UNIVERSITÉ NORBERT ZONGO
****
UNITÉ DE FORMATION ET DE RECHERCHE EN SCIENCES ET TECHNOLOGIES
****
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER DE MATHEMATIQUES FONDAMENTALES ET APPLICATIONS

Option : Mathématiques Fondamentales
Spécialité : Équations aux Dérivées Partielles et Modélisations

THEME :

Résultats de stabilités optimales et dualité non linéaire pour les solutions entropiques dans L^∞ et de viscosité dans L^1

Présenté et soutenu par : **SANKARA Vincent**

Sous la direction de :
Pr Arouna OUEDRAOGO,
Professeur Titulaire à l'Université Norbert ZONGO

Sous la co-direction de :
Dr Mohamed KARIMOU GAZIBO,
Maître-Assistant à l'Université Abdou Moumouni, Niamey, Niger

Soutenu publiquement le 21 Novembre 2024 devant le Jury composé de :

Président : Dr Wendpanga Jacob YOUGBARE, Maître de Conférences en Mathématiques à l'Université Norbert ZONGO

Membres :

Dr Abdoulaye COMPAORE, Maître de Conférences en Mathématiques, Université Norbert ZONGO (Examinateur)

Pr Arouna OUEDRAOGO, Professeur Titulaire à l'Université Norbert ZONGO (encadreur)

Dr Mohamed Karimou GAZIBO, Maître-Assistant à l'Université Abdou Moumouni, Niger (co-encadreur),

Année académiques 2023-2024.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

À ma mère.

Remerciements

A l'issu du cycle de ma formation, avant tout propos, je remercie Dieu, le tout puissant, pour m'avoir donné le courage, la patience, la volonté, et la force nécessaire pour affronter tous les obstacles qui se sont hissés au travers de mon chemin durant toutes mes années d'études.

Au terme de ce travail, j'exprime ma profonde gratitude à notre très cher professeur et directeur dudit mémoire, le Pr Arouna OUEDRAOGO, pour sa disponibilité et ses précieux conseils qui m'ont été d'une grande aide dans la réalisation de ce manuscrit. Selon un proverbe africain, les plus grandes leçons ne sont pas tirées d'un livre mais d'un enseignant. Professeur OUEDRAOGO, merci.

Le travail que je présente ici n'aurait pas pu aboutir sans la contribution de mon co-directeur, le Dr Mohamed KARIMOU GAZIBO avec qui j'ai eu beaucoup de plaisir à travailler et qui m'a beaucoup apporté. Nos contacts ont toujours été très agréables et instructifs grâce à sa gentillesse et ses grandes connaissances scientifiques. Je tiens à lui dire merci pour le temps qu'il a consacré pour moi, de m'avoir apporté les outils méthodologiques indispensables à la conduite de ce mémoire et offert la possibilité de réaliser ce travail dans de bonnes conditions et aussi pour ses bénéfiques conseils et explications. J' ai eu l'honneur de travailler sous sa direction.

Je ne saurai oublier les membres de l'Unité de Formation et de Recherche en Sciences et Technologies (UFR-ST) de manière générale et particulièrement le Directeur de ladite UFR, Pr Arouna OUEDRAOGO et le Directeur du Laboratoire de mathématiques, Informatique et Applications (L@MIA), Pr André CONSEIBO pour le travail qu'ils réalisent chaque jour afin de nous offrir un cadre d'étude agréable.

J'adresse aussi mes vifs remerciements aux membres du jury pour avoir bien voulu examiner et juger ce travail.

Du fond du cœur, je remercie tous les enseignants qui ont participé à nos formations depuis le début de nos études.

J'adresse mes remerciements à tous mes camarades étudiants de Master de mathématiques pour la vie commune durant ce bout de temps sans difficultés majeures. Nous avons ensemble tiré profit les uns des autres. Espérons un Master à l'attente de nos aspirations.

Une reconnaissance particulière à mes parents, frères et ami(e)s qui m'ont apportés la confiance et l'encouragements dont j'avais besoin pour continuer mon parcourt d'études. Le temps me fera défaut si je dois dresser une liste de toutes les personnes de près ou de loin, qui ont contribués d'une manière ou d'une autre sur le plan moral, intellectuel, financier, etc. à l'élaboration de ce mémoire. Dieu vous le revaudra.

RESUME

Dans ce mémoire, nous révisitons le papier de Nathaële Alibaud, Jorgen Endal, et Espen R. Jakobsen [28] dont l'objectif principal est d'étudier des résultats de stabilité optimales et de dualité non linéaire pour l'équation parabolique dégénérée dont le cadre fonctionnel est L^∞ pour la notion de solution entropique et l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman dont le cadre fonctionnel est L^1 pour la notion solution de viscosité. Pour cela nous donnons une nouvelle relation rigourieuse de dualité entre deux notions centrales de solutions faibles : solution entropique et de viscocité. Elle prend la forme d'une *inégalité duale non linéaire* (5.32) où S_t est la solution entropique semi-groupe de l'équation parabolique anisotrope dégénérée (4.1) et G_t est la solution de viscosité semi-groupe d'Hamilton-Jacobi-Bellman (3.1).

Nous cherchons le plus petit G_t satisfaisant (5.32). Cela nous impose de regarder un sous-espace de L^1 que nous notérons L^∞_{int}.

Une conséquences de nos résultats est une nouvelle estimation optimale du domaine de dépendance pour les EDPs paraboliques anisotropes dégénérées du second ordre. Elle est donnée en terme de problème de contrôle stochastique et étend de manière naturelle les résultats recents pour les Équations aux Dérivées Partielles hyperboliques du premier ordre voir [30].

Mots clés et phrases : Dualité non linéaire, estimations de contraction pondérées L^1, solution entropique L^∞, solutions de viscosité L^1, EDP paraboliques dégénérées anisotropes, EDP de Hamilton-Jacobi-Bellman.

ABSTRACT

In this thesis, we revisit a paper of Nathaële Alibaud, Jorgen Endal, and Espen R.Jakobsen [28] whose main objective is to study optimal stability and nonlinear duality results for the degenerate parabolic equation whose functional framework is L^∞ for the notion of entropy solution and the Hamilton-Jacobi-Bellman equation whose functional framework is L^1 for the notion of viscosity solution. For this, we give a new and rigorous relationship of duality between these two central notions of solution : entropy solution and viscocity solution. It takes the form of a *nonlinear dual inequality* (5.32) where S_t is the entropy semigroup solution of the degenerate anisotropic parabolic equation (4.1) and G_t is the Hamilton-Jacobi-Bellman semi-group viscosity solution (3.1).

We look for the smallest G_t that satisfies (5.32). This requires us to look at a subspace of L^1 that we will denote L^∞_{int}.

A consequence of our results is a new optimal domain estimate of dependence for second-order anisotropic anisotropic parabolic PDEs. It is given in terms of stochastic control problems and naturally extends the recent result for the hyperbolic Partial Differential Equations of the first order see [30].

Key words and phrases : Nonlinear duality, optimal weighted L^1 contraction estimate, L^∞ entropy solutions, L^1 viscosity solutions, anisotropic degenerate parabolic PDE, Hamilton-Jacobi-Bellman PDE.

Notations et abréviations

EDPs : Équations aux Dérivées Partielles
SDEs : Stochastics Differentials Equations (Équations Différentielles Stochastiques)
$essIm$: Image essentielle des fonctions mesurables
$essinf$: borne inférieure essentielle.
$esssup$: borne suppérieur essentielle
co : l'envelope convexe d'un ensemble
Sp : le spectre des matrices
Supp$f$: Support d'une continue f
$\mathbb{1}_U$: la fonction indicatrice sur l'ensemble U
C_c : l'ensemble des fonctions continues à support compact
$BLSC$ (resp $BUSC$) : Bounded Lower Semicontinuous functions (resp. Bounded Upper Semicontinuous functions) qui désigne l'ensemble des fonctions semi-continues inférieures (resp supérieres) bornées
$L^1(\mathbb{R}^d)$: Espace des fonctions $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que $|f|$ soit intégrable
$L^p(\mathbb{R}^d)$: Espace des fonctions $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx < \infty$
$L^p_{loc}(\mathbb{R}^d) := \{f$ mesurable sur K et $f \in L^p(K)$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^d \}$
$L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) := \{f$ mesurable sur K et $f \in L^1(K)$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^d \}$
$L^\infty_{int}(\mathbb{R}^d) := \{\varphi_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \quad$ telque $\quad ||\varphi_0||_{L^\infty_{loc}} < \infty\}$
$L^\infty(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et il existe une constante C telle que $|f(x)| < C$ $p.p$ sur $\mathbb{R}^d \}$
$W^{k,p}(\Omega) : \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k \}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$
$D^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ avec $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_n$
$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$: Espace de toutes les fonctions Lipschitziennes et bornées sur $\mathbb{R}^d$, $n > 1$
$H^1(\mathbb{R}^d)$: Espace des fonctions $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $u_x \in L^2(\mathbb{R}^d)$
$W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d \ \forall$ compact $K \subset \mathbb{R}, \sup_{x\in K} |f(x)| + \sup_{x\in K} |f'(x)| < +\infty\}$.

Table des matières

Dédicace i

Remerciements ii

RESUME iii

ABSTRACT iii

Notations et abréviations iv

Introduction générale 1

1 Rappels et notations générales 4

Introduction 4

1.1 Quelques Éléments d'Analyse Mathématiques Réelles et Fonctionnelles 4

1.1.1 Rappels sur les espaces complets . . . 4

1.1.2 Espaces L^p . . . 6

1.1.3 Espaces de Sobolev . . . 13

1.1.4 Rappels d'Analyse Convexe . . . 15

1.2 Quelques opérateurs différentiels en coordonnées cartésiennes . . . 17

1.3 Rappels sur les matrices . . . 18

1.3.1 Norme matricielle . . . 19

1.3.2 Valeurs propres et Rayon spectrale . . . 19

1.3.3 Quelques matrices particulières . . . 20

1.3.4 Règles d'algèbre matricielle . . . 21

1.4 Un peu de calcul différentiel . . . 21

1.4.1 Fonctions de classe C^1 . . . 21

1.4.2 Fonctions de classe C^2 . . . 22

1.5 Éléments de classification : E.D.P. elliptiques, hyperboliques et paraboliques . . . 23

1.5.1 E.D.P elliptiques . . . 23

1.5.2 E.D.P. hyperboliques . . . 24

1.5.3 E.D.P. paraboliques . . . 24

1.6 Exemples d'Equations aux Dérivées Partielles . . . 25

Conclusion 26

2 Préliminaires **27**

Introduction **27**
2.1 Espaces des fonctions L^1_{loc} et L^∞_{int} . . . 27
2.1.1 L'espace des fonctions L^1_{loc} . . . 27
2.1.2 L'espace des fonctions L^∞_{int} . . . 30
2.2 Quelques notions de convolution . . . 31
2.2.1 Fonctions convolables, convolution . . . 31
2.2.2 Convolution avec une fonction régulière . . . 32
2.3 Quelques rappels sur la notion d'espace de probabilité . . . 33
2.3.1 Probabilité . . . 33
2.3.2 Espérance d'une variable aléatoire . . . 34
2.3.3 Convergences de suites de variables aléatoires. . . . 35
2.3.4 Le mouvement brownien . . . 35
2.3.5 Intégrale stochastique . . . 36
2.3.6 Processus d'Itô . . . 37
2.3.7 Processus multidimensionnels . . . 37
2.3.8 Équations différentielles stochastiques (SDEs). . . . 38
2.4 Quelques notions de la théorie des semi-groupes . . . 39
2.4.1 Semi-groupe fortement continu . . . 39
2.4.2 Générateur infinitésimal . . . 39

Conclusion **40**

3 Solution de viscosité pour l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) **41**

Introduction **41**
3.1 Préliminaires . . . 41
3.2 Solution de viscosité . . . 42
3.3 Existence et unicité de solution . . . 43
3.4 Solution minimale . . . 43

Conclusion **49**

4 Solution entropique pour les problèmes de convection diffusion **50**

Introduction **50**
4.1 Préliminaires . . . 50
4.2 Notions de solution entropique . . . 51
4.3 Existence et unicité de solution entropique . . . 52

Conclusion **58**

5 Principaux résultats **59**

Introduction **59**
5.1 Contraction pondérée de L^1 pour les solutions entropiques . . . 59
5.2 Optimalité du poids . . . 63
5.3 Formulation en semi-groupes et une nouvelle forme de dualité . . . 73

Conclusion 84

Conclusion générale et Perspectives 85

Introduction générale

Les équations aux dérivées partielles (EDPs) non linéaires constituent un cadre essentiel pour la modélisation de nombreux phénomènes physiques et économiques complexes, tels que la dynamique des fluides, la propagation des ondes de choc ou encore la théorie du contrôle optimal. Cependant, la nature non linéaire de ces équations complique souvent l'existence et l'unicité des solutions classiques, ce qui a conduit au développement de notions de solutions faibles, comme les solutions entropiques et les solutions de viscosité. Ces dernières permettent de traiter des discontinuités dans les solutions, notamment dans les lois de conservation et les problèmes de diffusion anisotrope dégénérée.

Dans ce contexte, l'article de Nathaël Alibaud, Jorgen Endal et Espen Robstad Jakobsen, intitulé "Résultats de stabilités optimales et dualité non-linéaire pour les solutions entropiques dans L^∞ et de viscosité dans L^{1}" [28], propose une étude très approfondie de la relation entre les solutions entropiques et les solutions de viscosité, en introduisant une nouvelle inégalité de contraction pondérée en norme. Cette nouvelle inégalité démontre la stabilité optimale des solutions entropiques, en garantissant leur robustesse face aux perturbations des données initiales. Ces résultats s'appliquent principalement aux équations paraboliques anisotropes dégénérées, mais ouvrent également la voie à des applications dans des domaines tels que les lois de conservation hyperboliques et les problèmes de contrôle stochastique.

