uniformément sur $\mathbb{R}$ par les fonctions $\xi_{h,L} \in \mathcal{D}((-L - \frac{1}{c}, L + \frac{1}{c}))$ telles que $\lim_{h\to 0}(\xi_{h,L}'') = \rho_L''$ point par point sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, et

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} S_k(W^+)\xi_{h,L}''(|x|) \leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus\{0\}} S_k(W^+)\rho_L''(|x|).$$

Ainsi (2.9) est toujours valable avec $\xi = \rho_L$, où ρ_L'' est pris au sens ponctuel (c'est-à-dire, sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Passons à la limite quand $L \to \infty$, en utilisant le fait que $\rho_L \to \rho$ et $\rho_L^{''} \to \rho^{''}$ point par point sur $]0;+\infty[$. De plus, pour tout L, ρ_L est dominée par ρ et $\rho_L^{''}$ est dominée par $(2c\sqrt{e})\rho$. Par conséquent $S_k(W^+)\rho_L(|x|)$, $(f_1-f_2)^+S_k'(W^+)\rho_L(|x|)$ et $S_k(W^+)\rho_L^{''}(|x|)$ sont dominées par une fonction $L^1(\mathbb{R}^N)$ indépendante de L, et on passe à la limite en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue.
i) Avec $R=0$, on en déduit (2.7), puis on revient à (1.5) ; avec la même approximation ci-dessus on en déduit

$$\int_{\mathbb{R}^N}(u_1-u_2)S_k'(W^+)\rho(|x|) \le \int_{\mathbb{R}^N} S_k(W^+)c^2\rho(|x|) + \int_{\mathbb{R}^N}(f_1-f_2)S_k'(W)\rho(|x|).$$

Maintenant (2.7) implique (2.8) puisque $w^+=0$ dès que $u_1-u_2<0$. La même technique de régularisation appliquée à (1.6) permet de dire que $(u_1-u_2)^+ \in L^1(\mathbb{R}^N,\rho)$ du fait que $(w_1-w_2)^+ \in L^1(\mathbb{R}^N,\rho)$.

ii) En passant à la limite dans (2.9) avec $\xi(x)$ approchant $\rho(x)=e^{-\sqrt{m_k}(|x|-R)^+}$, $R>0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} m_k S_k(W^+)\rho \le \int_{\{|x|>R\}} m_k S_k(W^+)\rho.$$

Il s'en suit que $S_k(W^+)$ est égale à zéro presque partout sur $\{|x|<R\}$ car R est arbitraire. Nous concluons que $W^+=0$ presque partout sur $\mathbb{R}^N$. Maintenant l'inégalité de Kato (1.6) donne $u_1 \le u_2$ presque partout sur $\mathbb{R}^N$. □

2.3 Résultat de dépendance continue.

Un résultat de dépendance continue découle du principe de comparaison du théorème 2.1.1 sous l'hypothèse d'existence à priori.

Proposition 2.3.1. *Supposons que pour toute donnée $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ il existe une $\mathcal{D}'$ solution au problème* (1)*. Supposons que la conclusion du théorème* 2.1.1 *soit vérifiée.*

Alors les solutions dépendent continûment des données dans L^1_{loc}. Plus exactement, soient $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers f dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Désignons par, u respectivement u_n la solution (unique) $\mathcal{D}'$ de (1) *associée à la donnée f, respectivement f_n. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.*

Preuve. Du fait de l'unicité de u, une sous-suite de $(u_n)_n$ possède lui-même une sous-suite convergeant vers u dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Dans la suite nous travaillons avec une sous-suite extraite telle que $(f_n)_n$ est dominée par une fonction $F \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et converge presque partout sur $\mathbb{R}^N$. Nous pouvons définir ponctuellement (presque partout) sur $\mathbb{R}^N$ les fonctions $\underline{m}_n := \inf_{k\ge n} f_k$ et $\overline{m}_n := \sup_{k\ge n} f_k$; ces fonctions sont finies presque partout et appartiennent à $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ à cause de l'inégalité $-F \le \underline{m}_n \le f_n \le \overline{m}_n \le F$ presque partout sur $\mathbb{R}^N$. Par hypothèse, il existe les solutions $\mathcal{D}'$ associées aux données $\underline{m}_n$ respectivement $\overline{m}_n$ que nous notons $\underline{u}_n$ respectivement $\overline{u}_n$. Aussi nous désignons par $\underline{U}$ respectivement $\overline{U}$, les $\mathcal{D}'$ solutions associées aux données $-F$ respectivement F.

Par construction $(\underline{m}_n)_n$ (respectivement $(\overline{m}_n)_n$) est une suite croissante au sens large (respectivement une suite non croissante) ; les deux suites convergent vers f dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ comme $n \to \infty$.

Par le principe de comparaison, $(\underline{u}_n)_n$ (resp. $(\overline{u}_n)_n$) est aussi croissante au sens large (respectivement décroissante au sens large). De la même façon les deux suites, $(\underline{u}_n)_n$ et $(\overline{u}_n)_n$ sont bornées inférieurement par $\underline{U}$ et supérieurement par $\overline{U}$ appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Par conséquent $(\underline{u}_n)_n$ (respectivement $(\overline{u}_n)_n$) convergent dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et presque partout sur $\mathbb{R}^N$ à une certaine limite $\underline{u}$ (respectivement) $\overline{u}$ comme $n \to \infty$. En outre $\underline{w}_n := \varphi \circ \underline{u}_n$ et $\overline{w}_n := \varphi \circ \overline{u}_n$ sont toutes deux bornées par le haut (resp. par le bas) par la fonction $\overline{W} := \varphi \circ \overline{U}$ (resp. par $\underline{W} := \varphi \circ \underline{U}$). La notion de $\mathcal{D}'$ solution étant stable par rapport à la convergence des données et des solutions obtenues dans le sens ci-dessus, on en déduit que les deux $\underline{u}, \overline{u}$ sont $\mathcal{D}'$ solutions au problème (1) avec la même donnée f. Ainsi les deux coïncident avec u. Le principe de comparaison donne également $\underline{u} \leq u_n \leq \overline{u}$; donc la convergence de u_n vers u s'ensuit. □

Remarque 2.3.1. *Les même arguments montrent aussi que $w = \varphi \circ u$ dépend continûment de f dans L^1_{loc}.*

Remarque 2.3.2.

Le résultat de dépendance continue de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ de la proposition 2.3.1 est purement qualitatif ; en effet, il est basé sur la propriété de comparaison qualitative.

Un résultat de dépendance continue analogue (conditionnel et qualitatif) peut être obtenu depuis le cadre $L^1(\mathbb{R}^N, e^{-c|x|})$, partant de la propriété de comparaison du **théorème** 2.2.1***ii***). Mais nous avons aussi des estimations quantitatives de dépendance continue (2.7), (2.8) pour ce cadre. Par exemple, l'estimation (2.8) énonce une dépendance "quasi Lipschitz" de u sur f dans $L^1(\mathbb{R}^N, e^{-c|x|})$.

Par souci d'exhaustivité, énonçons le résultat de la dépendance continue de $L^1(\mathbb{R}^N, e^{-c|x|})$.

Proposition 2.3.2. *Supposons (H_0). Supposons qu'il existe $f_*, u_* \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ telles que u_* est $\mathcal{D}'$ solution de (1) avec la donnée f_*.*

Soient $c \in [0; \sqrt{m_k}[$ et $\rho_c(x) = e^{-c|x|}$; Soit k choisi tel que $m_k > c^2$ (voir lemme 2.2.1).

Soit $f_n - f \to 0$ dans $L^1(\mathbb{R}^N, \rho_c)$ lorsque $n \to 0$. Supposons qu'il esxiste u_n, u $\mathcal{D}'$ solutions de (1) avec les données f_n, f, respectivement telles que :
$w_n, w \in w_* + L^1(\mathbb{R}^N, \rho_c)$, où $w_n = \varphi \circ u_n, w = \varphi \circ u$.

Alors $u_n - u$ et $w_n - w$ tendent vers zéro dans $L^1(\mathbb{R}^N, \rho_c)$; de plus les estimations (2.7), (2.8) tiennent. En outre, si $c \neq 0$, alors pour tout $\alpha > 0$ il existe une constante $d(\alpha)$ qui dépend uniquement de φ et c telle que

$$\int |u_1 - u_2|\rho_c \leq \alpha + d(\alpha) \int |f_1 - f_2|\rho_c. \tag{2.10}$$

*Le résultat correspondant pour $c = 0$ est la contraction de $L^1(\mathbb{R}^N)$ mentionnée dans la Remarque 2.2.1**i**).*

Preuve. Ce résultat est essentiellement obtenu dans le théorème 2.2.1***i***). On remarque que (2.10) découle de l'inégalité de Kato (1.6), de l'estimation (2.7) et du fait que $z \leq \alpha + const(\alpha, k, \varphi) S_k(z)$ pour tout $z > 0$; la constante $const(\alpha, k, \varphi)$ peut être calculée à partir de la définition (2.5) de $S_k(\cdot)$. □

Chapitre 3

Résultats d'existence.