L'étude des solutions faibles pour les Équations aux Dérivées Partielles a vue le jours grâce à la contributions de nombreuses chercheurs. Nous pouvons alors cité par exemple, Kruzhkov [42] a introduit les solutions entropiques pour traiter les lois de conservation non linéaires, en établissant les bases de la théorie de stabilité des solutions faibles. Lions et Crandall Lions ont eu à contribué à la théorie des solutions de viscosité, en l'appliquant à des EDPs elliptiques et paraboliques dégénérées, voir [26, 35]. Ces deux types de solutions sont devenus des outils incontournables pour l'étude des problèmes où les solutions classiques échouent à prouver l'existence et l'unicité.

Il faut noté que, la relation entre ces deux types de solutions, bien que mentionnée dans divers contextes, n'avait pas encore été explorée de manière aussi rigoureuse et détaillée avant l'article d'Alibaud et al. [28]. L'objectif principal de cet mémoire est d'introduire une inégalité de contraction pondérée en norme pour les solutions entropiques, en utilisant les solutions de viscosité comme poids optimaux. Cette nouvelle inégalité permet de démontrer la stabilité optimale des solutions entropiques, elle assure ainsi une meilleure compréhension de leur comportement dans des contextes complexes comme les équations paraboliques anisotropes dégénérées. De plus, cette approche ouvre la voie à de nouvelles perspectives pour le traitement des lois de conservation hyperboliques et

des problèmes de contrôle optimal.

L'objectif de ce mémoire est d'analyser et de reproduire les résultats principaux de l'article d'Alibaud et al., tout en les plaçant dans le contexte plus large des recherches sur les solutions faibles pour les EDP non linéaires.

Par ailleurs, nous considérons les deux problèmes de Cauchy suivants : Pour l'équation de convection-diffusion parabolique dégénérée anisitrope définie :

$$\begin{aligned} \partial_t u + divF(u) = div(A(u)Du) \qquad & x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad & x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{1}$$

où $(H2)$ $F \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ et $A = \sigma^A(\sigma^A)^T$ pour $\sigma^A \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{d\times K})$.

Et pour l'equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) :

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi = sup_{\xi\in\varepsilon}\ \{b(\xi).D\varphi + tr(a(\xi)D^2\varphi)\} \qquad & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x) \qquad & x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{2}$$

où "D", "D^2" et "div" désignent respectivement le gradient, le hessien et la divergence en x, et "tr" est la trace.

$$(H1) \qquad \begin{cases} \varepsilon \text{ est un ensemble non vide,} \\ b : \varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^d \text{ une fonction bornée,} \\ a = \sigma^a(\sigma^a)^T \text{ pour unr certaines } \sigma^a : \varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times K}, \end{cases}$$

où K est le rang maximal de $A(u)$ et $a(\xi)$.

Le présent mémoire est organisé comme suit.

De prime abord, dans le chapitre 1, il sera question de rappeler certaines notions générales dans le domaines des EDPs dont on fera usage directement ou indirectement dans les autres chapitres. Pour ce faire, subdvisé en six parties, il évoque en première lieu Quelques Éléments d'Analyse mathématiques Réelles et Fonctionnelles. Dans la deuxième section, il évoque quelques opérateurs différentiels en coordonnées cartésiennes. Dans la troisième section, il évoque Quelques rappels sur les matrices. Dans la quatrième section, il évoque quelques notions de calcul différentiel. Dans la cinquième section, il évoque les élements de classification des EDPs et enfin, il évoque quelques exemples d'EDPs.

Ensuite dans le chapitre 2, il est question des préliminaires qui constituent les élements fondamentales et nécessaires pour la redaction du présent mémoire. Le chapitre sera subdivisé en quatres parties. Dans la première section, il évoque l'espace des fonctions L^1_{loc} et L^∞_{int}. Dans la deuxième section, il évoque quelques notions de convolutions. Dans la troisème section, il évoque quelques rappels sur le calcul stochastique et enfin dans la quatrième section, on évoquera quelques notions de la théorie des semi-groupes. Dans le chapitre 3, il sera questions des solutions de viscosité pour l'équation d'Hamilton-Jacob-Bellman. Il sera aussi subdvisé en quatres parties, il évoque en première lieu les préliminaires, secundo les notions de solution de viscosité, troisièmement l'existence et l'unicité de solution et enfin la solution minimale

Ensuite, dans le chapitre 4, on évoquera les solutions entropiques pour les problèmes de convection diffusion. Il sera aussi subdvisé en trois parties. Premièrement les préliminaires, ensuite les notions de solution entropique et enfin l'existence et unicité de solution entropique.

Pour achever ce document, le chapitre 5 qui est le dernier est consacré à l'élaboration

des principaux résultats. Il sera subdivisé en trois parties. Ce chapitre abordera d'une part l'optimalité de poids et d'autre part une formulation en semi-groupe et une nouvelle forme de dualité, après avoir examiner les contractions pondérées de L^1 pour les solutions entropiques.

Chapitre 1

Rappels et notations générales

Introduction

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail.

1.1 Quelques Éléments d'Analyse Mathématiques Réelles et Fonctionnelles

1.1.1 Rappels sur les espaces complets

Soit (X, d) espace métrique et (x_n) une suite de X.

Définition 1.1.1.
La suite (x_n) est de Cauchy si elle vérifie l'une des trois conditions équivalentes suivantes

a) pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N(\epsilon)$ tel que $d(x_m, x_n) < \epsilon$ pour tous $m, n \geq N(\epsilon)$;

b) $d(x_n, x_{n+p}) \to 0$ pour $n \to \infty$ uniformément en $p \geq 0$;

c) $diam\{x_n | n \geq N\} \to 0$ lorsque $N \to \infty$.

Toute suite convergente est évidemment de Cauchy. La réciproque est fausse en général (prendre $X =]0, 1[$ et $x_n = 2^{-n}$).

Proposition 1.1.1.
Si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, elle est convergente.

Définition 1.1.2.
Un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy dans X est convergente.

L'intérêt principal de la notion de suite de Cauchy est que, dans un espace complet, on peut vérifier qu'une suite est convergente sans en connaître la limite.

Pour vérifier qu'un espace est complet, on se ramène souvent à montrer qu'il est fermé dans un espace plus gros qu'on sait être complet.

Proposition 1.1.2.
Si (X, d) est complet et $Y \subset X$. Alors (Y, d) est complet si et seulement si Y est fermé dans X.

Les espaces métriques compacts sont ceux qui sont "approximativement finis".

Définition 1.1.3.
Un espace métrique (X, d) est compact si et seulement si toute suite de points de X admet une valeur d'adhérence (c'est à dire contient une sous-suite convergente).

Théorème 1.1.3. *(Ascoli-Arzela)*
Soient X un espace topologique compact et Y un espace métrique. Soit une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(X, Y)$ telle que :

i) $\mathcal{A}$ est équicontinue[1]*,*

ii) pour tout x dans X, l'ensemble $\mathcal{A}(x) = f(x) : f \in \mathcal{A}$ est relativement compacte dans Y.

Alors $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X, Y)$ pour la topologie de la convergence uniforme. Autrement dit, toute suite dans $\mathcal{A}$ a une sous-suite convergeant uniformément.

Définition 1.1.4.
Un espace métrique (X, d) est précompact si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, X admet un recouvrement fini par des boules de rayon ϵ.

En effet, on a la caractérisation suivante :

Proposition 1.1.4.
Un espace métrique (X, d) est compact si et seulement si il est précompact et complet.

Rappelons quelques généralités et exemples sur les espaces de Banach .

Définition 1.1.5.
Un espace de Banach est un espace vectoriel normé (evn) complet.

Corollaire 1.1.5.
Tout sous-espace vectoriel (sev) fermé d'un espace de Banach est lui-même un espace de Banach pour la norme induite.

On rappelle le résultat suivant :

Théorème 1.1.6.
Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire 1.1.7.
Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

Voici quelques exemples d'espaces de Banach, qui sont des espaces de fonctions, importants en Analyse.

Soit F un espace de Banach, dont on note $|.|_F$ la norme (par exemple, F est un evn de dimension finie, K^Nou même K).

1. Une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(X, Y)$ est dite équicontinue en un point x_0 de X, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{x_0}$ de x_0 dans X tel que $f(\mathcal{V}_{x_0}) \to B(f(x_0), \epsilon)$ pour tout $f \in \mathcal{A}$ i.e.

$$\forall x \in \mathcal{V}_{x_0}, \forall f \in \mathcal{A}, d(f(x), f(x_0)) < \epsilon,$$

— $B(A,F)$, l'espace des applications bornées de $A \to F$ où A est un ensemble, muni de la norme du sup : $||f||_B = \sup_{x\in A} |f(x)|_F$.

— $C_b(X,F)$, l'espace des applications continues bornées de (X,d), espace métrique, à valeurs dans F, muni de la norme du sup $||.||_B$.

— $C_0(E,F)$, l'espace des applications continues tendant vers 0 à l'infini de E, evn de dimension finie, à valeurs dans F, muni de la norme du sup $||.||_B$.

— $C(K,F)$, l'espace des applications continues de (K,d), espace métrique compact, à valeurs dans F, muni de la norme du sup $||.||_B$. La norme du sup $||.||_B$ définit sur chacun de ces espaces la topologie de la convergence uniforme des applications à valeurs dans F.

Proposition 1.1.8.
L'espace $B(A,F)$ muni de la norme du sup $||.||_B$ *est un Banach. L'espace $C_b(X,F)$ est fermé dans $B(X,F)$; l'espace $C_0(E,F)$ est fermé dans $B(E,F)$. Enfin $C(K,F) = C_b(K,F)$.*

1.1.2 Espaces L^p

Intéressons nous d'abord aux espaces L^p de Lebesgue. Les principaux éléments sont extrait de H.Brezis [14] et J.L.Lions [25].

Définition 1.1.6. *(Les espaces $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu),\ p>0$)*

(a) Une fonction $f : (X,\mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{K}, B(\mathbb{K}))$ est μ-intégrale si $|f|$ l'est ; c'est-à-dire $\int_X |f|d\mu < +\infty$; avec $(X,\mathcal{A}.\mu)$ un espace mesuré, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $B(\mathbb{K})$ sa tribu borélienne.
On note :

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{A},\mu) = \left\{ f : (X,\mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{K}, B(\mathbb{K})), \text{mesurables telles que } \int_X |f|d\mu < +\infty \right\}.$$

L'ensemble des fonctions μ-intégrales définies sur X et à valeurs dans $\mathbb{K}$ ou espaces des fonctions absolument intégrables sur X. En l'absence d'ambiguïté on écrira simplement $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ voir $\mathcal{L}^1(\mu)$ ou parfois même $\mathcal{L}^1(X)$.

(b) Généralisation : pour tout réel $p>0$, on définit ;

$$\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{A},\mu) = \left\{ f : (X,\mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{K}, B(\mathbb{K})), \text{mesurables telles que } \int_X |f|^p d\mu < +\infty \right\}.$$

L'ensemble des fonctions mesurables de puissance p intégrable et sera dit ensemble des fonctions essentiellement bornées pour $p = +\infty$.

Proposition 1.1.9.
$\forall f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$,

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

Notons qu'elle est souvent noté $\mathcal{L}^1(\mu)$ au lieu de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ si on se retrouve que un même corps $\mathbb{K}$.

Proposition 1.1.10.

(i) $\forall p > 0, \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ *est un espace vectoriel ;*

(ii) Si $\mu(X) < +\infty$ *alors* $0 < p < q \Longrightarrow \mathcal{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu) \subset \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

Définition 1.1.7.

Soient $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{K}$ *et* $p > 0$. *On définit une semi-norme sur* $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ *en posant :*

$$||f||_{\mathcal{L}^p} = \left(\int_X |f|^P d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq +\infty \qquad (pour \;\; p < +\infty),$$

avec les conventions $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$ *et* $(+\infty)^{\frac{1}{p}} = +\infty$.
Dans le cas où $p = +\infty$, *on a :*

$$||f||_{\mathcal{L}^\infty} = \sup -ess\{|f|\},$$

où $sup - ess$*(se lit suprême essentiel) est défini par :* $sup - ess\{|f|\} = \inf\{M > 0$ *tel que* $\mu(\{|f| > M\}) = 0\}$ *avec la convention* $\inf(\emptyset) = +\infty$.

Nous pouvons grâces aux espaces ci-dessus définir à présent les espaces $L^p,\ p > 0$.

Définition 1.1.8. *(Espaces* L^p*)*

Étant données deux fonctions mesurables f *et* g *définies sur* X, *on dit que* $f \sim g$ *et* $f(x) = g(x)$ *presque pour tout* $x \in X$. *On peut montrer que* $\sim$ *définit une relation d'équivalence dans la classe des fonctions mesurables. Les espaces* $\mathcal{L}^p(X)$ *peuvent être rendus normés en considérant l'espace quotient* $\mathcal{L}^p(X)/\sim$ *noté dorénavant* $L^p(X)$.

Par abus de notation, on identifiera systématiquement une fonction avec sa classe d'équivalence ; en l'absence d'ambiguïté, on confondra $L^p(X)$ et $\mathcal{L}^p(X)$.
Les espaces normés $L^p(X)$ ainsi construits sont appelés *espaces de Lebesgue*.
Ces espaces vérifient : si $p \leq q \leq +\infty$ alors $L^q(X) \subset L^p(X)$. De plus , il existe une constante C, ne dépendant que de p, q et $\mu(X)$ telle que $\forall f \in L^q(X), ||f||_{L^p} \leq C||f||_{L^q}$ (ceci montre que l'injection de L^q dans L^p est continue).

Identifiant les fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble négligeable, chaque espaces L^p est un espace de Banach lorsque l'exposant p est supérieur ou égal à 1. Lorsque $0 < p < 1$, l'intégrale définit une quasi-norme qui en fait un espace complet. Il existe en outre une dualité entre les espaces d'exposants p et q conjugués, c'est-à-dire tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Tous ces espaces constituent un outil fondamental de l'analyse fonctionnelle en permettant la résolution d'équations par approximation avec des solutions non nécessairement dérivables ni même continues. Par ailleurs, il existe bien d'autres espaces issus de ces derniers définis comme suit. On pourra notamment consulter [14, 25].

Définition 1.1.9.

Soit (Ω, M, μ) *un espace mesuré et* X *un espace de Banach de norme* $||.||_X$ *et de dual* X'. *Soit* $1 \leq p \leq +\infty$, *on définit* $L^p(\Omega; X)$ *comme étant l'espace (des classes d'équivalences de) fonctions mesurables* $f : \Omega \to X$ *telles que* $||f(.)||_X$ *appartient à* $L^p(\Omega, \mathbb{R})$.

Avec les normes respectives

$$||f||_{L^p(\Omega,X)} = \left(\int_\Omega ||f(x)||_X^P d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < +\infty$$

et

$$||f||_{L^p(\Omega;X)} = \sup -ess\{||f(x)||_X^P, \ x \in \Omega\}, \quad p = \infty,$$

chaque espaces $L^p(\Omega; X)$ est un espace de Banach.
De plus, si X est séparable et $1 \leq p < +\infty$, alors $L^p(\Omega; X)$ est séparable.

Exemple 1.1.11. Pour le cas $p = 1$, dont nous utiliserons dans la suite on a :

$$L^1(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in C^\infty, \int_\Omega |f(x)|dx < \infty \right\}$$

est l'espace des fonctions absolument intégrables sur Ω.

Définition 1.1.10. *(support d'une fonction continu).*
Soit $u \in C^0(\Omega)$. Le support de u est le sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ défini par l'une des assertions suivantes :

a) supp $u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$,

b) $x_0 \notin$ supp $u \Leftrightarrow \exists V_{x_0} : u(x) = 0, \forall x \in V_{x_0}$,

c) (supp $u)^c$ est le plus grand ouvert où u est nulle.

Remarque 1.1.12. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. *supp $u = \varnothing \Leftrightarrow u = 0$* dans Ω.
2. *supp$(u.v) \subset$ supp $u \cap$ supp v.*
3. *supp$\frac{\partial u}{\partial x_j} \subset$ suppu, $j = 1, ..., n$, si $u \in C^1(\Omega)$.*

Théorème 1.1.13.

Soit μ σ-finie,$1 < p < +\infty$ et $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p} = 1$ et X réflexif. Alors le dual $L^p(\Omega; X)'$ s'identifie avec $L^{p'}(\Omega; X')$.
Si X est un espace de Hilbert alors c'est aussi le cas de $L^2(\Omega, X)$ avec le produit scalaire

$$(f|g)_{L^2(\Omega,X)} = \int_\Omega (f(x)|g(x))_X d\mu, \quad f, g \in L^2(\Omega, X).$$

Considérons le cas $\Omega = [0, T]$ un intervalle de longueur $T > 0$ (représentant généralement le temps). On a la définition suivante :

Définition 1.1.11. *Soient X un espace de Banach et $T > 0$ une constante. On définit :*

$$L^p([0,T]; X) = \left\{ f | f \text{ mesurable de } [0,T] \longrightarrow X, \ \left(\int_0^T ||f(t)||_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\} \text{ si } 1 \leq p < \infty,$$

$$L^p([0,T]; X) = \left\{ f | f \text{ mesurable de } [0,T] \longrightarrow X, \ \sup_{t \in [0,T]} ess||f(t)||_X < +\infty \right\} \text{ si } p = \infty.$$

À cela s'ajoute :

1. $\mathcal{D}([0,T],X)$ est l'ensemble des fonctions C^∞ de $[0,T] \longrightarrow X$ et à support compact dans $[0,T]$.
2. $C^k([0,T],X)$ est l'ensemble des fonctions k fois continûment dérivables de $[0,T] \longrightarrow X$.
   Nous utiliserons $C^0([0,T],X)$ ou $C([0,T],X)$ pour désigner l'ensemble des fonctions continues de $[0,T] \longrightarrow X$.
3. $\mathcal{D}'([0,T],X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}([0,T],X))$ est l'espace des distributions sur $[0,T]$ à valeurs dans X où $\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F (E et F des espaces vectoriels topologiques).

Rappelons l'inégalité de Hölder et d'autres grands théorèmes utiles pour les résolutions des EDPs.

Théorème 1.1.14. *(Inégalité de Hölder).*
Pour $1 \leq p,q \leq +\infty$ et r défini par $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, si $f \in L^p(X)$ et $g \in L^q(X)$ alors $fg \in L^r(X)$ et

$$||fg||_{L^r(X)} \leq ||f||_{L^p(X)} ||g||_{L^q(X)}.$$

Ce théorème existe aussi avec les espaces $L^p([0,T];X)$: pour $1 \leq s_0, s_1 \leq +\infty$ et s défini par $\frac{1}{s} = \frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_1}$, si $f \in L^{s_0}([0,T];X)$ et $L^s([0,T];X)$ et

$$||fg||_{L^s([0,T];X)} \leq ||f||_{L^{s_0}([0,T];X)} ||g||_{L^{s_1}([0,T];X)}.$$

Proposition 1.1.15. *(Inégalité de Minkowski).*
Pour $1 \leq p < \infty$ et tout $f, g \in L^p(X)$, on a :

$$||f+g||_{L^p} \leq ||f||_{L^p} ||g||_{L^p}.$$

De plus, pour $p > 1$, il y a égalité si et seulement si $|f|$ et $|g|$ sont colinéaires presque partout, c'est-à-dire s'il existe λ_1 et λ_2 non simultanément nuls tels que $\lambda_1|f| + \lambda_2|g| = 0$ presque partout.

À la base de tous les résultats de convergence d'intégrales utiles dans la pratique se trouve le théorème suivant, que l'on utilise par contre rarement tel quel.

Théorème 1.1.16. *(Convergence monotone ou théorème de Beppo Levi).*
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions positives mesurables sur X. Alors la limite simple f de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est mesurable positive sur X et on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Une conséquence immédiate du théorème de convergence monotone est le Lemme de Fatou. Il compare l'intégrale d'une limite inférieure de fonctions mesurables positives avec la limite inférieure de leurs intégrales. Ce Lemme porte parfois le nom de théorème de Fatou-Lebesgue.

Théorème 1.1.17. *(Lemme de Fatou).*
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X à valeurs dans $[0,+\infty]$. Alors

$$0 \leq \int_X \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Une conséquence presque immédiate du Lemme de Fatou est le théorème de convergence dominée de Lebesgue, qui est de loin le plus employé dans la pratique.

Théorème 1.1.18. *(Convergence dominée de Lebesgue).*
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur X à valeurs complexes vérifiant :

(i) $(f_n)(x) \longrightarrow f(x)$ *(convergence simple) quand* $n \longrightarrow +\infty$ *presque partout sur* X;

(ii) Il existe une fonction g sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, μ-intégrable, telle que l'on ait $|f_n(x)| \leq g(x)$ presque partout,
Alors f est intégrable et l'on a

$$\int_X |f_n - f| d\mu \longrightarrow 0 \qquad n \longrightarrow +\infty.$$

En particulier

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n \right) d\mu = \int_X f d\mu.$$

Le théorème de convergence dominée existe aussi en version L^p.

Théorème 1.1.19.
Soit $p \in [1, +\infty[$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite fonctions de $L^p(X, d\mu)$ telle que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ quand $n \longrightarrow +\infty$ presque partout dans X, et qu'il existe une fonction $g \in L^p(X, d\mu)$ vérifiant $|f_n(x)| \leq g(x)$ presque partout dans X.
Alors $f \in L^p(X, d\mu)$ et l'on a

$$||f_n - f||_p \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } \ n \longrightarrow +\infty.$$

On fera un usage répété de la réciproque partielle du théorème de convergence dominée.

Théorème 1.1.20.
Soit $p \in [1, +\infty[$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite fonctions de $L^p(X, d\mu)$ et f une fonction de $L^p(X, d\mu)$, telle que $||f_n - f||_p \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.
Alors on peut extraire une sous-suite $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $g \in L^p(X, d\mu)$ avec $f_{n_m}(x) \longrightarrow f(x)$ quand $m \longrightarrow +\infty$ presque partout dans X , et $|f_{n_m}(x)| \leq g(x)$ presque partout dans dans X.

Ce résultat moins connu que le théorème direct, mais très utile, est un sous-produit de la démonstration usuelle du fait que $L^p(X, d\mu)$ est complet.
Le théorème de convergence dominée de Lebesgue a des conséquence sur la continuité et la dérivabilité des fonctions définies par une intégrale. En effet, on a les deux résultats suivants :

Théorème 1.1.21. *(Continuité sous le signe de l'intégrale)*
Soit $f : (X, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K},\ (x, t) \longmapsto f(x, t)$.
Soit $x_0 \in X$, on suppose

(i) $t \longmapsto f(x, t)$ *est mesurable,* $\forall x \in X$;

(ii) $x \longmapsto f(x, t)$ *est continue en* x_0, $\mu - p.p$;

(iii) *il existe une fonction intégrable g telle que $|f(x,t)| \leq g(t),\ \forall x \in X,\ \mu - p.p.$*
Alors la fonction $F(x) = \int_X f(x,t)d\mu(t)$ est définie pour tout $x \in X$ et est continue en x_0.
Si toutefois la condition (ii) est vraie en tout élément de X alors F sera continue sur X.

Théorème 1.1.22. *(Dérivation sous le signe de l'intégrale)*
oit $f : (X, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,t) \longmapsto f(x,t)$.
Sous les hypothèses

(i) $t \longmapsto f(x,t) \in L^1_{\mathbb{K}}(\mu), x \in X$;

(ii) $x \longmapsto f(x,t)$ *est dérivable* $\mu - p.p$;

(iii) *il existe une fonction intégrable g telle que* $|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq g(t), \quad \mu - p.p$
la fonction $F(x) = \int_X f(x,t)d\mu(t)$ est bien définie, dérivable et on a :

$$F'(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)d\mu(t).$$

Lemme 1.1.23. *(Aubin-Lions, voir [21])*
Soient X, X_0 et X_1 trois espaces de Banach tels que $X_0 \subset X \subset X_1$. Supposons que X_0 s'injecte de façon compacte dans X et que X s'injecte continûment dans X_1.
Pour $1 \leq p, q \leq +\infty$, soit

$$W = \left\{ u \in L^p([0,T]; X_0) / \partial_t u \in L^q([0,T]; X_1) \right\}.$$

i) *Si $p < +\infty$, alors l'injection de W dans $L^p([0,T]; X)$ est compacte ;*

ii) *Si $p = +\infty$ et $q > 1$,alors l'injection de W dans $C([0,T]; X)$ est compacte.*

Lemme 1.1.24.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable borné. Supposons $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega),\ ||f_n||_{L^p(\Omega)} \leq C$ avec C une constante positive et $f_n \longrightarrow f$ $p.p$ dans Ω. Alors

(i) $f \in L^p(\Omega)$ *et* $||f||_{L^p(\Omega)} \leq C$;

(ii) $f_n \longrightarrow f$ *fortement dans* $L^{\bar{p}}(\Omega),\ \forall \bar{p} \in [1, p[$.

Démonstration.
On fera usage du lemme de Fatou pour la preuve de (i). Soit $g_n = |f_n|^p$. On a $g_n \longrightarrow g = |f|^p$ $p.p$ dans Ω. Les g_n ainsi définies sont mesurables positives. Donc , d'après le lemme de Fatou, on a

$$0 \leq \int_\Omega \liminf_{n\longrightarrow+\infty} g_n dx \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega g_n dx.$$

or $g_n \in L^1(\Omega),\ \int_\Omega g_n dx < +\infty \Longrightarrow \liminf_n \int_\Omega g_n dx < +\infty$ et puisque $\lim_n \int_\Omega g_n dx = \int_\Omega g dx = \int_\Omega \liminf_n g_n dx \leq \liminf_n \int_\Omega g_n dx$ donc $\int_\Omega g dx < +\infty$, c'est-à-dire $f \in L^p(\Omega)$. Par ailleurs, on a : $g = g - g_n + g_n \Longrightarrow |g| \leq |g - g_n| + |g_n|$. En passant à l'intégrale sur Ω en cette inégalité puis à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$, on obtient $\int_\Omega |g| dx = ||f||^p_{L^p(\Omega)} \leq \lim_n \int_\Omega |g_n| dx = \lim_n ||f_n||^p_{L^p(\Omega)} \leq C^p$. D'où $||f||_{L^p(\Omega)} \leq C$.

Pour montrer (ii), on montrera que $\int_\Omega |f_n - f|^{\bar{p}} dx \longrightarrow 0$.
Soit $\omega_n = \{x \in \Omega, |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$, pour tout $\varepsilon > 0$. Sous les hypothèses du Lemme, en raison du théorème de Lebesgue on a $mes\ \Omega_n \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int_\Omega |f_n - f|^{\bar{p}} dx = \int_{\Omega_n} |f_n - f|^{\bar{p}} dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_n} |f_n - f|^{\bar{p}} dx \leq (mes\Omega_n)^{1-\frac{\bar{p}}{p}} ||f_n - f||_p^{\bar{p}} + \varepsilon^{\bar{p}} mes\Omega.$$

Comme $n \longrightarrow +\infty$, alors

$$\limsup_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega |f_n - f|^{\bar{p}} dx \leq \varepsilon^{\bar{p}} mes\Omega.$$

Puisque ε est arbitairement petit, on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega |f_n - f|^{\bar{p}} dx = 0.$$

Ce qui donne (ii).