Dans cette section, nous complétons les résultats d'unicité et de comparaison précédents avec les résultats d'existence correspondants. Nos résultats ne sont pas les plus généraux posssibles par rapport aux hypothèses sur φ (cf par exemple les commentaires aux résultats d'existence de [13], [16]). Cependant ils correspondent précisément au cadre dans lequel l'unicité et la dépendance continue des solutions ont lieu. En effet, dans les preuves nous utilisons abondamment les résultats de comparaison précédents ; ainsi les arguments de convergence monotone (dans l'esprit de[4]) permettent de construire des preuves d'existence au-dessus d'un résultat d'existence « basique ».

Pour donner un tel résultat de base, nous nous intéressons principalement au cas d'une non-linéarité non autonaume de φ sous l'hypothèse (H_{surj}). Sous l'hypothèse (H_{aut}), nous exploitons la théorie d'existence de [44].

3.1 Un résultat d'existence "de base" .

Nous traitons séparément les cas (H_{aut}) et (H_{surj}).

• Sous hypothèses (H_{aut}) et pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, l'existence d'une solution $\mathcal{D}' u$ telle que $\|u\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}$, et ess inf $f \leq$ ess inf $u \leq$ ess sup $u \leq$ ess sup f est bien connue (voir [44]). Ces solutions satisfont des propriétes d'intégrabilité supplémentaires dans les espaces de Marcinkiewics ; une conséquence est que les solutions ainsi construites vérifient le principe de comparaison. Notons que, sous l'hypoyhèse (H_{aut}), pour tout $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, les fonction tronquées

$$f^{m,n} := (f^+ \wedge n)\, \mathbb{1}_{B_n} - (f^- \wedge m)\, \mathbb{1}_{B_m} \tag{3.1}$$

forment une suite bimonotone de fonctions L^∞ à support compact convergeant vers f point par point, c'est-à-dire $f^{m,n} \downarrow_{m\to+\infty} \uparrow_{n\to+\infty} f$. Par le principe de comparaison, les solutions correspondantes $u^{n,m}$ fournies par le résultat de [44] forment également une suite décroissante au sens large en m, croissante au sens large en n.

• Nous construisons maintenant une suite bimonotone similaire de fonctions tronquées sous l'hypothèse (H_{surj}) de telle sorte que le principe de comparaison du théorème 2.2.1***ii***) puisse être utilisé. Soit u_* une $\mathcal{D}'$ solution de (1) de donnée f_* et $w_* = \varphi \circ u_*$. Pour $\varepsilon \in [0, 1]$, posons

$$\varphi_\varepsilon(x, z) := \varphi(x, z) + \varepsilon(z - u_*(x)). \tag{3.2}$$

Pour $\varepsilon>0$ et pour presque partout $x \in \mathbb{R}, \varphi_\varepsilon(x,\cdot)$ est bijective ; on note $\beta_\varepsilon(x,\cdot)$ sa fonction inverse. Rappelons que $\beta_0(x,\cdot)$ est la section minimale du graphe inverse de $\varphi(x,\cdot)$. Maintenant pour $\varepsilon>0$ et $k \in \mathbb{R}$, posons $u_\varepsilon^k(x) := \beta_\varepsilon(x, w_*(x)+k)$ et $f_\varepsilon^k := f_* - u_* + u_\varepsilon^k$. Pour $\varepsilon = 0$ et $k \neq 0$, on remplace β_ε par β_0 dans les définitions ci-dessus ; l'hypothèse de surjectivité de $\varepsilon(x,\cdot)$ dans (H_{surj}) est utilisée pour justifier la définition de u_0^k. Finalement, en posant $u_0^0 = u_*$, on a l'inclusion $u_0^0 \in \beta_0(x, w_*(x)+0)$.

Pour n, m, posons

$$f^{n,m} := f_* + \big((f-f_*)^+ \wedge (f_1^n - f_*) \wedge n\big)\mathbb{1}_{B_n} - \big((f-f_*)^- \wedge (f_* - f_1^{-m}) \wedge m\big)\mathbb{1}_{B_m}. \quad (3.3)$$

Proposition 3.1.1. *Supposons que φ vérifie (H_0) et (H_{surj}). Avec la notation introduite ci-dessus, les propriétes suivantes sont vérifiées :*

i) *Pour tout $\varepsilon \in [0;1]$, u_* est une $\mathcal{D}'$ solution de l'équation $u - \Delta\varphi_\varepsilon(x,u) = f_*$.*

ii) *Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction u_ε^k est une solution $\mathcal{D}'$ de $u - \Delta\varphi_\varepsilon(x,u) = f_\varepsilon^k$; de plus, $w_\varepsilon^k := \varphi_\varepsilon \circ u_\varepsilon^k = w_* + k$.*
En particulier, $w_\varepsilon^k - w_* \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^1(\mathbb{R}^N, \rho)$ de poids $\rho(x) = e^{-c|x|}$, pour tout $c > 0$.

iii) *Pour tout $\varepsilon \in [0;1]$, l'application $k \mapsto f_\varepsilon^k$ est croissante au sens large. De plus, comme $k \to \pm\infty$, on a $f_\varepsilon^k \to \pm\infty$ presque partout sur $\mathbb{R}^N$. En particulier $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, on a $f^{n,m} \downarrow_{m\to\infty} \uparrow_{n\to\infty} f$.*

iv) *Pour $k > 0$, les applications $\varepsilon \mapsto (f_\varepsilon^k - f_*)$ et $\varepsilon \mapsto (u_\varepsilon^k - u_*)$ sont décroissantes au sens large. Pour $k < 0$, les mêmes applications sont croissantes au sens large. En particulier, si $f_1^{-k} \leq f \leq f_1^k$ pour un certain $k > 0$, alors $f_\varepsilon^{-k} \leq f \leq f_\varepsilon^k$ pour tout $\varepsilon \in [0;1]$. De même, si $u_\varepsilon^{-k} \leq u \leq u_\varepsilon^k$ pour un certain $k > 0$ et $\varepsilon > 0$, alors $u_0^{-k} \leq u \leq u_0^k$.*

Proposition 3.1.2. *Supposons que φ vérifie (H_0) et (H_{surj}).*

i) *Supposons que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ tel que $f_1^{-k} \leq f \leq f_1^k$ pour un certain $k > 0$. Alors il existe u $\mathcal{D}'$ solution du problème (1) satisfaisant les inégalités $w_* - k \leq \varphi \circ u \leq w_* + k$.*
En outre, le principe de comparaison vaut pour les solutions ainsi construites : si $f, \hat{f}$ sont deux données vérifiant $f_1^{-k} \leq f \leq \hat{f} \leq f_1^k$, alors les solutions associées $u, \hat{u}$ satisfont $u \leq \hat{u}$.

ii) *Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Soient $f^{n,m}$ les troncatures de f définies par (3.3). Alors il existe une suite $(u^{n,m})_{n,m}$ $\mathcal{D}'$ solutions de (1) associées aux donées $(f^{n,m})_{n,m}$ et telle que $u^{n,m}$ est décroissante au sens large en m, croissante au sens large en n.*

Preuve de la proposition 3.1.2. Elle se déroule en quatre étapes.

Étape 1.

i) Supposons d'abord que $(f - f_*) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et considérons φ_ε définie par (3.2). Nous construisons des solutions au problème régularisé et traduit (ici nous utilisons la proposition 3.1.1***i***)) :

$$(u - u_*) - \Delta\big(\varphi_\varepsilon(x,u) - \varphi_\varepsilon(x,u_*)\big) = f - f_*. \quad (3.4)$$

En réécrivant le problème en fonction de la nouvelle inconnue :
$\tilde{w} := \varphi_\varepsilon(x,u) - \varphi_\varepsilon(x,u_*)$, on réduit le problème ci-dessus à

$$\tilde{\beta}_\varepsilon(x,w) - \Delta w = \tilde{f}. \quad (3.5)$$

avec $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\tilde{\beta}_\varepsilon : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Carathéodory telle que $\tilde{\beta}_\varepsilon(x,0) = 0$ et $\left|\tilde{\beta}_\varepsilon(x,k)\right| \leq \frac{1}{\varepsilon}|k|$ pour presque partout $x \in \mathbb{R}^N$, pour tout $k \in \mathbb{R}$. Ainsi une solution variationnelle $\tilde{w}_\varepsilon \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$ à l'équation (3.5) peut être construite en minimisant la fonctionnelle coercive convexe

$$J_\varepsilon = \tilde{w} \in H^1(\mathbb{R}^N) \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}|\nabla \tilde{w}| + \int_0^{\tilde{w}} \tilde{\beta}_\varepsilon(x,s)\mathrm{d}s \right);$$

cette solution, est en particulier une solution au sens des distributions. Par conséquent $u_\varepsilon = u_* + \tilde{\beta}_\varepsilon \circ \tilde{w}_\varepsilon$ est une $\mathcal{D}'$ solution de (3.4).