□

Dans la suite des rappels , nous aurons besoin de définir les espaces de fonctions höldériennes. Alors commençons par la définitions suivante.

Définition 1.1.12.
Soit Ω un ouvert quelconque de $(\mathbb{R}^d, ||.||)$, $d \in \mathbb{N}^*$. Pour $0 < \alpha \leq 1$, on dit qu'une fonction $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ est ***höldérienne d'exposant*** *α (lipschitzienne pour $\alpha = 1$) s'il existe une constante C positive telle que*

$$\forall x, y \in \overline{\Omega}, \quad |u(x) - u(y)| \leq C||x - y||^\alpha.$$

L'espace des fonctions höldériennes se note $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.
On note que u est continue et l'on pose

$$|u|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sup_{x,y \in \overline{\Omega} x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{||x - y||^\alpha}.$$

Dans le cas où $\overline{\Omega}$ est borné, on munit l'espace $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ de la norme :

$$||u||_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = ||u||_{C^0(\overline{\Omega})} + |u|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$$

pour laquelle il est complet (donc de Banach).
L'espace $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ est constitué des fonctions de classe C^k dont toutes les dérivées partielles d'ordre k sont dans $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. On le munit de la norme

$$||u||_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = ||u||_{C^k(\overline{\Omega})} + \max_{|\gamma|=k} |D^\gamma|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$$

pour laquelle il est complet.

1.1.3 Espaces de Sobolev

Une bonne partie de l'analyse des équations aux dérivées partielles se déroule dans les espaces de Sobolev. Une autre partie se déroule dans les espaces de Hölder, ainsi que dans plusieurs autres espaces fonctionnels plus sophistiqués. Afin de définir les espaces de Sobolev, intéressons-nous maintenant aux espaces de Sobolev. Il en existe plusieurs caractérisations.

Dans le cas des espaces de Sobolev d'ordre entier positive $k \in \mathbb{N}$ on retiendra :

Définition 1.1.13. *(Espaces de Sobolev)*
Pour $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, on appelle espace de Sobolev d'ordre entier positif k, l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ constitué des fonctions mesurables $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ comme suit :

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha(\Omega), \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}^d \quad tel\ que \quad |\alpha| \leq k\}$$

muni de la norme

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \qquad pour \quad p \in [1, +\infty[$$

et munit de la norme

$$||u||_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha u||_{L^\infty} \qquad pour \quad p = +\infty.$$

On utilise parfois la notation $||.||_{k,p}$ pour désigner ces normes. Dans le cas $p = 2$, on note $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u|v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u | D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

où $(.|.)_{L^2(\Omega)}$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire $(f|g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega fgdx$. Notons que $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

En particulier, pour $k = 1$ l'epace de Sobolev est défini comme suit.

Définition 1.1.14.
Soit $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace vectoriel

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \exists g_1, g_2, ..., g_n \in L^p(\Omega),\ \int_\Omega g_i \varphi dx = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \right\},$$

où $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω et à support compact.

On note $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_d} \right)$ pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et on définit la norme

$$||u||_{1,p} = (||u||^p_p + ||\nabla u||^p_p)^{\frac{1}{p}} \equiv ||u||_{1,p} = ||u||_p + ||\nabla u||_p, \quad pour \ \ p \in [1, +\infty[$$

($\equiv$ pour dire équivalent) et pour $p = +\infty$, on munit $W^{1,\infty}(\Omega)$ par la norme

$$||u||_{1,\infty} = \max(||u||_\infty, ||\nabla u||_\infty),$$

où

$$||u||_\infty = ess - \sup_\Omega |u| = \inf\{C > 0;\ |u(x)| \leq C \ \ p.p \ \ dans \ \ \Omega\}.$$

On note pour $p < +\infty$, $W_0^{k,p}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{k,p}(\Omega)$. Si $p = 2$ on le note $W_0^{k,2}(\Omega) = H_0^k(\Omega)$.

Les dérivées partielles écrites ci-dessus dans les deux définitions précédentes sont naturellement prises au sens des distributions.

Définition 1.1.15.
On définit $W^{1,p}([0,T],X)$ comme étant l'ensemble des fonctions $f : [0,T] \longrightarrow X$ telles que pour un certain

$$g \in L^p([0,T],X)\ ,\ \ f(t) = f(0) + \int_0^t g(x)dx,\ \ t \in [0,T].$$

Proposition 1.1.25.
Soit $f : [0,T] \longrightarrow X$ mesurable, avec X un espace de Banach. On a :

$$f' = \partial_t f \in L^p([0,T],X) \Longleftrightarrow f \in W^{1,p}([0,T],X).$$

Proposition 1.1.26.
L'espace $W^{k,p}(\Omega)$ munit de la norme $||.||_{k,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$, réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.

La question de la densité des fonctions régulières jusqu'au bord dans $W^{k,p}(\Omega)$ dépend quant à elle de la régularité de l'ouvert Ω lui-même. Rappelons d'abord la définition d'un ouvert lipschitzien de $\mathbb{R}^d$.

Définition 1.1.16. *(domaine de Lipschitz).*
Soit $d \in \mathbb{N}$, et soit Ω un sous-ensemble ouvert et borné de $\mathbb{R}^d$. $\partial\Omega$ désigne la frontière de Ω. Alors Ω est dite avoir une frontière lipschitziennz, et est appelé un domaine lipschitzien, si , pour tout point $a \in \partial\Omega$ il existe un rayon $r > 0$ et une application $h_a : B_r(a) \longrightarrow Q$ tels que :

(a) h_a soit une injection ;

(b) h_a et h_a^{-1} soient toutes deux des fonctions continues lipschitziennes ;

(c) $h_a(\partial\Omega \cap B_r(a)) = Q_0$;

(d) $h_a(\Omega \cap B_r(a)) = Q_+$;
où $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^d,\ ||x - a|| < r\}$ désigne la boule ouverte de dimension d de rayon r de centre a, Q désigne la boule unité $B_1(0)$, et $Q_0 = \{(x_1, x_2, ..., x_{d-1}, x_d) \in Q | x_d = 0\}$; $Q_+ = \{(x_1, x_2, ..., x_{d-1}, x_d) \in Q | x_d > 0\}$.

On a parfois besoin de plus de régularité de l'ouvert, auquel cas on utilise également la définition suivante.

Définition 1.1.17. *(Domaine de classe $C^{k,\alpha}$).*
Un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est dit être de classe $C^{k,\alpha}$ avec k un entier naturel et α un réel positif si en chaque point x_0 de $\partial\Omega$ il existe une boule B centrée en x_0 et une bijection ψ de B sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^d$ telles que :

(a) $\psi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^d_+$;

(b) $\psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^d_+$;

(c) $\psi \in C^{k,\alpha}(B; D),\ \psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(D; B)$,

où $\mathbb{R}^d_+ = \{(x_1, x_2, ..., x_{d-1}, x_d) | x_d \leq 0\}$.

L'ouvert Ω est dit être de classe C^∞, ou régulier sans autre précision, s'il est de classe $C^{k,\alpha}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.1.27.
Soit Ω un ouvert lipschitzien. Alors l'espace $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{k,p}(\Omega)$, pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Mentionnons maintenant un résultat de première importance : les injections de Sobolev pour $\Omega = \mathbb{R}^d$ ou bien Ω ouvert borné régulier.

Théorème 1.1.28. *(Injection de Sobolev).*
Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$ et $p \in [1, +\infty[$. Alors :

(i) si $1 \leqslant p < d$, on a $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ avec $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{d}$, ou encore $p^* = \dfrac{dp}{d-p}$;
(où p^* s'appelle l'exposant (critique) de Sobolev).

(ii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec $q \in [1, +\infty[$, si $p = d$

(iii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$ où $\gamma = 1 - \dfrac{d}{p}$ si $p > d$

sont des injections compactes.

Un autre résultat de première importance est un résultat de compacité que l'on regroupe tous le terme générique de théorème de Rellich-Kondrachov.

Théorème 1.1.29. *(Théorème de Rellich-Kondrachov).*
Soit Ω un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^d$ et $p \in [1, +\infty[$. Alors les injections

(i) si $1 \leqslant p < d$, on a $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec $1 \leqslant q < p^*$ où $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{d}$, ou encore $p^* = \dfrac{dp}{d-p}$;
(où p^* est la conjugué de Sobelev où encore appellé l'exposant (critique) de Sobolev.

(ii) $W^{1,d}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec $q \in [1, +\infty[$, si $p = d$

(iii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$ où $\gamma = 1 - \dfrac{d}{p}$ si $p > d$

sont des injections compactes.

En particulier, l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte. On rappelle qu'un operateur est dit être compact s'il transforme les ensembles bornés de l'espace de départ en ensembles relativement compacts de l'espace d'arrivé.

1.1.4 Rappels d'Analyse Convexe

Soit E est un espace vectoriel réel.

Définition 1.1.18. *(Convexes).*
Une partie C de E est dite convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in C, \forall \theta \in [0,1] : \theta x + (1-\theta)y \in C$$

Géométriquement, $z(\theta) = \theta x + (1-\theta)y$ est le barycentre des points x et y affectés des coefficients (ou poids) respectifs θ et $1-\theta$. Lorsque θ décrit l'intervalle $[0,1]$, $z(\theta)$ décrit le segment fermé d'extrémités x et y que l'on notera $[x,y]$. Dire que C est convexe, c'est donc dire que C contient un segment dès qu'elle contient ses extrémités.

Définition 1.1.19. *(Enveloppe convexe).*
Soit A une partie de E. L'enveloppe convexe de A, notée $conv(A)$, est l'intersection de tous les convexes contenant A.

L'enveloppe convexe $conv(A)$ est évidemment un convexe contenant A, et c'est le plus petit : si C est un convexe contenant A, il contient $conv(A)$.

Proposition 1.1.30.
L'enveloppe convexe de A est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes finies d'éléments de A :

$$conv(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \ \ / \ n \geq 1, x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \right\}$$

Proposition 1.1.31. *(Enveloppe convexe fermée)*
On a la relation : $\overline{conv(A)} = \overline{conv}(A)$, i.e. l'enveloppe convexe fermée est la fermeture de l'enveloppe convexe.

Corollaire 1.1.32. *(Enveloppe convexe d'un compact)*
Soit A un compact de $\mathbb{R}^d$. Alors son enveloppe convexe est compacte.

Définition 1.1.20. *(Fonction semi-continue inférieurement)*
Une fonction J définie sur un espace topologique X et à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$, est dite semi-continue inférieurement (en abrégé s.c.i) si : $\forall a \in [-\infty, +\infty]$, $J^{-1}([-\infty, a])$ est un fermé pour la topologie considérée sur X.

Définition 1.1.21. *(Fonction s.c.i.).*
On dit que la fonction numérique $f : E \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement (s.c.i.) si pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in E / f(x) > a\}$ est un ouvert de E. Il revient au même de dire que pour tout $a \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{x \in E / f(x) \leq a\}$ est un fermé de E.

En effet les ensembles $\{x \in E / f(x) > a\}$et $\{x \in E / f(x) \leq a\}$ sont complémentaires ; le premier est ouvert si et seulement si le second est fermé.

Exemple 1.1.33.

1. Un sous-ensemble A de E est fermé si et seulement si sa fonction caractéristique $\mathcal{X}_A$ est s.c.i.
2. Toute fonction continue est s.c.i.
3. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si f et $-f$ sont s.c.i.

Proposition 1.1.34. *La fonction numérique $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est s.c.i. si et seulement si son épigraphe est fermé.*

On a une autre caractérisation des fonctions s.c.i. en termes de limites inférieures :

Définition 1.1.22.

a) Si $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in E$, et $Y \subset E$, on pose :

$$\liminf_{\substack{x \to x_0 \\ x \in Y}} f(x) = \sup_{r>0} \inf_{\substack{d(x,x_0)<r \\ x \in Y}} f(x)$$

Lorsque $Y = E$, on écrit simplement $\liminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{r>0} \inf_{d(x,x_0)<r} f(x)$.

b) Si $(x_n)_n \in N$ est une suite de E, on pose : $\lim_{n \to +\infty} \inf\ x_n = \lim_{p \to +\infty} \inf\{x_p, p \geq n\}$

Remarque 1.1.35. Si $x_0 \in Y$, on a $\liminf_{\substack{x \to x_0 \\ x \in Y}} f(x) \leq f(x_0)$.

Définition 1.1.23.

Soit X un espace de Banach.

Une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite faiblement s.c.i (abrégé s.c.i.f) en $x_0 \in X$ si pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ convergent faiblement vers x_0 on a :

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n).$$

Définition 1.1.24.

Soit f une fonction définie sur un espace de Banach X.

a) Une partie A de X est dite convexe si et seulement si $\forall \alpha \in [0,1],\ \forall x, y \in A$, on a $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$;

b) Une fonction $f : A \subset X \longrightarrow]-\infty, +\infty[$, avec A un convexe, est dite convexe si et seulement si $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y),\ \forall x, y \in A$ et $\alpha \in [0,1]$.

c) Une fonction f telle que $\liminf f(x_n) \leq f(x)$ quand $(x_n)_n$ est une suite qui tend vers x est dite séquentiellement semi-continue inférieurement(s.s.c.i). Et une fonction s.c.i est s.s.c.i.

La raison pour laquelle on exclut la valeur $-\infty$ dans ce contexte, est qu'une fonction convexe qui prend cette valeur est nécessairement identiquement égale à $-\infty$ ou alors la notion même de convexité est mal définie avec des formes indéterminées $+\infty\ -\infty$ si on lui fait aussi prendre la valeur $+\infty$. Ce cas ne présente donc aucun intérêt.

1.2 Quelques opérateurs différentiels en coordonnées cartésiennes

Les opérateurs différentiels fréquemment rencontrés sont ceux à caractères vectoriels que sont autres le gradient, la divergence et le laplacien. Ils sont tous basés sur l'opérateur nabla, généralement noté ∇.

- **Le gradient**

  D'un scalaire f (fonctions de plusieurs variables) : $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

  D'un vecteur $u = (u_1, ..., u_q)^t$ (fonction vectorielle de plusieurs variables) est la matrice définie par :

  $$\nabla u = \begin{pmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \\ \vdots \\ \nabla u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \vdots \quad \vdots \\ \frac{\partial u_q}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_q}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- **La divergence**

  D'un vecteur u : $div(u) = \nabla.u = tr(\nabla u) = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ est un scalaire ; (dans ce cas, $q = n$).

  D'une matrice $A = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$: $divA = \nabla.A = \begin{pmatrix} \nabla.A_{1j} \\ \nabla.A_{2j} \\ \vdots \\ \nabla.A_{nj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_{1j}}{\partial x_j} \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_{2j}}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_{nj}}{\partial x_j} \end{pmatrix}$ est un vecteur.

- **Le Laplacien**

  D'un scalaire g : $\Delta g = div(\nabla f) = \nabla.\nabla g = \nabla^2 g = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}$ est un scalaire.

  D'un vecteur u : $\Delta u = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u_1}{\partial^2 x_i} \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u_2}{\partial^2 x_i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u_q}{\partial^2 x_i} \end{pmatrix}$ est un vecteur.

1.3 Rappels sur les matrices

Une matrice A de $\mathbb{R}^{p \times n}$ a pn coefficients, p lignes et n colonnes et est notée

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}.$$

La matrice A est carrée d'ordre n si $p = n$.

Le produit de la matrice A par un vecteur est défini pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$y = Ax \in \mathbb{R}^p \qquad \text{avec} \;\; y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \qquad i = 1, ..., p.$$

Si $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$, $(1 \leq i \leq m;\ 1 \leq j \leq n)$ alors

(i) $A = B$ si et seulement si $a_{ij} = b_{ij}$;

(ii) $A = 0$ si et seulement si $a_{ij} = 0$ pour tout i et j ;

(iii) $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$, $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$;

(iv) la multiplication de la matrice A par un scalaire est donnée par : $kA = [ka_{ij}]$.

1.3.1 Norme matricielle

Définition 1.3.1.

On appelle norme matricielle $||.||$ sur $M_n(K)(K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ toute application vérifiant les propriétés suivantes :

a) $||A|| = 0 \Longleftrightarrow A = 0.$
$||A|| > 0 \Longleftrightarrow A > 0.$

b) $||\alpha A|| = |\alpha|||A||,\ \forall A \in M_n(K)$

c) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||,\ \forall (A, B) \in M_n(K)^2$ *(inégalité triangulaire)*

d) $||AB|| \leq ||A||||B||,\ \forall (A, B) \in M_n((K)^2$.

Par exemple

$$||.||_1 = \max_{j=1\cdots n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

$$||.||_\infty = \max_{i=1\cdots n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

1.3.2 Valeurs propres et Rayon spectrale

Définition 1.3.2.

a) Soit A une matrice carrée d'ordre n. Un vectur propre de A est un vecteur non nul $\overrightarrow{X}$ tel que $A\overrightarrow{X} = \lambda\overrightarrow{X}$, pour un certain scalaire λ.

b) Un scalaire λ est appelé une valeur propre de A si l'équation $A\overrightarrow{X} = \lambda\overrightarrow{X}$ admet une solution non triviale $\overrightarrow{X}$; $\overrightarrow{X}$ est appelé le vecteur propre associé à λ.

Remarque 1.3.1.

1. λ est une valeur propre de A si et seulement si l'équation

$$(A - \lambda I)\overrightarrow{X} = 0$$

2. L'espace solution de $(*)$ n'est pas autre que $ker(A - \lambda I)$. Cet espace est appelé l'espace propre de A associé à valeur propre λ.

Définition 1.3.3.
Le spectre $A \in M_n(K), n \geq 1$, est l'ensemble des valeurs propres de A :

$$\sigma(A) = \{\lambda \in K, A - \lambda I \quad \textit{singulière}\}.$$

Dans la suite de notre présent mémoire il sera souvent noté : "sp".

Le rayon spectrale de A est le plus grand des modules des valeurs propres de A

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\}.$$

1.3.3 Quelques matrices particulières

1 **Transposée d'une matrice**
On appelle transposée d'une matrice $A = (a_{ij})$ de type $p \times q$. La matrice $B = (b_{ij})$ de type $q \times p$. Obtenue en échangeant lignes et colonnes de A : $b_{ij} = a_{ij}$.

2 **Matrice symétrique**
C'est une matrice A carrée telle que : $A = A^T$.

Théorème 1.3.2.
Soit A une matrice symétrique. il existe une base $V = (v_i)$ de n vecteurs propres orthonormés telle que $AV = VD$, où D est la matrice diagonale avec les valeurs propres réelles de A sur la diagonale. On a donc $V^TAV = D$ et $A = VDV^T$.

La somme des valeurs propres est la trace de la matrice, qui est la somme des coefficients diagonaux ; le produit des valeurs propres est le déterminant de la matrice.

Théorème 1.3.3. *Soit A une matrice symétrique d'ordre n et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres. Soit $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ la trace de A et $det(A)$ le déterminant de A. Alors*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A), \qquad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = det(A).$$

3 **Matrice définie positive (forme quadratique)**

On appelle forme quadratique associée à la matrice A la forme :

$$Q(x) = X^tAX.$$

Une forme quadratique est dite définie positive si :

$$X^tAX > 0 \forall X \neq 0.$$

Remarque 1.3.4.
Si $X^tAX \geq 0 \ \ \forall X \neq 0$.
La matrice est positive mais non définie. Une matrice carrée est définie positive si la forme quadratique qui lui est associée est définie positive.

4 **Matrice unité**

La matrice unité noté I est définie par :
$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ i = j \\ 0 & \text{si } \ i \neq j. \end{cases}$

5 **Matrice diagonale**

C'est une matrice carrée telle que :
$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ i \neq j \\ \neq 0 & \text{si } \ i = j. \end{cases}$

1.3.4 Règles d'algèbre matricielle

1 **Produit matriciel**
L'élément sur la i^e ligne et la j^e du produit matriciel $C = AB$ s'obtient par le produit scalaire de la i^e ligne de A par la j^e colonne de B : $c_{ij} = \sum_n^{k=1} \ a_{ik}b_{kj}$ avec $(i = 1, ..., m; j = 1, ..., p)$.

2 **La trace d'une matrice** Si A et B sont deux matrices carrées, alors

i) si $A + B$ existe, trace $(A + B)$ = trace (A) + trace (B) ;

ii) pour tout scalaire k, trace $(kA) = k$ trace (A) ;

iii) si AB et BA existent, trace (AB) = trace (BA).

Notons que dans la suite de notre travail nous allons simplifier le terme trace(A) à $tr(A)$.

1.4 Un peu de calcul différentiel

Dans ce chapitre, on traite des fonctions à plusieurs variables. Comme pour les fonctions à une variable, on étudie les problèmes d'optimisation en utilisant le calcul différentiel. On introduit l'équivalent des dérivées premières et secondes, à savoir le gradient et la matrice hessienne. Dans tout le chapitre, Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et f est une fonction à plusieurs variables de Ω dans $\mathbb{R}$.

1.4.1 Fonctions de classe C^1

Il est possible de généraliser la notion de fonction dérivable à celle de fonction différentiable. Dans ce cours, nous n'étudions que les fonctions de classe $C^1(\Omega)$, qui sont différentiables, la réciproque étant fausse. Pour cela, nous commençons par définir des fonctions et dérivées partielles.

Définition 1.4.1.

Soit $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$. La fonction partielle à une variable Φ_i est définie dans un intervalle contenant x_i par $\Phi_i(t) = f(x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_n)$. Si Φ_i est dérivable en x_i, on définit la i^{me} dérivée partielle de f en x par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \Phi'(x_i)$$

Définition 1.4.2.

La fonction f est de classe $C^1(\Omega)$ si et seulement si les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existent et sont continues dans Ω.

Les dérivées partielles forment un vecteur que l'on appelle le gradient de la fonction.

Définition 1.4.3. *Soit f une fonction de classe $C^1(\Omega)$. Le vecteur gradient de f est une fonction continue de Ω dans $\mathbb{R}^n$ définie par*

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{1 \leq i \leq n}.$$

La formule de Taylor à l'ordre 1 permet d'approcher la fonction f par une fonction linéaire :

Théorème 1.4.1. *Soit f une fonction de classe $C^1(\Omega)$, soit deux vecteurs $x \in \Omega$ et $x + y \in \Omega$. Alors*

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + \nabla f(x)^T y + ||y|| \epsilon(||y||), \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + ||y|| \epsilon(||y||), \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.

1.4.2 Fonctions de classe C^2

Définition 1.4.4. *On peut continuer le processus et définir des dérivées partielles secondes grâce à la matrice jacobienne du gradient. Si la fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ admet des dérivées partielles, alors la fonction f admet des dérivées partielles secondes, définies par :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right).$$

Définition 1.4.5.

La fonction f est de classe $C^2(\Omega)$ si et seulement si les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existent et sont continues.

Les dérivées partielles secondes en x forment une matrice dans $\mathbb{R}^{n \times n}$, que l'on appelle la matrice hessienne de f en x. Elle est symétrique si la fonction est de classe $C^2(\Omega)$, c'est le théorème de Schwarz.

Théorème 1.4.2.

Soit f une fonction de classe $C^2(\Omega)$. La matrice hessienne de f est une fonction continue de Ω dans $\mathbb{R}^{n\times n}$ définie par :

$$H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}.$$

La matrice $H_f(x)$ est symétrique

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

1.5 Éléments de classification : E.D.P. elliptiques, hyperboliques et paraboliques

On peut les classer en trois grandes familles :"elliptique", "hyperbolique" et "parabolique".

Remarque 1.5.1. La terminologie "elliptique", "hyperbolique" et "parabolique" vient du fait que lorsque la matrice $A(x)$ est constante, les courbes $x^T Ax = cte$ sont respectivement des ellipsoïdes, des hyperboloïdes et des paraboloïdes.

1.5.1 E.D.P elliptiques

Définition 1.5.1.

Une E.D.P. linéaire du second ordre est dite elliptique en $x \in \Omega$ si la matrice $A(x)$ n'admet que des valeurs propres non nulles et qui sont toutes de même signe.

Si l'E.D.P. est elliptique sur tout le domaine d'étude Ω elle modélise en général des problèmes d'équilibres ou des problèmes stationnaires.

Exemple 1.5.2.

• L'équation

$$\Delta\Phi(x) = f(x)$$

(où $\Delta\Phi(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}$ est le laplacien de $\Phi(x)$ est elliptique, car la matrice $A(x)$ correspondante est $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ matrice identité de R^N .

Toutes les valeurs propres sont donc égales à 1.

• Plus généralement, les équations de la forme

$$div\ (k(x)\nabla\Phi(x) = f(x)$$

avec $k(x) > 0$ sont elliptiques.

1.5.2 E.D.P. hyperboliques

Définition 1.5.2.

Une E.D.P. est dite hyperbolique en $x \in \Omega$ si $A(x)$ n'admet que des valeurs propres non nulles et qui sont toutes de même signe sauf une de signe opposé.

Si l'E.D.P. est hyperbolique sur tout le domaine d'étude Ω elle modélise en général des problèmes de convection.

Exemple 1.5.3.

• L'équation des ondes

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t,x) - c\Delta\Phi(t,x) = f(t,x) \qquad \text{pour } t \geq 0 \; x \in \mathbb{R}^d$$

est de type hyperbolique ($\Delta\Phi(t,x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}$ est le laplacien de $\Phi(t,x)$ par rapport à x). En effet la matrice $A(x)$ vaut dans ce cas $A(t,x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -c^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -c^2 \end{pmatrix}$ dont une valeur propre vaut 1 et toutes les autres $-c^2$.

• Plus généralement, les équations du type

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t,x) - div\ (c(x)\nabla\Phi(t,x) = f(t,x) \qquad \text{pour } t \geq 0 \; x \in \mathbb{R}^d,$$

sont hyperboliques pour $c(x) > 0$.

1.5.3 E.D.P. paraboliques

Définition 1.5.3.

On dira que l'E.D.P est parabolique en $x \in \Omega$ si $A(x)$ admet $N-1$ valeurs propres non nulles de même signe et une valeur propre nulle. De plus, soit $v(x)$ le vecteur propre associé à la valeur propre nulle, on doit avoir $v(x).F(x) \neq 0$.

Si la condition $v(x).F(x) \neq 0$ n'est pas vérifiée, alors l'équation est dégénérée (c'est un couplage entre une E.D.P et une équation algébrique) et on ne parle plus d'équation parabolique.

Si l'E.D.P. est parabolique sur tout le domaine d'étude Ω elle modélise en général un phénomène de diffusion.

Exemple 1.5.4.

• L'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,x) - k\Delta\Phi(t,x) = f(t,x) \qquad \text{pour } t \geq 0 \; x \in \mathbb{R}^d,$$

est de type parabolique. En effet, dans ce cas $A(t,x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -k \end{pmatrix}$ admet une valeur propre nulle, toutes les autres valant $-k$. La valeur propre 0 correspond à la

valeur propre temporelle. De plus $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ la condition $v(t,x).F(t,x) \neq 0$ est vérifiée.