Étape 2. Remarquons que par construction, $\tilde{w}_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N)$; donc pour tout $c>0, \tilde{w}_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^N, e^{-c|x|})$. Ainsi w_ε est $\mathcal{D}'$ solution de $u - \Delta\varphi_\varepsilon(x,u) = f$ qui satisfait $\varphi_\varepsilon \circ u_\varepsilon \in w_* + L^1(\mathbb{R}^N, e^{-c|x|})$. D'après la proposition 3.1.1***ii***), $u_\varepsilon^{\pm k}$ sont $\mathcal{D}'$ solutions de l'équation $u - \Delta\varphi_\varepsilon(x,u) = f_\varepsilon^{\pm k}$ telles que

$$w_\varepsilon^{\pm k} \equiv \varphi_\varepsilon \circ u_\varepsilon^{\pm k} \equiv w_* \pm k \in w_* + L^\infty(\mathbb{R}^N) \subset w_* + L^1\big(\mathbb{R}^N, e^{-c|x|}\big).$$

Remarquons que par l'hypothèse et la proposition 3.1.1***iv***), $f_\varepsilon^{-k} \leq f \leq f_\varepsilon^k$. Comme $w_\varepsilon - w_\varepsilon^{\pm k} \in L^1\big(\mathbb{R}^N, e^{-c|x|}\big)$ et φ_ε est uniformément continue dans la seconde variable, on en déduit que $u_\varepsilon^{-k} \leq u_\varepsilon \leq u_\varepsilon^k$ par le principe de comparaison du théorème 2.2.1***ii***). Par la monotonie de $\varphi_\varepsilon(x,\cdot)$, on déduit la borne uniforme $w_* - k \leq w_\varepsilon \leq w_* + k$ sur $w_\varepsilon \equiv \varphi_\varepsilon \circ u_\varepsilon$. En utilisant 3.1.1***iv***), on en déduit de plus la borne uniforme $u_0^{-k} \leq u_\varepsilon \leq u_0^k$ sur u_ε.

Étape 3. D'après les bornes uniformes de l'étape précédente, il s'en suit que les ensembles $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(w_\varepsilon)_\varepsilon$ sont relativement compacts dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ faiblement et en $w_* + L^\infty(\mathbb{R}^N)$ faiblement *. On peut extraire une suite (non étiquetée) telle que u_ε converge dans $\mathcal{D}'$ vers $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, et w_ε converge dans $\mathcal{D}'$ vers $w \in w_* + L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Puisque les suites sont liées par la relation $w_\varepsilon = \varphi(x,u_\varepsilon) + \varepsilon(u_\varepsilon - u_*)$ avec une fonction monotone $\varphi(x,\cdot)$, par l'argument de Minty on en déduit que $w = \varphi(x,u)$. Nous avons donc construit une $\mathcal{D}'$ solution u du problème (1) pour $f \in f_* + L^2(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_1^{-k} \leq f \leq f_1^k$ pour un certain $k>0$. De plus, cette solution satisfait

$$u_0^{-k} \leq u \leq u_0^k \quad \text{et} \quad w_* - k \leq \varphi \circ u \leq w_* + k. \tag{3.6}$$

Étape 4.: Nous pouvons laisser tomber l'hypothèse $f \in f_* + L^2(\mathbb{R}^N)$. En effet, remplaçons f avec les troncatures $f^{n,m}$ définies en (3.3) ; par construction, $f^{n,m} \in f_* + L^2(\mathbb{R}^N)$. Par les étapes précédentes, il existe des solutions correspondantes $u^{n,m}$ satisfaisant (3.6). Utilisant la proposition 3.1.1***iii***) les bornes uniformes (3.6) et en répétant les arguments de compacité de l'étape 3, on en déduit l'existence d'une $\mathcal{D}'$ solution u de donnée f.
De plus, u satisfait (3.6) ; en particulier, (3.6) permet d'utiliser le principe de comparaison du théorème 2.2.1***ii***). Ceci met fin à la preuve de ***i***).

ii) En prenant $k = \max\{m,n\} + 1$, on a

$$f_1^{-k} \leq f^{n,m+1} \leq f^{n,m} \leq f^{n+1,m} \leq f_1^k.$$

Par conséquent l'affirmation de ***ii***) est une conséquence immédiate du résultat de ***i***). □

Remarque 3.1.1.

Notons qu'une autre preuve d'existence a été donnée par Gallouët et Morel dans [16], pour tout $L^1(\mathbb{R}^N)$ de donnée f. A la place de (3.6), une estimation d'intégrabilité a été déduite de l'inégalité de Kato (1.5). La continuité uniforme de φ n'a pas été utilisée dans [16], et une plus grande intégrabilité (dans les espaces de Marcinkiewicz) a été montrée pour les solutions ainsi construites, comme dans [44].

En somme nous avons tiré l'existence sous l'hypothèse $f_1^{-k} \leq f \leq f_1^k$ faite dans la proposition 3.1.2***i***). La proposition 3.1.2***ii***) est un pas vers l'abandon de cette restriction ; mais nous avons besoin de bornes remplaçant (3.6) pour s'assurer que la suite bimonotone $(u^{n,m})_{n,m}$ converge vers une certaine limite finie. De telles bornes *ad hoc* sont obtenues dans les trois paragraphes ci-dessous, sous les hypothèses supplémentaires sur la non-linéarité de φ et/ou sur la donnée f.

3.2 Résultats bien posés dans $L^1\big(\mathbb{R}^N, e^{-c|x|}\big)$.

Théorème 3.2.1. *Supposons que φ satisfasse soit (H_{aut}) soit (H_{surj}). Supposons que (H_0) tient ; soit $\rho_c(x) = e^{-c|x|}$ avec $c^2 \in [0; m_\infty[$ (voir (2.4) pour la définition de m_∞). Alors $L^1\big(\mathbb{R}^N, \rho_c\big)$ est une classe bien posée pour le problème (1).*

Plus exactement, pour tout $f \in f_* + L^1(\mathbb{R}^N, \rho_c)$ il existe une unique u_f $\mathcal{D}'$ solution de (1) telle que $w_f = \varphi \circ u_f \in w_* + L^1(\mathbb{R}^N, \rho_c)$; nous avons également $u_f \in u_* + L^1(\mathbb{R}^N, \rho_c)$; $u_f - u_*$ et $w_f - w_*$ dépendent continûment dans $L^1(\mathbb{R}^N, \rho_c)$ sur $f - f_* \in L^1(\mathbb{R}^N, \rho_c)$; et l'application $f \mapsto u_f$ est d'ordre conservatrice sur $f_* + L^1(\mathbb{R}^N, \rho_c)$.

Remarquons que sous l'hypothèse (H_0), on a $|\varphi(x, y+z) - \varphi(x, y)| \leq const(1+|z|)$. Par conséquent l'implication

$$u - u_* \in L^1(\mathbb{R}^N, e^{-c|x|}) \Longrightarrow w - w_* \in L^1(\mathbb{R}^N, e^{-c|x|})$$

vaut pour $c > 0$. Ainsi pour $c > 0$ et sous les hypothèses $(H_{aut}), (H'_{surj})$, le théorème 3.2.1 signifie en particulier l'existence, l'unicité et la dépendance continue d'une solution $u_f \in L^1(\mathbb{R}^N, e^{-c|x|})$ pour toute donnée $f \in L^1(\mathbb{R}^N, e^{-c|x|})$.

D'après la remarque 2.2.1***ii***), dès que le théorème 3.2.1 est justifié on en déduit aisément.

Corollaire 3.2.1. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ une fonction uniformément continue croissante au sens large sur $\mathbb{R}^N$. Supposons que φ est strictement sous-linéaire au sens où*

$$\lim_{z \to +\infty} \frac{1}{z} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} |\varphi(y+z) - \varphi(y)| = 0.$$

Alors le problème $u - \Delta\varphi(u) = f$ est bien posé, au sens du théorème 3.2.1, dans l'espace $L^1\big(\mathbb{R}^N, \rho_c\big)$ avec $\rho_c = e^{-c|x|}$ pour tout $c \in [0; +\infty[$.

Preuve du théorème 3.2.1. Au vu du théorème 2.2.1 et de la proposition 2.3.2, il ne reste plus qu'à prouver l'existence.