• Plus généralement, les équations du type

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,x) - \ div\ (k(x)\Delta\Phi(t,x)) = f(t,x), \qquad \text{pour } t \geq 0\ x \in \mathbb{R}^d,$$

sont paraboliques pour $k(x) > 0$.

1.6 Exemples d'Equations aux Dérivées Partielles

Les EDPs apparaissent fréquemment en sciences appliquées pour traduire les principes fondamentaux et modéliser de manière continue des phénomènes physiques. Son ordre (respectivement sa dimension) est le plus haut dégré de dérivation présent dans l'équation(respectivement le nombre de variables indépendantes dont dépend l'inconnue u).

En général, une EDP est complétéé par des conditions sur le bord de la fonction u. Il faut remarquer qu'il n'existe pas de résultats généraux sur l'existence de solutions des EDPs . Il est alors nécessaire de restreindre l'étude à certains cas. Donnons donc, dans ce qui suit, une rapide classification des EDPs et des conditions aux limites.

Définition 1.6.1. *(Classification des EDPs)*

(a) Une EDP est dite linéaire si la dépendance par rapport à la fonction inconnue u et ses dérivées partielles est linéaire. Si tel n'est pas le cas, on dira simplement qu'elle est non linéaire.

(b) On dit qu'une EDP est semi-linéaire si la dépendance par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé est linéaire. Autrement dit c'est une EDP non linéaire mais linéaire par rapport à ses dérivées, les coefficients ne dépendent ni de u et ni de ses dérivées.

(c) Une EDP quasi-linéaire est une EDP non linéaire, mais est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre maximal.

(d) Une EDP sera dite comlètement non linéaire si elle dépend non linéairement de ses dérivées d'ordre le plus élevé.

Définition 1.6.2. *(Classification des conditions aux limites).*

(a) On appelle condition de Dirichlet une condition où on impose la valeur de la fonction recherchée sur le bord de son domaine de définition Ω : $u = h$ sur $\partial\Omega$. Si $h \equiv 0$, on parle de condition de Dirichlet homogène.

(b) On appelle condition de Neumann une condition où on impose la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée sur le bord : $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = g$ sur $\partial\Omega$. Si $g \equiv 0$, on parle de condition de Neumann homogène.

(c) On appelle condition de Fourier-Robin une condition où on impose une relation entre la dérivée normale de la fonction recherchée et sa valeur sur le bord : $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} + \lambda u = f$ sur $\partial\Omega$, où λ est une constante.

Le concept même de recherche de solution(s) d'une EDP n'est pas nécessairement très clair et nécessite d'être reprécisé pour chaque problème. Un repère important est la notion de problème bien posé.

Définition 1.6.3. *(Problème bien posé)*
Un problème est dit bien posé au sens de Hadamard s'il existe une unique solution qui dépend des données de façon continue(cela suppose le choix d'une mesure"raisonnable" des variations des données).

Conclusion

Ce chapitre explore les bases théoriques nécessaires, en rappelant les concepts d'analyse fonctionnelle nécessaire pour la suite du présent document. Dans le chapitre suivant nous allons rappeler d'autres notions qui serions utiliser directement où indirectement dans ce mémoire.

Chapitre 2

Préliminaires

Introduction

Dans cette chapitre, nous allons premièrement évoquer l'espace L^{∞}_{int}, deuxièment nous évoquerons quelques notions de convolution, troisièmement nous parlerons de notion d'espace de probabilité et enfin nous évoquerons quelques notions sur la théorie des semi-groupes.

2.1 Espaces des fonctions L^1_{loc} et L^{∞}_{int}

Dans cette section, on travaille avec la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, et la tribu des boréliens.
Commençons par l'espaces L^1_{loc} qui est l'espace des fonctions mesurables (modulo l'égalité presque-partout) qui sont intégrables sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ (ou de manière équivalente sur tout ensemble mesurable de mesure finie) , ensuite nous évoquerons le cas de l'espace L^{∞}_{int} qui est l'espace des fonctions localement bornées, elle est utilisée pour traiter des problèmes qui ont une nature locale et enfin nous rappellerons quelques notions de convolutions.

2.1.1 L'espace des fonctions L^1_{loc}

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est notée μ. C'est toujours par rapport à cette mesure que l'on intègre sur des parties de $\mathbb{R}$.

On note, pour I intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace de Banach, $L^1_{loc}(I;E)$ l'ensemble des applications μ-mesurables $f : I \longrightarrow E$ telles que, pour tout compact Kde I, $f \in L^1(K;E)$ (i.e. $f_{\mathbb{1}K} \in L^1(K;E)$; c'est aussi l'espace des applications μ-mesurables $f : I \longrightarrow E$ telles que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, $f_\varphi \in L^1(K;E)$. Remarquons que pour tout $p \in [1,+\infty]$ et tout compact K de I on a $L^p(K;E) \subset L^1(K;E)(K$ est de mesure finie) ; on en déduit que, pour tout $p \in [1,+\infty]$, $L^p(I;E) \subset L^1_{loc}(I;E)$.

De plus, si $f : I \longrightarrow E$ est continue, elle est limite simple de fonctions en escalier à supports compacts (cas particuliers de fonctions simples) et est donc μ-mesurable ; de plus, pour tout K compact de I, comme f est bornée sur K, $f \in L^1(K;E)$. Ainsi $C^0(I;E) \subset L^1_{loc}(I;E)$.

Lemme 2.1.1. *Si $f \in L^1_{loc}(I;E)$ vérifie :*

$$\varphi \in \mathcal{D}(I),\ \int_I f(t)\varphi(t)dt = 0$$

alors $f = 0$ presque partout sur I.

Remarque 2.1.2.
Ce lemme est le lemme fondamental de la théorie des distributions et des espaces de Sobolev ; il est aussi valable lorsque I est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ avec $N > 1$.

Démonstration.

Il suffit, puisque I est réunion dénombrable de compacts, de montrer que pour tout compact K de I on a $f = 0$ presque partout sur K. Soit donc un tel compact K : comme I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et K est dans I, il existe $[a, b] \subset I$ et $\delta > 0$ tels que $K \subset [a + \delta, b - \delta]$ (il suffit de prendre $\delta = d(K, I^c)/2$ et $a = infK - \delta, b = supK + \delta$).

Puisque $[a, b]$ est compact dans I, $f \in L^1([a, b]; E)$ et la fonction $\widetilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow E$ égale à f sur $[a, b]$ et nulle hors de $[a, b]$ est dans $L^1(\mathbb{R}; E)$.Prenons $\rho_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une approximation de l'unité telle que, pour tout $k \geq 1$, $supp(\rho_k) \subset [?1/k, 1/k]$ et notons $f_k = \widetilde{f} * \rho_k$; la suite $(f_k)_{k\geq 1}$ converge vers $\widetilde{f}$ dans $L^1(R; E)$.
Pour $k > 1/\delta$ et $x \in K$, on a alors

$$\begin{aligned} f_k(x) = & \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(t)\rho_k(x - t)dt \\ = & \int_a^b f(t)\rho_k(x - t)dt. \end{aligned}$$

Mais $t \longrightarrow \rho_k(x-t)$ est de classe C^∞ et à support dans $x+[-1/k, 1/k] \subset K+[-\delta, \delta] \subset [a, b]$, compact de I, donc

$$\int_a^b f(t)\rho_k(x - t)dt = \int_I f(t)\rho_k(x - t)dt \ \text{ dès que } x \in K$$

On a montré que, pour tout $k \geq 1/\delta$, $f_{k|K} = 0$. Mais $f_k \longrightarrow \widetilde{f}$ dans $L^1(\mathbb{R}; E)$ donc $f_{k|K} \longrightarrow \widetilde{f}_{|K} = f_{|K}$ dans $L^1(K; E)$; on en déduit que $f_{|K} = 0$ dans $L^1(K; E)$, c'est à dire presque partout sur K.

□

Notons que de façon générale nous avons aussi $L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ défini par :

$L^p_{loc}(\mathbb{R}^d) = \{f$ mesurable sur K et $f \in L^p(K)$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$ $\}$.

Théorème 2.1.3.
Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(X; E)$ est un Banach.

Démonstration.

Dans le cas $p = +\infty$, prenons $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $L^\infty(X; E)$ et posons

$$A_{n,m} = \{x \in X| \ ||f_n(x) - f_m(x)|| > ||f_n - f_m||_{L^\infty(X;E)},$$

un ensemble de mesure nulle ; $A = \bigcup_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq 1} A_{n,m}$ est lui-aussi de mesure nulle. Sur A^c, on a $||f_n(x) - f_m(x)|| \leq ||f_n - f_m||_{L^\infty(X;E)}$, donc la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans E et elle converge vers $f(x)$; quitte à définir f par 0 hors de A, on a ainsi une fonction f limite simple μ-presque partout de f_n, et f est donc μ-mesurable. De plus, pour $x \notin A$, on a $||f_n(x) - f(x)|| = \lim_{m\longrightarrow+\infty} ||f_n(x) - f_m(x)||$, et donc ($(f_n)_{n\geq 1}$ étant de Cauchy dans $L^\infty(X; E)$) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 1$ tel que, si $n \geq N$, dès que

$x \notin A,\ ||f_n(x) - f(x)|| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire (puisque $\mu(A) = 0$), $||f_n - f||_{L^\infty(X;E)} \leq \varepsilon$.
Dans le cas $1 \leq p < +\infty$, nous allons montrer que toute série absolument convergente de $L^p(X;E)$ est convergente dans $L^p(X;E)$ (ce qui est équivalent à la complétude de $L^p(X;E)$. Prenons donc une série $\sum_{n\geq 1} f_n$ absolument convergente dans $L^p(X;E)$, i.e. $M = \sum_{n\geq 1} ||f_n||_{L^p(X;E)} < +\infty$. Définissons $g : X \longrightarrow [0, +\infty]$ par $g(x) = \sum_{n\geq 1} ||f_n(x)||$: g est mesurable en tant que limite simple de fonctions mesurables ; on a, pour tout $N \geq 1$,

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} ||f_n|| \right\|_{L^p(X)} \leq \sum_{n=1}^{N} ||f_n||_{L^p(X,E)} \leq M < +\infty$$

et, en utilisant le lemme de Fatou,

$$\int_X g^p d\mu = \int_X \liminf_{N\longrightarrow+\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} ||f_n|| \right)^p d\mu \leq \liminf_{N\longrightarrow+\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} ||f_n|| \right\|^p_{L^p(X)} \leq M^p < +\infty$$

donc g est finie μ-presque partout. Comme E est un Banach, cela signifie que, pour μ-presque tout x, $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge vers $F(x)$; quitte à définir F par 0 là où la convergence n'a pas lieu, PN $\sum_{n\geq 1} f_n \longrightarrow F$ μ-presque partout et F est donc μ-mesurable ; de plus, en faisant tendre N vers l'infini dans l'inégalité
$\left\| \sum_{n=1}^{N} f_n \right\| \leq g$, on a $||F|| \leq g$ μ-presque partout, et F est donc dans $L^p(X;E)$. Comme $F - \sum_{n=1}^{N} f_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n = \lim_{k\longrightarrow+\infty} \sum_{n=N+1}^{k} f_n$ μ-presque partout, en utilisant à nouveau le lemme de Fatou, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_X \left\| F - \sum_{n=1}^{N} f_n \right\|^p d\mu &= \int_X \liminf_{k\longrightarrow+\infty} \left\| \sum_{n=N+1}^{k} f_n \right\|^p d\mu \\
&\leq \liminf_{k\longrightarrow+\infty} \left\| \sum_{n=N+1}^{k} f_n \right\|^p_{L^p(X;E)} \\
&\leq \liminf_{k\longrightarrow+\infty} \left(\sum_{n=N+1}^{k} ||f_n||_{L^p(X;E)} \right)^p \\
&\leq \left(\sum_{n\geq N+1} ||f_n||_{L^p(X;E)} \right)^p .
\end{aligned}$$

Mais $\sum_{n\geq 1} ||f_n||_{L^p(X;E)}$ converge, donc le dernier terme de cette suite d'inégalités tend vers 0 lorsque $N \longrightarrow \infty$, ce qui veut bien dire que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge vers F dans $L^p(X;E)$.

□

La section ci-dessous sera particulièrement d'une grande importance dans le quatrième chapitre.

2.1.2 L'espace des fonctions L^{∞}_{int}

L'espace L^{∞}_{int}, est appelé espace des fonctions localement bornées. L'espace L^{∞}_{int} utilisé pour traiter des problèmes qui ont une nature locale, c'est-à-dire lorsque les propriétés d'une fonction sont analysées sur des sous-ensembles à mesure finie. Nous pouvons notée l'espace L^{∞}_{int} est le dual de l'espace L^{1}_{loc}, c'est-à-dire que les fonctionnels linéaires continus sur L^{1}_{loc} peuvent être représentés par des éléments de L^{∞}_{int}. Cette dualité est importante dans la résolution de problèmes de minimisation en théorie des distributions et dans les espaces de Sobolev.

Définition 2.1.1. *[28].*

$$\textit{Soit } L^{\infty}_{int}(\mathbb{R}^d) := \{\varphi_0 \in L^{1}_{loc}(\mathbb{R}^d) \quad \textit{telque} \quad ||\varphi_0||_{L^{\infty}_{int}} < \infty\}$$

où $||\varphi_0||_{L^{\infty}_{int}} := \int ess\sup_{\bar{Q}_1(x)} |\varphi_0| dx$ *et* $\bar{Q}_r(x) := x + [-r, r]^d$ *pour* $r > 0$.

Théorème 2.1.4. *[28].*
L'espace L^{∞}_{int} est espace de Banach, continuellement plongé dans $L^1 \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^d)$.