Sous l'hypothèse (H_{surj}), on utilise la proposition 3.1.2***ii***). Elle donne une suite bimonotone de $\mathcal{D}'$ solutions $u^{n,m}$ correspondant aux données tronquées $f^{n,m}$; rappelons que $f^{n,m}$ converge vers f presque partout par la proposition 3.1.1***iii***). Le cas de l'hypothèse (H_{aut}) est similaire avec $f^{n,m}$ donnée par (3.1).

Par le théorème convergence monotone ou par le théorème de convergence dominée, $f^{n,m}$ converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}^N, \rho_c)$ lorsque $m \to \infty,\ n \to \infty$. Ainsi $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |f^{n,m} - f_*|\rho_c$ est bornée par une constante indépendante de m, n. Des estimations de la proposition 2.3.2 appliquées aux solutions $u^{n,m}$ et u_* il résulte que les quantités

$$\int_{\mathbb{R}^N} |w^{n,m} - w_*|\rho_c \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u^{n,m} - u_*|\rho_c \tag{3.7}$$

sont bornées par une constante indépendante de m, n. Le théorème de convergence monotone permet de conclure qu'il existe $u \in u_* + L^1(\mathbb{R}^N, \rho_c)$ telle que $u^{n,m} \downarrow_{m\to+\infty} \uparrow_{n\to+\infty} u$. De plus, $w^{n,m}$ converge vers $w = \varphi \circ u$ dans le même sens, et $w \in w_* + L^1(\mathbb{R}^N, \rho_c)$. Il s'en suit que u est la solution recherchée. □

Remarque 3.2.1.

Examinons brièvement le cas plus fin où $m_k = m_\infty$ pour k assez grand ; un exemple est le cas d'une autonome linéaire φ (voir Remarque 2.2.1***iii***)). En nous basant sur le résultat de comparaison du théorème 2.2.1***ii***), nous pouvons obtenir un résultat de dépendance continue (similaire à celui de la proposition 2.3.1) pour les données dans l'espace critique $L^1(\mathbb{R}^N, e^{-\sqrt{m_\infty}|x|})$. Mais on ne sait pas si l'existence d'une solution est valable pour ces données.

3.3 Résultats bien posés dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Nous restreignons notre attention au cas autonome $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Le corollaire 3.2.1 conduit aisément au résultat suivant.

Théorème 3.3.1. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction continue croissante au sens large. Alors $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ est une classe bien posée pour le problème* (1).

Plus exactement, pour tout $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ il existe une unique $\mathcal{D}'$ solution u_f au problème (1) *dans la classe $L^\infty(\mathbb{R}^N)$; l'application $f \mapsto u_f$ préserve l'ordre (le principe du maximum est vrai en particulier, c'est-à-dire* ess inf $f \le u_f \le$ ess sup f*) ; dans le cas où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite uniformément bornée de fonctions qui converge vers f presque partout sur $\mathbb{R}^N$, les solutions correspondantes u_{f_n} convergent vers u_f presque partout sur $\mathbb{R}^N$.*

Preuve. Appliquons le théorème 3.2.1 au problème (1) en remplaçant φ par la fonction tronquée

$$\varphi_M : z \mapsto \big(\varphi(z) \vee \varphi(-M)\big) \wedge \varphi(M),$$

avec $M = \|f\|_{L^\infty}$. La fonction φ_M est uniformément continue, et les constantes $M^- :=$ ess inf$f$ et $M^+ :=$ ess sup$f$ sont évidemment constantes $\mathcal{D}'$ solutions du

problème $u - \Delta\varphi_M(u) = f$ avec les seconds membres M^- et M^+, respectivement. Ainsi l'existence d'une unique solution associée u_f^M (ensemble avec le principe de comparaison) découle du corollaire 3.2.1. Du fait du principe de comparaison, on a : $M^- \leq u_f^M \leq M^+$, de sorte que $\varphi(u_f^M) \equiv \varphi_M(u_f^M)$, donc u_f^M résoud également le problème (1).

Pour le résultat d'unicité et de comparaison, considérons ces deux solutions $u_1, u_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ de données $f_1, f_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $f_1 \leq f_2$. Posons

$$M' = \max\{||f_1||_{L^\infty}, ||f_2||_{L^\infty}, ||u_1||_{L^\infty}, ||u_2||_{L^\infty}\}$$

et φ tronquée au niveau M'. D'après le corollaire 3.2.1, il s'en suit que :

$$u_1 = u_{f_1}^{M'} \leq u_{f_2}^{M'} = u_2.$$

Finalement l'exigence de dépendance continue du théorème découle de l'exigence et des propriétes de comparaison, de la même manière que dans la proposition 2.3.1. □

Remarque 3.3.1.

Nous indiquons ici un cadre qui remplace L^∞ dans le cas d'une non-linéarité non autonome de φ. Supposons que φ vérifie (H'_{surj}) et (H_0) (à la place de la restriction de la continuité uniforme dans (H_0), il est suffisant pour supposer que pour tout $k > 0$, la fonction tronquée $(x, z) \mapsto \big(\varphi(x, z) \vee (-k)\big) \wedge k$ uniformément continue dans la seconde variable.

Pour $k \in \mathbb{R}$, posons $u_0^k = \beta_0(x, k)$. Introduisons $L^\infty_\varphi(\mathbb{R}^N)$ comme l'ensemble de toutes les fonctions f mesurables sur $\mathbb{R}^N$ tel que

$$\exists\, k \in \mathbb{R} \quad u_0^{-k} \leq f \leq u_0^k.$$

Par conséquent $L^\infty_\varphi(\mathbb{R}^N)$ est une classe bien posée pour le problème (1), au même sens que le théorème 3.3.1. Le principe du maximum correspondant s'écrit :

$$u_0^l \leq f \leq u_0^k \qquad \Longrightarrow \qquad u_0^l \leq u_f \leq u_0^k.$$

La preuve de la remarque suit les lignes de la preuve du théorème 3.3.1, avec M^-, M^+ remplaçés par u_0^l, u_0^k et avec les troncatures φ_M remplaçées par les troncatures de la forme $(\varphi \vee (-k)) \wedge k$.

3.4 Résultats bien posés dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Nous étudions ici l'existence de solutions de (1) sans restrictions de croissance à l'infini, sous la condition généralisée de Keller Osserman sur la non-linéarité de φ. L'argument basé sur « l'estimation locale » de [8], [17] est quelque peu simplifié grâce à la propriété de comparaison, comme par exemple dans [18], et des approximations de données bi-monotones d'Ammar et Wittbold [4].

Contrairement à [13], [16], [17], le problème (1) est écrit en fonction de l'inconnue u plutôt qu'en fonction de $w = \varphi \circ u$. Les deux cadres ne sont pas exactement équivalents, sauf pour presque partout $x \in \mathbb{R}^N$ la fonction $\varphi(x, \cdot)$ est strictement croissante.

Théorème 3.4.1. *Supposons que φ satisfasse (H_0) et de plus que la condition généralisée de Keller Osserman soit vérifiée. Supposons que (H_{aut}) ou (H_{surj}) soit vérifiée. Le problème (1) est bien posé dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.*

Plus exactement, pour toute donnée $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ il existe une unique $\mathcal{D}'$ solution u_f de (1), et les applications

$$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \mapsto \begin{cases} u_f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{sont continues et préservent l'ordre.} \\ w_f := \varphi \circ u_f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Preuve. À l'aide du théorème 2.1.1 et de la proposition 2.3.1 nous prouvons l'existence d'une $\mathcal{D}'$ solution pour toute donnée f dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Effectuons les changements $\begin{cases} f \rightsquigarrow f - f_* \\ u \rightsquigarrow u - u_* \\ \varphi(\cdot, z) \rightsquigarrow \varphi(\cdot, z + u_*(\cdot)) - \varphi(\cdot, u_*(\cdot)). \end{cases}$

Étape 1. Supposons que u soit une $\mathcal{D}'$ solution de (1) avec une donnée f et $w = \varphi \circ u$.

Par hypothèse, il existe un module bijectif de continuité ω de φ tel que $\varpi = \omega^{-1}$ vérifie (H_{KO}). Comme ϖ est super-additive, positive et croissante au sens large ϖ satisfait l'inégalité

$$\forall\, r \geq t > 0, \qquad \frac{\varpi(r)}{r} \geq \frac{\varpi([r/t]t)}{([r/t]+1)t} \geq \frac{[r/t]t}{([r/t]+1)t} \frac{\varpi([r/t]t)}{[r/t]t} \geq \frac{1}{2}\frac{\varpi(t)}{t} \tag{3.8}$$

où $[r/t]$ représente le pus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $r/t \geq n$.