Lemme 2.1.5. *[28].*
Pour tout $r > 0$ et $\varepsilon \geq 0$, il existe une constante $C_{r,\varepsilon} \geq 0$ telle que

$$\int \sup_{\bar{Q}_{r+\varepsilon}(x)} |\varphi_0| dx \leq C_{r,\varepsilon} \int \sup_{\bar{Q}_r(x)} |\varphi_0| dx \qquad \forall \varphi_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Démonstration.
Par la définition 2.1.1 les cubes sont définis comme suit :

$$\bar{Q}_r(x) = x + [-r, r]^d \quad \text{et} \quad \bar{Q}_{r+\varepsilon}(x) = x + [-(r+\varepsilon), (r+\varepsilon)]^d.$$

Lorsque $\varepsilon \geq 0$, le cube $\bar{Q}_r(x)$ est inclus dans $\bar{Q}_{r+\varepsilon}(x)$, c'est-à-dire :

$$\bar{Q}_r(x) \subseteq \bar{Q}_{r+\varepsilon}(x).$$

Ceux-ci prouve que la borne supérieure de $|\varphi_0|$ sur $\bar{Q}_{r+\varepsilon}(x)$ peut être plus grande ou égale à celle sur $\bar{Q}_r(x)$, puisque la fonction φ_0 est prise sur un domaine plus large. Puisque $\bar{Q}_r(x) \subseteq \bar{Q}_{r+\varepsilon}(x)$, il est évident que :

$$\sup_{\bar{Q}_r(x)} |\varphi_0| \leq \sup_{\bar{Q}_{r+\varepsilon}(x)} |\varphi_0|.$$

Cependant, il n'y a pas de raison évidente pour que cette inégalité soit stricte ; elle dépend de la fonction φ_0 et de ses variations sur la différence entre les cubes $\bar{Q}_{r+\varepsilon}(x)$ et $\bar{Q}_r(x)$.

Pour établir une inégalité avec une constante $C_{r,\varepsilon}$, il nous faut quantifier l'effet de l'agrandissement du domaine de prise de la borne supérieure. Autrement dit, comment la variation de la fonction φ_0 sur $\bar{Q}_{r+\varepsilon}(x) \setminus \bar{Q}_r(x)$ affecte la borne supérieure globale.

Le volume de $\bar{Q}_{r+\varepsilon}(x)$ est donné par $(2(r+\varepsilon))^d$, et celui de $\bar{Q}_r(x)$ par $(2r)^d$. Le rapport entre ces volumes est :

- $$\frac{\text{Vol}(\bar{Q}_{r+\varepsilon}(x))}{\text{Vol}(\bar{Q}_r(x))} = \left(\frac{r+\varepsilon}{r}\right)^d.$$

Cela suggère que, comme $\varepsilon \geq 0$, le volume de $\bar{Q}_{r+\varepsilon}(x)$ est plus grand que celui de $\bar{Q}_r(x)$, et donc que la borne supérieure pourrait potentiellement être plus grande sur le cube de rayon $r + \varepsilon$.
En prenant en compte du fait que φ_0 peut varier entre $\bar{Q}_r(x)$ et $\bar{Q}_{r+\varepsilon}(x)$, une estimation raisonnable de la relation entre les bornes supérieures serait donnée par le rapport $\bullet$. Ainsi, on a :

$$\sup_{\bar{Q}_{r+\varepsilon}(x)} |\varphi_0| \leq \left(\frac{r+\varepsilon}{r}\right)^d \sup_{\bar{Q}_r(x)} |\varphi_0|.$$

En intégrant cette inégalité sur $\mathbb{R}^d$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sup_{\bar{Q}_{r+\varepsilon}(x)} |\varphi_0|\, dx \leq \left(\frac{r+\varepsilon}{r}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{\bar{Q}_r(x)} |\varphi_0|\, dx.$$

Nous pouvons conclure que :
Nous avons donc montré que pour $\varepsilon \geq 0$, l'inégalité suivante est valide :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sup_{\bar{Q}_{r+\varepsilon}(x)} |\varphi_0|\, dx \leq C_{r,\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{\bar{Q}_r(x)} |\varphi_0|\, dx,$$

où la constante $C_{r,\varepsilon}$ est donnée par :

$$C_{r,\varepsilon} = \left(\frac{r+\varepsilon}{r}\right)^d.$$

Cette constante est supérieure ou égale à 1, et elle dépend de r, ε, et de la dimension d. □

2.2 Quelques notions de convolution

2.2.1 Fonctions convolables, convolution

Si f et g sont deux fonctions boréliennes positives sur $\mathbb{R}^d$, alors on peut définir, à l'aide de Fubini-Tonelli, $f * g$ par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pour des fonctions à valeur réelles ou complexes, il faut être plus prudent.

Définition 2.2.1. *(Fonctions convolables et convolées).*

1. *Deux fonctions mesurables (i.e. boréliennes) f et g sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs réelles ou complexes sont dites convolables si pour presque-tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $y \to f(y)g(x-y)$,appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire si pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)||g(x-y)|dy = |f| * |g|(x) < +\infty.$$

2. *Si f et g sont deux fonctions convolables, alors on peut définir, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$$

et la fonction $f * g$ s'appelle la convolée de f et g.

Exemple 2.2.1. 1. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et g est continue à support compact, alors f et g sont convolables. En effet, si g est nulle en dehors d'une certaine boule $B \subset \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned} |f| * |g|(x) &= \int |f(x-y)||g(y)|\mathbb{1}_{\{|g| \leq ||g||_\infty\}}\mathbb{1}_{\{|g|\neq 0\}}dy \\ &\leq ||g||_\infty \int |f(x-y)|\mathbb{1}_{\{|g|\neq 0\}}dy \\ &\leq ||g||_\infty \int_B |f(x-y)|dy \\ &\leq ||g||_\infty \int_{x-B} |f|d\lambda. \end{aligned}$$

qui est fini car $x - B$ est borné (donc inclus dans une certaine boule).

2. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors f et $\mathbb{R}^d$ sont convolables, et $f * \mathbb{R}^d$ est constante et vaut

$$f * \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}(x) = \int f d\lambda \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

2.2.2 Convolution avec une fonction régulière

Nous allons voir ici que si f ou g possède une certaine régularité, ie continue voire C^k , et est bornée, alors la fonction $f * g$ est définie ponctuellement (pas seulement presque partout) et a la même régularité.

Définition 2.2.2.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $C^k_b(\mathbb{R}^d)$ l'espace vectoriel des fonctions C^k qui sont bornées sur $\mathbb{R}^d$ ainsi que toutes leurs dérivées partielles (d'ordre $\leq k$). On note $C^\infty_b(\mathbb{R}^d) = \cap_{k\in\mathbb{N}} C^k_b(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 2.2.2.
Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in C^k_b(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$f * g(x) = \int f(y)g(x-y)dy,$$

est bien définie. De plus $f * g \in C^k_b(\mathbb{R}^d)$ et pour tout multi-indice α de longueur $\leq k$, on a

$$\partial^\alpha(f * g) = f * (\partial^\alpha g).$$

Notons que grâce au changement de variable $y \to x - y$, on voit que $f(x-y)g(y)$ est intégrable pour tout x et que

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy.$$

Lemme 2.2.3. (***Inégalité de Young***).
Soient f, g deux fonctions sur $\mathbb{R}^n$. Si f est de carré intégrable et g est intégrable alors le produit de convolution $f * g$ est de carré intégrable et

$$||f * g||_{L^2} \leq ||f||_{L^2}||g||_{L^1}.$$

En effet, par définition :

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy$$

et

$$||f * g||_{L^2}^2 = \int \left| \int f(x-y)g(y)dy \right|^2 dx$$

Posons :
$\begin{cases} x - y = u \\ y = v \end{cases}$
Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a :

$$\begin{aligned} \left| \int f(u)g(v)dv \right|^2 &\leq \left(\int |f(u)||g(v)|dv \right)^2 \\ &\leq \int |f(u)|^2 |g(v)|dv \int |g(v)|dv \end{aligned}$$

Ce qui entraine que :

$$\begin{aligned} \int \left| \int f(u)g(v)dv \right|^2 du &\leq \int |g(v)| \left(\int |f(u)|^2 du \right) dv \int |g(v)|dv \\ &\leq \left(\int |g(v)|dv \right)^2 \left(\int |f(u)|^2 du \right) \\ &\leq ||g||_{L^1}^2 ||f||_{L^2}^2. \end{aligned}$$

□

2.3 Quelques rappels sur la notion d'espace de probabilité

Dans cette section, nous évoquerons les notions de base de la théorie des calculs stochastiques qui seront utilisées dans toute la suite du présent mémoire. L'espace de probabilité sur lequel on travaille est noté Ω. Pour plus de détaille sur cette section voir [29, 38, 41, 43].

2.3.1 Probabilité

Un espace de probabilité est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où :

- Ω est un ensemble,
- $\mathcal{F}$ est une tribu (ou σ-algèbre) sur Ω,
- $\mathbb{P}$ est une (mesure de) probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Définition 2.3.1.
Une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ *est une application* $\mathbb{P}$ *de* $\mathcal{F}$ *dans* $[0,1]$ *telle que*

a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

b) $\mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ *pour des* A_n *appartenant à* $\mathcal{F}$ *deux à deux disjoints.*

Notation : $\mathbb{P}(A) = \int_A dP = \int_\Omega \mathbb{1}_A dP$ où $\mathbb{1}_A$ (fonction indicatrice) est la fonction définie sur Ω par $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$ si $\omega \notin A$.

Définition 2.3.2.

Soit $\Omega = [0,1]$. La tribu borélienne sur $[0,1]$ est la tribu engendrée par la famille de sous-ensembles $\mathcal{A} = \{]a,b[: 0 \leq a < b \leq 1\}$ = {intervalles ouverts dans $[0,1]$ }. Elle est notée $\mathcal{B}([0,1])$. Elle contient un très grand nombre de sous-ensembles de $[0,1]$, mais pas tous.

Définition 2.3.3. *(Variable aléatoire.)*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une variable aléatoire (souvent abrégé v.a. par la suite) est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = \{X \in B\} \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

2.3.2 Espérance d'une variable aléatoire

On procède en trois étapes :

1. Soit $X(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega),\ x_i \geq 0, A_i \in \mathcal{F}$. On définit l'espérance de telles v.a. (dites simples) comme suit :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \mathbb{P}(A_i) \in [0, +\infty].$$

Notons que $\mathbb{E}(X)$ peut prendre la "valeur" $+\infty$.

Exemple 2.3.1.

— Si $X = \mathbb{1}_A, \mathbb{P}(A) = p$, alors $\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(A) = p$.

— Si $X = c\mathbb{1}_\Omega = cste$ sur Ω, alors $\mathbb{E}(X) = c$.

2. . Soit X une v.a. $\mathcal{F}$-mesurable telle que $X(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega$. On pose

$$X_n(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{2^n} \mathbb{1}_{\frac{i}{2^n} \leq X \leq \frac{i+1}{2^n}}(\omega).$$

Alors (X_n) est une suite croissante de v.a. qui tend vers X. On définit

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{2^n} \mathbb{P}(\frac{i}{2^n} \leq X \leq \frac{i+1}{2^n}) \in [0, +\infty].$$

3. Soit X une v.a. $\mathcal{F}$-mesurable quelconque. On pose

$$X(\omega) = X^+(\omega) - X^-(\omega) \quad \text{avec} \begin{cases} X^+(\omega) = \max(0, X(\omega)) \geq 0, \\ X^-(\omega) = \max(0, -X(\omega)) \geq 0. \end{cases}$$

On a alors $|X(\omega)| = X^+(\omega) - X^-(\omega) \geq 0$.
- Si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, alors on définit $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-)$.
- Si $\mathbb{E}(|X|) = \infty$, alors on dit que $\mathbb{E}(X)$ n'est pas définie.

2.3.3 Convergences de suites de variables aléatoires.

Soient $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de v.a. et X une autre v.a., toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Il y a plusieurs façons de définir la convergence de la suite (X_n) vers X, car $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction.

Définition 2.3.4.
La convergence en probabilité est définie comme suit :

$$X_n \overbrace{n \to +\infty}^{\mathbb{P}} \quad X \quad si \quad \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}) = 0.$$

2.3.4 Le mouvement brownien

Le botaniste Robert Brown observe en 1828 le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau. En 1877, Delsaux explique les changements incessants de direction de trajectoire par les chocs entre les particules de pollen et les molécules d'eau. Un mouvement de ce type est qualifié de "mouvement au hasar".

La première étude mathématique rigoureuse est faite par N. Wiener (1923) qui exhibe également une démonstration de l'existence du Brownien. P. Lévy (1948) s'intéresse aux propriétés fines des trajectoires du Brownien. Depuis, le mouvement Brownien continue de passionner les probabilistes, aussi bien pour l'étude de ses trajectoires que pour la théorie de l'intégration stochastique (Wiener, Itô, Watanabe, Meyer, Yor, Le-Gall, Salminen, Durrett, Chung, Williams, Knight, Pitman,...) voir [15, 6] pour plus de notions.

Définition 2.3.5.
Le processus $(\mathbf{B}_t, t \geq 0)$ *est un mouvement Brownien (standard).*

a) $\mathbb{P}(\mathbf{B}_0 = 0) = 1$ *(le mouvement Brownien est issu de l'origine).*

b) $\forall s \leq t, \mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s$ *est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance* $(t - s)$.

c) $\forall n, \forall t_i,\ 0 \leq t_0 \leq t_1 ... \leq t_n$, *les variables* $(\mathbf{B}_{t_n} - \mathbf{B}_{t_{n-1}}, ..., \mathbf{B}_{t_1} - \mathbf{B}_{t_0}, \mathbf{B}_{t_0})$ *sont indépendantes.*

Remarque 2.3.2. La propriété b) est la stationarité des accroissements du mouvement Brownien, la propriété c)traduit que le mouvement Brownien est à accroissements indépendants. On peut aussi écrire c) sous la forme équivalente suivante :

c') Soit $s \leq t$. La variable $\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s$ est indépendante de la tribu du passé avant s, soit $\rho(\mathbf{B}_u, u \leq s)$. Nous ne démontrons pas l'existence du mouvement Brownien (MB dans la suite).