L'inégalité (3.8) remplace avec succès la monotonie de $\varpi(t)/t$ dans la preuve de [30, Lemme 3]. En modifiant légèrement la preuve du lemme 2 dans la même référence, on obtient pour tout $R > 0, R' > R$ l'estimation

$$\int_{B_R} \varpi(Z) \leq C(R, R') \left(1 + \int_{B_{R'}} |f|\right)$$

valable pour toute fonction non-négative Z satisfaisant

$$\varpi(Z) - \Delta Z \leq |f| \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N). \tag{3.9}$$

Puisque $\varphi(x, 0) = 0$ comme dans la preuve du théorème 2.1.1, étape 1, on en déduit que (3.9) est vérifiée avec $Z = w^{\pm}$. Par la convexité de ϖ, $Z \leq const(1 + \varpi(Z))$. Il s'en suit que $\displaystyle\int_{B_R} |w|$ est estimée par une constante qui ne dépend que de $R, R' > R$ et de $\displaystyle\int_{B_{R'}} |f|$.

Étape 2. Fixons maintenant $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. En supposant (H_{surj}), on définit $f^{n,m}$ par (3.3) et on utilise la proposition 3.1.2. Soit $(u^{m,n})_{m,n}$ la suite bimonotone de solutions correspondantes. Sous l'hypothèse (H_{aut}), suivant [4] nous définissons $f^{n,m}$ par (3.1) et utilisons les résultats de [44] (voir 4.1).

Par construction de $f^{m,n}$, on a la borne uniforme $\int_K |f^{m,n}| \leq const(K)$ pour tout $K \in \mathbb{R}^N$. Par l'étape 1, les fonctions $w^{m,n} = \varphi \circ u^{m,n}$ sont localement équi-intégrables.

Fixons m et soit $n \to \infty$. Par le principe de comparaison du théorème 2.1.1 les deux suites $(u^{m,n})_n, (w^{m,n})_n$ sont croissantes au sens large. Ainsi $w^{m,n}$ converge dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ vers une fonction w^m comme $n \to \infty$; de plus, $u^{m,n}$ converge dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ vers une fonction mesurable u^m à valeurs dans $]-\infty;+\infty]$, et $w^m = \varphi \circ u^m$. En passant à la limite des identités intégrales satisfaîtes par $u^{m,n}$, par le théorème de convergence monotone on en déduit que pour tout $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, il existe la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u^{m,n}\xi = \int_{\mathbb{R}^N} f^m \xi + \int_{\mathbb{R}^N} w^m \Delta\xi < +\infty,$$

où $f^m = \lim_{n\to+\infty} f^{m,n}$. Par le théorème de convergence monotone $u^{m,n}\xi$ converge vers $u^m\xi$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ pour un arbitraire non négatif $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. On en déduit que $u^m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Par conséquent u^m est une $\mathcal{D}'$ solution de (1) de donnée f^m.

Nous passons alors à la limite quand $m \to +\infty$ de la même manière . □

Chapitre 4

Unicité de solution.

Nous obtenons ici des résultats d'unicité, de contraction et de comparaison pour le problème (1) dans les espaces pondérés $L^1\big(\mathbb{R}^N,\rho\big)$, avec $N \geq 3$ et des poids $\rho(x)$ satisfaisant $-\Delta\rho \geq 0$.

4.1 La propriété de contraction et de comparaison.

Définition 4.1.1. [*24*] (**Transformée de Legendre**).
Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur $\mathbb{R}^N$. Sa transformée de Legendre est la fonction convexe $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(p) = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \ (\langle p, x\rangle - f(x)),$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dénote le produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$.

Lemme 4.1.1. *Soit $\varpi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction convexe telle que $\varpi(r) = 0$ si et seulement si $r = 0$. Soit $\varpi^* : z \in \mathbb{R}^+ \to \sup_{r\in\mathbb{R}^+}(rz-\varpi(r))$ sa transformée de Legendre (Fenchel). Alors* $\operatorname{ess\,lim}_{z\downarrow 0}(\varpi^*)'(z) = 0$.

Preuve. Il est bien connu que ϖ^* est convexe (et donc sa dérivée est presque partout définie sur $\mathbb{R}^+$), et ϖ est la transformée de Legendre (Fenchel) de ϖ^*. De plus, $\varpi^* = 0$. Nous raisonnons par l'absurde. Si $\operatorname{ess\,lim}_{z\downarrow 0}(\varpi^*)'(z)$ est non nulle, alors $(\varpi^*)'$ est minorée par un certain $c>0$. De ce fait $\varpi^*(z) \geq cz$ pour tout z. Par suite $\varpi(r) = \sup_{z\in\mathbb{R}^+}(rz - \varpi^*(z)) \leq \sup_{z\in\mathbb{R}^+}(rz - cz)$ qui est est nulle pour tout $r \leq c$. Ceci contredit l'hypothèse $\varpi(r) > 0$ pour $r > 0$. □

Théorème 4.1.1. *Supposons $N \geq 3$ et (H_0).*

Soient u_i $\mathcal{D}'$ solutions de (1) correspondant aux données $f_i \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N), i = 1, 2$. Supposons que $W^+ = (w_1 - w_2)^+ \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, où $w_i = \varphi \circ u_i$.

Soit $R > 0$, $\rho(x) = (|x| \vee R)^{2-N}$. Supposons $(f_1 - f_2)^+ \in L^1(\mathbb{R}^N, \rho)$. Alors $(u_1 - u_2)^+ \in L^1(\mathbb{R}^N, \rho)$ et

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_1 - u_2)^+\rho \leq \int_{\mathbb{R}^N} (f_1 - f_2)\mathrm{sign}^+(u_1 - u_2)\rho \tag{4.1}$$

En particulier, si $f_1 \leq f_2$, alors $u_1 \leq u_2$.

Remarque 4.1.1.

Avec les mêmes arguments appliqués au cas $N = 2$, on déduit (4.1) avec $\rho \equiv 1$. On obtient ainsi, en particulier le résultat de contraction de $L^1(\mathbb{R}^2)$ pour les solutions L^∞ de $u - \Delta\varphi(u) = f$, résultat déjà connu. En effet, il est contenu dans le théorème 2.2.1 (voir Remarque 2.2.1***i***)) car l'hypothèse $u_1, u_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ permet d'utiliser un module local de continuité dans le théorème 2.2.1. Notons également que ce cas relève essentiellement d'une adaptation près des inégalités de Kato des solutions faibles à très faibles de l'équation stationnaire, voir la proposition 1.8.1 contenue dans le travail de MALIKI et TOURÉ dans [23] (voir aussi OUÉDRAOGO [43] et ses références, où le cas de la diffusion anisotrope est analysé). Aussi le cas $N = 1$, avec le poids constant $\rho \equiv 1$, est couvert par le résultat de [23].

Preuve. Utilisons (1.6) avec les fonctions tests $\rho_\varepsilon(x) = (|x| \vee R)^{2-N-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, et soit $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Pour cela, soit $\rho_{\varepsilon,L}(x) = \Big((|x|\vee R)^{2-N-\varepsilon} - (L)^{2-N-\varepsilon}\Big)^+$, $L > R$. Régularisons $\rho_{\varepsilon,L}$ par convolution, en supprimant la partie de la mesure négative de la distribution $\Delta\rho_{\varepsilon,L}$ concentrée sur $\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| = R\big\}$, de (2.2) on déduit

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_1 - u_2)^+ \rho_{\varepsilon,L} \le \int_{\mathbb{R}^N} W^+ \Delta\rho_{\varepsilon,L} + \int_{\{|x|=L\}} W^+ (N - 2 + \varepsilon) L^{1-N-\varepsilon}$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^N} (f_1 - f_2)\mathrm{sign}^+(u_1 - u_2)\rho_{\varepsilon,L}$$

. $L > R$, où $\Delta\rho_{\varepsilon,L}$ est pris dans le sens ponctuel (presque partout sur $\mathbb{R}^N$). Comme W^+ est bornée, l'intégrale sur la sphère $\{|x| = L\}$ est majorée par $const\, L^{N-1} L^{1-N-\varepsilon} = const\, L^{-\varepsilon}$. On calcule $\Delta\rho_{\varepsilon,L} = \varepsilon(N-2+\varepsilon)|x|^{-N-\varepsilon}\mathbb{1}_{R<|x|<L}$ et notons que $|x|^{-N-\varepsilon}\mathbb{1}_{|x|>R} = |x|^{-2}\rho_\varepsilon \mathbb{1}_{|x|>R}$ est intégrable. Soit $L \to \infty$ grâce à l'hypothèse de bornitude sur W^+ et l'hypothèse d'intégrabilité sur $(f_1 - f_2)^+$ on déduit que $(u_1 - u_2)^+ \in L^1(\mathbb{R}^N, \rho_\varepsilon)$ et

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_1 - u_2)^+ \rho_\varepsilon \le \varepsilon(N - 2 + \varepsilon) \int_{\{|x|>R\}} W^+ |x|^{-2} \rho_\varepsilon$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^N} (f_1 - f_2)\mathrm{sign}^+(u_1 - u_2)\rho_\varepsilon. \tag{4.2}$$

Fixons $\delta > 0$. Par hypothèse et Remarque 1.9.1***vii***), φ admet un module concave de continuité ω. En utilisant (2.1) et en posant $\varpi = \omega^{-1}$, à partir de (4.2), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big((1-\delta)(u_1 - u_2)^+ + \delta\varpi(W^+)\Big)\rho_\varepsilon \le c\,\varepsilon \int_{\{|x|>R\}} W^+ |x|^{-2}\rho_\varepsilon$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^N} (f_1 - f_2)\mathrm{sign}^+(u_1 - u_2)\rho_\varepsilon. \tag{4.3}$$

Montrons que

$$c\,\varepsilon \int_{\{|x|>R\}} W^+ |x|^{-2}\rho_\varepsilon \le \delta \int_{\mathbb{R}^N} \varpi(W^+)\rho_\varepsilon + r^\delta(\varepsilon) \tag{4.4}$$

avec $r^\delta(\varepsilon) \to 0$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$. En effet, soit ϖ^* la transformée de Legendre de ϖ. Par définition, on a

$$c\,\varepsilon W^+|x|^{-2} = \delta\left(W^+\frac{c\,\varepsilon}{\delta}|x|^{-2}\right) \leq \delta\varpi(W^+) + \delta\varpi^*\left(\frac{c\,\varepsilon}{\delta}|x|^{-2}\right);$$

$$c\,\varepsilon\int_{\{|x|>R\}} W^+|x|^{-2}\rho_\varepsilon \leq \delta\int_{\mathbb{R}^N}\varpi(W^+)\rho_\varepsilon + \delta\int_{\{|x|>R\}}\varpi^*\left(\frac{c\,\varepsilon}{\delta}|x|^{-2}\rho_\varepsilon\right).$$

Par la convexité de ϖ^*, on a $\varpi^*(\frac{c\,\varepsilon}{\delta}|x|^{-2}) \leq (\varpi^*)'(\frac{c\,\varepsilon}{\delta}R^{-2})\frac{c\,\varepsilon}{\delta}|x|^{-2}$ chaque fois que $|x| \geq R$.

Le lemme 4.1.1 permet de déduire que $(\varpi^*)'(\frac{c\,\varepsilon}{\delta}R^{-2}) := \bar{\bar{o}}_\varepsilon$ tend vers zéro lorsque ε tend zéro. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
0 \leq r^\delta(\varepsilon) &:= \delta\int_{\{|x|>R\}}(\varpi^*)'(\frac{c\,\varepsilon}{\delta}|x|^{-2})\rho_\varepsilon \leq \bar{\bar{o}}_\varepsilon\int_{\{|x|>R\}} c\,\varepsilon|x|^{-2}\rho_\varepsilon \\
&:= c\,\varepsilon\bar{\bar{o}}\int_R^{+\infty} r^{-2+2-N-\varepsilon}r^{N-1}\mathrm{d}r \\
&:= c\,\varepsilon\bar{\bar{o}}\int_R^{+\infty} r^{-\varepsilon-1}\mathrm{d}r \\
&:= (c\,\varepsilon\bar{\bar{o}})\left(\frac{1}{-\varepsilon}[r^{-\varepsilon}]_R^{+\infty}\right) \\
&:= (c\,\varepsilon\bar{\bar{o}})\left(\frac{1}{-\varepsilon}[0-R^{-\varepsilon}]\right) \\
&:= (c\,\varepsilon\bar{\bar{o}})\frac{1}{\varepsilon}R^{-\varepsilon} \\
&:= c\,R^{-\varepsilon}\bar{\bar{o}} \;\to 0 \text{ lorsque } \varepsilon \to 0.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Soit donc $\varepsilon \to 0$ puis $\delta \to 0$, de (4.3), (4.4), (4.5) on obtient $(u_1-u_2)^+ \in L^1(\mathbb{R}^N,\rho)$ et (4.3) est vérifiée. □

Or ce dernier résultat implique un résultat analogue dans $L^1(\mathbb{R}^N,\rho)$ pour des poids super-harmoniques ρ assez généraux. En effet, rappelons que la convolution d'un terme source μ avec la solution fondamentale du laplacien donne la solution du problème $-\Delta\rho = \mu$ (cf par exemple [[9], Proposition 8] pour un énoncé similaire). Le cas $\mu \geq$ correspond aux fonctions super-harmoniques ; puis en exploitant la troncature de la solution fondamentale avec le paramètre $R>0$, la discrétisation de la mesure μ sur une grille fine, et le théorème de convergence monotone lorsque $R \longrightarrow 0$. On en déduit la généralisation suivante.

Corollaire 4.1.1. *Dans les hypothèses du théorème* 4.1.1*, en remplaçant le poids ρ par le poids super harmonique*

$$\rho^\mu : x \to \int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\mathrm{d}\mu(y),$$

où μ est une mesure de Radon telle que ρ^μ est bien définie comme un élément de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Alors (4.1) *reste vraie.*

Preuve. Introduisons pour $R>0$,

$$\rho_R^\mu : x \to \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(|x-y| \vee R)^{N-2}} \mathrm{d}\mu(y). \tag{4.6}$$

Comme $\rho_R^\mu \leq \rho^\mu$ par construction, alors l'hypothèse $(f_1 - f_2)^+ \in L^1(\mathbb{R}^N, \rho^\mu)$ donne $(f_1 - f_2)^+ \in L^1(\mathbb{R}^N, \rho_R^\mu)$. Supposons un instant qu'un théorème similaire au théorème 4.1.1 soit prouvé avec un poids ρ_R^μ déduit par linéarité du théorème 4.1.1 lui-même (car ρ dans son énoncé peut être remplaçé par n'importe quelle translation $\rho(\cdot - y)$), $y \in \mathbb{R}^N$. Alors on peut laisser R tendre vers zéro dans l'inégalité

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_1 - u_2)^+ \rho_R^\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} (f_1 - f_2) \mathrm{sign}^+(u_1 - u_2) \rho_R^\mu. \tag{4.7}$$

En séparant $(f_1 - f_2)$ en parties positive et négative et en utilisant l'intégrabilité supposée de $(f_1 - f_2)^+$ avec le poids ρ^μ, on applique le théorème de convergence monotone lorsque R tend vers zéro.

Il reste à évaluer (4.7). Pour ce faire nous allons exploiter le théorème 4.1.1 dans le cadre d'une procédure d'approximation en deux étapes. D'abord, pour $L>0$ on pose $\mu_L = \mu \mathbb{1}_{[-L,L[^N}$ et introduisons le poids correspondant $\rho_R^{\mu L}$ avec la formule analogue à (4.6). Si la propriété de contraction pondérée (4.7) est obtenue avec des poids $\rho_R^{\mu L}$ à la place de ρ_R^μ à la limite $L \to \infty$, en utilisant le théorème de convergence monotone ci-dessus on en déduite la propriété (4.7) elle même. Maintenant, pour évaluer l'analogue de (4.7) avec des poids $\rho_R^{\mu L}$, pour R, L fixés et $k \in \mathbb{N}$ on pose

$$\mu_{L,k}(\cdot) = \sum_{-Lk \leq i_1, \ldots, i_N < Lk} \mu(\Pi_{i_1 \ldots i_N}) \delta(\cdot - y_{i_1 \ldots i_N})$$

avec $\Pi_{i_1 \ldots i_N}$ et leurs centres $y_{i_1 \ldots i_N}$ donnés par

$$\Pi_{i_1 \ldots i_N} = \left[\frac{i_1}{k}, \frac{i_1+1}{k}\right[\times \ldots \times \left[\frac{i_N}{k}, \frac{i_N+1}{k}\right[, \quad y_{i_1 \ldots i_N} = \left(\frac{i_1+1/2}{k}, \ldots, \frac{i_N+1/2}{k}\right);$$

c'est la discrétisation de μ_L avec une combinaison linéaire de masses de Dirac sur une grille cartésienne uniforme. Introduisons les poids associés à la recette de (4.6). Puisque $\rho_R^{\mu L,k}$ est une combinaison linéaire de poids décalés apparaissant dans les inégalités (4.1), l'estimation (4.7) de poids ρ_R^μ remplaçé par $\rho_R^{\mu L,k}$ est immédiate. Maintenant ce n'est pas difficile de vérifier que les poids $\rho_R^{\mu L,k}$ et $\rho_R^{\mu L}$ sont équivalents à une constante multiplicative près de $\left(1+\frac{1}{2kR}\right)^{N-2}$; cette vérification est reportée au lemme 4.1.2 ci-dessous. En particulier si $(f_1 - f_2)^+ \in L^1(\mathbb{R}^N, \rho^\mu)$ par construction, on a aussi $(f_1 - f_2)^+ \in L^1(\mathbb{R}^N, \rho^\mu)$ pour $\rho = \rho_R^\mu$, $\rho = \rho_R^{\mu L}$ (car $\rho_R^{\mu L} \leq \rho_R^\mu \leq \rho^\mu$) et pour $\rho = \rho_R^{\mu L,k}$ (par ci-dessus l'équivalence des poids indiqués). Étant donné que $\left(1 + \frac{1}{2kR}\right)^{N-2} \to 1$ lorsque $k \to \infty$, le passage à la limite lorsque $k \to \infty$ dans (4.7) de poids $\rho_R^{\mu L,k}$ est trivial. □

Lemme 4.1.2. *Avec la notation de la preuve ci-desssus, il vaut pour tout* $x \in \mathbb{R}^N$

$$\left(1 + \frac{1}{2kR}\right)^{-(N-2)} \rho_R^{\mu L} \leq \rho_R^{\mu L,k} \leq \left(1 + \frac{1}{2kR}\right)^{N-2} \rho_R^{\mu L}.$$

Preuve. Pour $x, y \in \mathbb{R}^N$, posons $d_R(x,y) = \frac{1}{(|x-y| \vee R)^{N-2}}$. Par construction de $\rho_R^{\mu L,k}$ et $\rho_R^{\mu L}$ il suffit de montrer que chaque fois que $|y - y_*| \leq \frac{1}{2k}$ il y a

$$\left(1 + \frac{1}{2kR}\right)^{-1} d_R(x,y) \leq d_R(x,y_*) \leq \left(1 + \frac{1}{2kR}\right) d_R(x,y).$$

Cette dernière est suivie d'une étude de cas simple. En effet,

(a) Si $|x-y|, |x-y_*| \leq R$ alors $d_R(x,y) = R^{2-N} = d_R(x,y_*)$.

(b) Si $|x-y|, |x-y_*| \geq R$ alors

$$\frac{d_R(x,y)}{d_R(x,y_*)} = \left(\frac{|x-y_*|}{|x-y|}\right)^{N-2} \leq \left(\frac{|x-y| + |y-y_*|}{|x-y|}\right)^{N-2} \leq \left(1 + \frac{1/(2k)}{R}\right)^{N-2};$$

la borne supérieure est obtenue en échangeant simplement les rôles de y, y_*.

(c) Si $|x-y_*| \leq R \leq |x-y|$ alors

$$\frac{d_R(x,y)}{d_R(x,y_*)} = \left(\frac{R}{|x-y|}\right)^{N-2} \leq 1$$

et

$$\frac{d_R(x,y_*)}{d_R(x,y)} = \left(\frac{|x-y|}{R}\right)^{N-2} \leq \left(\frac{|x-y_*| + |y_*-y|}{R}\right)^{N-2} \leq \left(1 + \frac{1/(2k)}{R}\right)^{N-2}.$$

(d) Enfin, si $|x-y| \leq R \leq |x-y_*|$ alors l'argument de **(c)** s'applique en échangeant les rôles de y, y_*.

□

Remarque 4.1.2.

Au lieu de laisser R tendre vers zéro comme dans la preuve ci-dessus nous pouvons remettre à l'échelle les poids du théorème 4.1.1, de sorte que nous pouvons prendre $\left(\frac{|x|}{R} \vee 1\right)^{2-N}$; alors nous pouvons laisser $R \to +\infty$ et atteindre le poids $\rho = 1$. Cela donne une autre technique pour prouver l'unicité des solutions L^∞ de (1) ; cf [5] pour une application des techniques ci-dessus aux problèmes de convection-diffusion.

4.2 Résultats bien posés dans $L^1(\mathbb{R}^N, \rho)$ pour les solutions L^∞.

Théorème 4.2.1. *Soit φ une fonction continue croissante au sens large. Soit $N \geq 3$. Soit $R > 0$ et $\rho(x) = \left(|x| \vee 1\right)^{2-N}$. Alors $L^1(\mathbb{R}^N, \rho) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ est une classe bien posée pour le problème* (1).

Plus excatement, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N, \rho) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ il existe une unique $\mathcal{D}'$ solution u_f de (1) *telle que $w_f := \varphi \circ u_f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. De plus, $u_f \in L^1(\mathbb{R}^N, \rho) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$; l'application $f \in L^1(\mathbb{R}^N, \rho) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \mapsto u_f$ est une contraction préservant l'ordre dans $L^1(\mathbb{R}^N, \rho)$; et le principe du maximum est vrai c'est-à-dire* ess inf $f \leq$ ess sup f.

Remarque 4.2.1.

En remplaçant ρ par un poids super-harmonique ρ^μ comme dans le corollaire 4.1.1, de la même manière on obtient les résultats bien posés pour les données dans $L^1(\mathbb{R}^N,\rho)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Preuve du théorème 4.2.1. Pour l'existence on utilise les mêmes arguments que ceux utilisés pour la preuve du théorème 3.2.1. On considère les non-linéarités tronquées $z\mapsto \big(\varphi(z)\vee\varphi(-M)\big)\wedge\varphi(M)$, où $M=\|f\|_{L^\infty}$. On considère la donnée tronquée $f^{n,m}$ donnée par 3.1 et la suite bimonotone correspondante de solutions $(u^{n,m})_{n,m}$ (donnée par les résultats de [44], voir 3.1), qui vérifie aussi $\|u^{n,m}\|_{L^\infty}\le M$. Au lieu de (3.7) utilisons les estimations uniformes de $\|w^{n,m}-w_*\|_{L^\infty}$ et $\int_{\mathbb{R}^N}|u^{n,m}-u_*|\rho$ (avec $u_*\equiv 0, w_*\equiv 0$) déduites du 4.1.1 (voir(4.1)). Il vient donc que $u^{n,m}$ (resp., $w^{n,m}$) convergent dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ vers une fonction u_f dans $L^1(\mathbb{R}^N,\rho)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ (resp. vers la fonction $w_f:=\varphi\circ u_f\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$). La fonction u_f est la solution recherchée.

L'unicité et la comparaison sont obtenues comme dans la preuve du théorème 3.3.1 ; la dépendance continue découle du principe de comparaison, à la manière de la Proposition 2.3.1.

□

Comme dans la Remarque 3.3.1, le résultat du théorème 4.2.1 peut être généralisé au cas d'une non-linéarité non autonome φ ; il suffit de remplacer l'espace L^∞ pour f,u par l'espace L^∞_φ.

Remarque 4.2.2.

Supposons que la non-linéarité φ vérifie (H'_{surj}). Supposons que pour tout $k>0$, la fonction tronquée $(x,z)\big(\varphi(x,z)\vee\varphi(-k)\big)\wedge\varphi(k)$ est uniformément continue dans la seconde variable (l'hypothèse (H_0) est la condition suffisante plus forte).

Soit $N\ge 3$. Soient $R>0$ et $\rho(x)=\big(|x|\vee R\big)^{2-N}$.

Avec la notation de la Remarque 3.3.1, $L^1(\mathbb{R}^N,\rho)\cap L^\infty_\varphi$ est une classe bien posée pour le problème (1).

Plus excatement, pour tout $f\in L^1(\mathbb{R}^N,\rho)\cap L^\infty_\varphi(\mathbb{R}^N)$ il existe une unique $\mathcal{D}'$ solution u_f de (1) telle que $w_f:=\varphi\circ u_f\in L^\infty_\varphi(\mathbb{R}^N)$. Nous avons également, u_f appartient à $L^1(\mathbb{R}^N,\rho)\cap L^\infty_\varphi(\mathbb{R}^N)$; l'application $f\in L^1(\mathbb{R}^N,\rho)\cap L^\infty_\varphi(\mathbb{R}^N)\mapsto u_f$ est une contraction préservant l'ordre dans $L^1(\mathbb{R}^N,\rho)$; et le principe du maximum suivant est vrai :

$$u_0^l\le f\le u_0^k\qquad\Longrightarrow\qquad u_0^l\le u_f\le u_0^k.$$

Preuve. Compte tenu de la continuité uniforme en z de la fonction $\big(\varphi(x,z)\vee\varphi(-k)\big)$, la Proposition 3.1.2***ii***) donne une suite bimonotone $u^{n,m}$ de solutions de données $f^{n,m}$ dans (3.3). Pour montrer que la limite u_f de $u^{n,m}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^N,\rho)$, nous utilisons l'estimation (4.1). En effet, un point crucial de la construction de L^∞_φ est que $w=\varphi\circ u\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ quand $u\in L^\infty_\varphi(\mathbb{R}^N)$. Ceci nous permet d'appliquer le théorème 4.2.1.

Ainsi suit l'existence ; les autres points sont montrés comme dans la preuve du théorème 4.2.1. □

Conclusion

Ce mémoire nous a permis d'étudier le cas stationnaire des problèmes elliptiques du genre $u = \Delta\varphi(x,u)+f(x)$ dans $\mathbb{R}^N$. Tout d'abord, dans le premier chapitre, nous avons fourni des outils nécessaires à l'étude du problème (1). Ensuite, au chapitre 2 nous avons étendu les résultats classsiques de Brézis [13] sur les solutions localement intégrables de l'équation $u = \Delta(|u|^{m-1}u)+f(x)$, $0 < m < 1$. Nous avons donné une théorie complète du bien posé pour les solutions L^1_{loc} sous une condition de Keller-Osserman généralisée, en étendant aussi les résultats de Gallouët et Morel [17]. Au chapitre 3, pour des non-linéarités φ uniformément continues en u une estimation quantitative est obtenue dans le cadre des espaces pondérés $L^1(\mathbb{R}^N,\rho)$ avec une décroissance exponentielle de poids ρ. Enfin nous avons revisité au dernier chapitre, les résultats bien posés de Bénilan et Crandall [9] dans les espaces $L^1(\mathbb{R}^N,\rho)$, pour $N \geq 3$ avec des poids super-harmoniques.

Comme perspective, nous envisageons étudier le problème d'évolution

$$u_t = \Delta\varphi(x,u) + f(t,x), \qquad u|_{t=0} = u_0$$

associé au problème (1) étudié dans ce mémoire.

Bibliographie

[1] BORIS ANDREIANOV and MOHAMED MALIKI ; Sur les classes d'équations de diffusion quasi-linéaire bien posées dans l'espace entier. DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS SERIES S, 14(2) :505–531, February 2021.

[2] Pierre Le Barbenchon ; Introduction aux équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires, Cours.

[3] Thierry Gallouët, Raphaèle Herbin ; Solutions faibles des équations aux dérivées partielles, 01 mars 2024.

[4] Kaouther Ammar and Petra Wittbold. Existence of renormalized solutions of degenerate elliptic-parabolic problems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics*, 133(3) :477–496, 2003.

[5] Boris Andreianov and Mohamed Maliki. A note on uniqueness of entropy solutions to degenerate parabolic equations in. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 17(1) :109–118, 2010.

[6] Boris Andreianov and Petra Wittbold. Convergence of approximate solutions to an elliptic–parabolic equation without the structure condition. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 19(6) :695–717, 2012.

[7] Boris P Andreianov, Philippe Benilan, and Stanislav N Kruzhkov. L^1 theory of scalar conservation law with continuous flux function. *Journal of Functional Analysis*, 171(1) :15–33, 2000.

[8] P. Baras and M. Pierre. Singularités éliminables pour des équations semilinéaires, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 34 (1984), 185 – 206.

[9] Philippe Bénilan and Michael G Crandall. The continuous dependence on φ of solutions of $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$. *Indiana University Mathematics Journal*, 30(2) :161–177, 1981.

[10] Philippe Bénilan and Stanislzav Kružkov. Conservation laws with continuous flux functions. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 3(4) :395–419, 1996.

[11] Dominique Blanchard and Alessio Porretta. Stefan problems with nonlinear diffusion and convection. *Journal of Differential Equations*, 210(2) :383–428, 2005.

[12] N. M. Bokalo ; Unicité de la solution du problème de fourier pour les équations quasilinéaires de type de filtration instationnaire. *Uspekhi Mat. Nauk*, 39(1984) :139–140.

[13] Haim Brezis. Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without condition at infinity. *Applied Mathematics and Optimization*, 12 :271–282, 1984.

[14] S. CHEVET. Conditions de Hölder ; Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique), 1970.

[15] Jørgen Endal and Espen R Jakobsen. L^1 contraction for bounded (nonintegrable) solutions of degenerate parabolic equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 46(6) :3957–3982, 2014.

[16] Thierry Gallouët and Jean-Michel Morel. Resolution of a semilinear equation in L^1. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics*, 96(3-4) :275–288, 1984.

[17] Thierry Gallouët and Jean-Michel Morel. The equation $-\Delta u+|u|^{\alpha-1}\,u=f$, for $0\leq\alpha\leq 1$. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 11(9) :893–912, 1987.

[18] M. A. Herroro and M. Pierre. The cauchy problem for $u_t=\Delta u^m$ when $0<m<1$, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 291 $(1985), 145-158$.

[19] Tosis Kato. Schrödinger operators with singular potentials. *Israel Journal of Mathematics*, 13 :135–148, 1972.

[20] Joseph Bishop Keller. On solutions of $\Delta u=f(u)$. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 10(4) :503–510, 1957.

[21] S. N. Kruzhkov and E. Y. Panov ; Conditions de type Osgood pour l'unicité des solutions d'entropie au problème de Cauchy pour les lois de conservation quasilinéaires du premier ordre, Ann. Univ. Ferrare Sez. VII (NS), 1994.

[22] S. N. Kruzhkov and E. Y. Panov ; First-Order quasilinear conservation laws with infinite initial data dependence area, Dokl. Akad. Nauk URSS, 1990.

[23] Mohamed Maliki and Hamidou Touré. Uniqueness of entropy solutions for nonlinear degenerate parabolic problems. In *Nonlinear Evolution Equations and Related Topics : Dedicated to Philippe Bénilan*, pages 603–622. Springer, 2003.

[24] XALID MATHLOUTHI ; TRANSFORMATION DE LEGENDRE EN THÉORIE DES ESPÈCES, MÉMOIRE, UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL, 2007.

[25] J. L. Vásquez ; The Porous Medium Equation ; Mathematical theory, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007.

[26] P. Bénilan ; Équations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications ; Thèse d'état, University, 1972.

[27] P. Bénilan, M. G. Crandall and A. Pazy ; Nonlinear evolution equations in Banach spaces.

[28] Haïm BREZIS ; Analyse fonctionnelle, Théorie et applications ; 1987.

[29] Daniel Li ; Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés ; 2013.

[30] Alexandre Munnier ; Analyse fonctionnelle ; Equations aux dérivées partielles, 2018.

[31] Jean-Yves CHEMIN ; BASES D'ANALYSE FONCTIONNELLE, 2017.

[32] Raphaël Danchin ; Cours de topologie et d'analyse fonctionnelle, Master première année, 2013.

[33] Kpè KANSIE ; Stabilité structurelle pour des problèmes elliptiques avec puissances variables : Les problèmes de type p(x)-Laplacien, DEA, UNIVERSITÉ POLYTECHNIQUE DE BOBO-DIOULASSO (UPB), 2016.

[34] Mohamed Badr BENBOUBKER ; SUR CERTAINS PROBLÈMES ELLIPTIQUES QUASI-LINÉAIRES NON HOMOGÈNES DE TYPE DIRICHLET OU NEUMANN, Thèse, Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, 2013.

[35] DJAKER CHERIFA and KEFFAT SIHAM, Méthode des Sous et Sur Solutions et applications, Mémoire de Master, Université Abderrahmane Mitra de Béjaïa, 2019.

[36] Benguessoum Aissa ; Equations elliptiques quasilinéaires avec données dans L^1, Thèse de magister en Mathématiques, Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen.

[37] Dr Souhila Sabit ; Notions sur les équations aux dérivées partielles.

[38] M. RIAHI MOHAMMED EL AMINE ; ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ET NON LINÉAIRES, MÉMOIRE DE MASTER, UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCEN, 2019.

[39] Ania ADIL ; Etude d'un système de réaction-diffusion modélisant la propagation d'une maladie infectieuse ; Mémoire de Master, UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI de TIZI-OUZOU, 2018.

[40] Nada El Berdan ; Régularité de problèmes à données dans les espaces pondérés par la distance au bord via l'inégalité uniforme de Hopf et le principe de dualité, THÈSE, UNIVERSITÉ DE POITIERS, 2016

[41] J. Endal N. Alibaud and ER Jakobsen. N. Alibaud, J. Endal and ER Jakobsen ; Résultats de stabilité optimale et duale pour la viscosité L^1 et solutions d'entropie L^∞, preprint, arXiv :1812.02058, 2019.

[42] R. Osserman. R. Osserman ; Sur l'inégalité $\Delta u \geq f(u)$, Pacific J. Math, 1957.

[43] Adama Ouedraogo. Explicit conditions for the uniqueness of solutions for parabolic degenerate problems. *International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations*, 6(1) :75–86, 2016.

[44] H. Brézis P. Bénilan and M. G. Crandall. P. Bénilan, H. Brézis and M. G. Crandall ; A semilinear equation in $L^1(\mathbb{R}^N)$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., 1975.