La filtration naturelle est $\mathcal{F}_t = \rho\{\mathbf{B}_s, s \leq t\}$. On lui ajoute de façon implicite les négligeables. On peut montrer qu'elle vérifie alors les conditions habituelles. On s'autorisera à noter $\mathbf{B}(t_i)$ au lieu de $\mathbf{B}_{t_i}$ la valeur de la trajectoire en t_i pour des raisons de lisibilité.

2.3.5 Intégrale stochastique

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un mouvement Brownien $\mathbf{B}$ sur cet espace. On désigne par $\mathcal{F}_t = \rho(\mathbf{B}_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien.

Définition 2.3.6.
On veut généraliser l'intégrale de Wiener[1] *et définir* $\int_0^t \theta_s d\mathbf{B}_s$ *pour des processus stochastiques* θ*.*

On peut prolonger la définition de l'intégrale de Wiener à une classe plus grande de processus. On perd le caractère gaussien de l'intégrale, ce qui est déjà le cas pour le cas de processus étagé. On définit les processus càglàd de carré intégrable (appartenant à $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$) comme l'ensemble Γ des processus θ adaptés continus à gauche limités à droite, $(\mathcal{F}_t)$-adaptés tels que

$$||\theta||^2 \stackrel{def}{=} \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \theta_t^2 d\mathbf{B}_s \right) < \infty.$$

Les processus étagés appartiennent à Γ. On dit que θ_n converge vers θ dans $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ si $||\theta - \theta_n||^2 \to 0$ quand $n \to \infty$. L'application $\theta \to ||\theta||$ définit une norme qui fait de Γ un espace complet. On peut définir $\int_0^\infty \theta_s d\mathbf{B}_s$ pour tous les processus θ de Γ : on approche θ par des processus étagés, soit $\theta = \lim_{n\to\infty} \theta_n$, où $\theta_n = \sum_{j=1}^{k(n)} \tilde{\theta}_j^n \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1}]}$, avec $\tilde{\theta}_j^n \in \mathcal{F}_{t_j}$, la limite étant au sens de $L^2(\Omega \times \mathbb{R})$. L'intégrale $\int_0^\infty \theta_s d\mathbf{B}_s$ est alors la limite dans $L^2(\Omega)$ des sommes $\sum_{j=1}^{k(n)} \tilde{\theta}_j^n \left(\mathbf{B}(t_{j+1}) - \mathbf{B}(t_j) \right)$ dont l'espérance est 0 et la variance $\mathbb{E}\left[\sum_j \tilde{\theta}_j^2 (t_{j+1} - t_j) \right]$.

On a alors $\mathbb{E}\left(\int_0^\infty \theta_s d\mathbf{B}_s \right) = 0$ et $\mathbb{E}\left(\int_0^\infty \theta_s d\mathbf{B}_s \right)^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \theta_s^2 d\mathbf{B}_s \right)$.
On note $\int_0^t \theta_s d\mathbf{B}_s \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \theta_s \mathbb{1}_{[0,t]}(s) d\mathbf{B}_s$. Si θ est étagé

$$\int_0^t \theta_s d\mathbf{B}_s = \sum_i \theta_i \left(\mathbf{B}_{t_{i+1} \bigwedge t} - \mathbf{B}_{t_i \bigwedge t} \right).$$

Plus généralement, si τ est un temps d'arrêt, le processus $\mathbb{1}_{[0,t]}(t)$ est adapté et on définit

$$\int_0^{\tau \bigwedge t} \theta_s d\mathbf{B}_s = \int_0^t \theta_s \mathbb{1}_{[0,\tau]}(s) d\mathbf{B}_s.$$

On note Λ l'ensemble $L^2_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ des processus θ adaptés càglàd vérifiant

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \theta_s^2(\omega) d\mathbf{B}_s \right) < \infty \qquad \forall t.$$

Proposition 2.3.3.
Soit τ *un temps d'arrêt et* θ *un processus* $\mathcal{F}^{\mathbf{B}}$*-adapté tel que*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\tau \theta_s^2 d\mathbf{B}_s \right) < \infty.$$

1. $I(f) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty f(s) d\mathbf{B}_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(s) d\mathbf{B}_s$ la limite étant prise dans $L^2(\Omega)$.

Alors $\mathbb{E}\left(\int_0^\tau \theta_s d\mathbf{B}_s\right) = 0$ *et* $\mathbb{E}\left(\int_0^\tau \theta_s d\mathbf{B}_s\right)^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^\tau \theta_s^2 d\mathbf{B}_s\right)$.

Application *: Si* $\theta = 0$ *et* $\tau = \inf\{t : \mathbf{B}_t + \nu t = a\}$. *Pour* $a\nu > 0$, *on a* $\mathbb{E}(\tau) < \infty$ *et par suite* $\mathbb{E}(\mathbf{B}_t) = 0 = a - \nu\mathbb{E}(\tau)$.

2.3.6 Processus d'Itô

Définition 2.3.7.

Un processus X *est un processus d'Itô si*

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \rho_s d\mathbf{B}_s$$

où b *est un processus adapté tel que* $\int_0^t |b_s| ds$ *existe (au sens Lebesgue) p.s. pour tout* t, *et* ρ *un processus appartenant à* A. *On utilise la notation plus concise suivante*

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \rho_t d\mathbf{B}_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Le coefficient b *est le drift ou la dérivé,* ρ *est le coefficient de diffusion. L'écriture* $dX_t = b_t dt + \rho_t d\mathbf{B}_t$ *est unique (sous réserve que les processus* b *et* ρ *vérifient les conditions d'intégrabilité). Ceci signifie que si*

$$dX_t = b_t dt + \rho_t d\mathbf{B}_t = \tilde{b}_t dt + \tilde{\rho}_t d\mathbf{B}_t \quad alors \quad b = \tilde{b}; \quad \rho = \tilde{\rho}.$$

En particulier, si X *est une martingale locale alors* $b = 0$ *et réciproquement.*
On peut définir un processus d'Itô pour des coefficients de diffusion tels que $\int_0^t \rho_s^2 ds < \infty$ *P.p.s. mais on perd la propriété de martingale de l'intégrale stochastique. La partie* $x + \int_0^t b_s ds$ *est la partie à variation finie. Si un processus* A *variation finie ets une martingale, il est constant. En effet, si* $A_0 = 0 = 0, A_t^2 = 2\int_0^t A_s dA_s$ *et par suite* $\mathbb{E}(A_t^2) = 0$.

Proposition 2.3.4.

Si σ *appartient à* Λ, *on a* $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0) + \int_0^t \mathbb{E}(b_s) ds$, *et*

$$\forall t \geq s, \ \mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_t) = X_0 + \int_0^s b_u du + \mathbb{E}\left(\int_s^t b_u du/\mathcal{F}_s\right) + \int_0^s \sigma_u d\mathbf{B}_u = X_s + \mathbb{E}\left(\int_s^t b_u du/\mathcal{F}_s\right).$$

Si $b \equiv 0$ *et* $\sigma \in$ *le processus* X *est une martingale continue. On verra que la réciproque est vraie : sous certaines conditions d'intégrabilité et de mesurabilité, toute martingale continue s'écrit* $x + \int_0^t \phi_s d\mathbf{B}_s$.

2.3.7 Processus multidimensionnels

Définition 2.3.8.

Un mouvement brownien standard à n *dimensions est une famille* $(\mathbf{B}^{(1)}, ..., \mathbf{B}^{(n)})$ *de* n *mouvements browniens standard par rapport à une même filtration* $(\mathcal{F}_t)$, *supposés de plus indépendants les uns des autres.*

— *Une martingale à* n *dimensions est une famille* $(M^{(1)}, ..., M^{(n)})$ *de* n *martingales par rapport à la même filtration* $(\mathcal{F}_t)$.

— *Un processus d'Itô à n dimensions est une famille* $(X^{(1)}, ..., X^{(n)})$ *de n processus d'Itô adaptés à la même filtration* $(\mathcal{F}_t)$.

Notation : On pose $\mathbf{B}_t = (\mathbf{B}_t^{(1)}, ..., \mathbf{B}_t^{(n)})$, $M_t = (M_t^{(1)}, ..., M_t^{(n)})$ et $X_t = (X_t^{(1)}, ..., X_t^{(n)})$.

Dans la suite de cette section nous évoquerons la formule d'Itô multidimensionnelle.

Soit $X = (X^{(1)}, ..., X^{(n)})$ un processus d'Itô à n dimensions et $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{X}_s) d < X^{(i)} >_s \right)^2 < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad i \in \{1, ..., n\},$$

alors

$$f(\underline{X}_t) - f(\underline{X}_0) = \sum_{i=0}^{n} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{X}_s) dX_s^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i,k}^{n} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(\underline{X}_s) d < X^{(i)}, X^{(k)} >_s.$$

2.3.8 Équations différentielles stochastiques (SDEs).

Définition 2.3.9.
Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \rho(s, X_s) d\mathbf{B}_s$$

ou sous forme condensée

$$(**) \begin{cases} dX_t = b(t, X_t) dt + \rho(t, X_t) d\mathbf{B}_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

L'inconnue est le processus X. *Le problème est, comme pour une équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients, l'équation différentielle a une unique solution. Il est utile de préciser les données.*

Définition 2.3.10.
Soit b *et* ρ *deux fonctions de* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ *à valeurs réelles données. On se donne également un espace* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *muni d'une filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *et un* $(\mathcal{F}_t)$ *mouvement brownien* $\mathbf{B}$ *sur cet espace. Une solution de (**) est un processus* X *continu* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté tel que les intégrales* $\int_0^t b(s, X_s) ds$ *et* $\int_0^t \rho(s, X_s) d\mathbf{B}_s$ *ont un sens et l'égalité*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \rho(s, X_s) d\mathbf{B}_s$$

est satisfaite pour tout $t, \mathbb{P}$ *p.s.*

Théorème 2.3.5. *(Théorème d'existence).*
On suppose que

i) les fonctions b *et* ρ *sont continues,*

ii) il existe K *tel que pour tout* $t \in [0, T], x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

a) $|b(t, x) - b(t, y)| + |\rho(t, x) - \rho(t, y)| \leq K|x - y|$

b) $|b(t,x)|^2 + |\rho(t,x)|^2 \leq K^2(1+|x|^2)$

iii) La condition initiale X_0 *est indépendante de* $(\mathbf{B}_t, t \geq 0)$ *et est de carré intégrable, alors il existe une unique solution de (**) à trajectoires continues pour* $t \leq T$*. De plus cette solution vérifie*

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2) < \infty.$$

2.4 Quelques notions de la théorie des semi-groupes

On va rappeler quelques notions et théorèmes de la théorie de semi-groupes, nécessaires pour le développement de notre thème.

2.4.1 Semi-groupe fortement continu

Définition 2.4.1. *(Semi-groupe)[3].*

Soit X *un espace de Banach, une famille* $T(t), 0 \leq t < \infty$ *d'opérateurs linéaires bornés de* X *dans* X *est dite un semi-groupe sur* X *si :*

i) $T(0) = I$ *(I est l'identité dans* X*),*

ii) $T(s+t) = T(s)T(t)$ *pour tout* $t, s \geq 0$.

Définition 2.4.2. *(C_0 semi-groupe)[3].*

Un semi-groupe $T(t), 0 \leq t < \infty$ *d'opérateurs linéaires bornés est un semi-groupe fortement continu si :*

$$\lim_{t\to 0} T(t)x = x \qquad \text{pour tout} \quad x \in X$$

Un semi groupe d'opérateurs linéaires bornés fortement continu est dit un C_0 *semi-groupe.*

Théorème 2.4.1. *Soit* $T(t)$ *un* C_0 *semi-groupe, alors ils existent un réel* w *et un réel* $M \geq 1$ *tels que :*

$$||T(t)|| \leq Me^{wt} \qquad \text{pour tout} \qquad t \geq 0$$

En particulier, si $M = 1$ *et* $w = 0$ *alors* $(T(t))_t$ *est appelé* C_0 *semi-groupe de contractions.*

2.4.2 Générateur infinitésimal

Définition 2.4.3. *[3]*

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ *un semi-groupe sur* X*, l'opérateur linéaire* A *défini par :*

$$D(A) = \left\{ x \in X, \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe } \right\}$$

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}$$

est le générateur infinitésimal du semi-groupe $T(t)$*,* $D(A)$ *est le domaine de* A*.*

Théorème 2.4.2. *[3]*

Soit $T(t)$ un C_0 semi groupe et soit A son générateur infinitésimal alors on a les propriétés suivantes :

(i) pour tout $x \in X$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$

(ii) pour tout $x \in X$ et $t \geq 0$ $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ et

$$A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x.$$

(iii) si $x \in D(A)$ alors $T(t)x \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$, et

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

(iv)) pour $x \in D(A)$ et $t > s \geq 0$

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(\tau)xd\tau.$$

Théorème 2.4.3. *(Théorème de la perturbation bornée)[3].*

Soit X un espace de Banach et soit A un opérateur non borné $A : D(A) \subset X \to X$, le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t\geq 0}$ tel que :

$$||T(t)|| \leq Me^{wt} \qquad \text{pour tout } \ t \geq 0$$

et pour $w \in \mathbb{R}, M \geq 1$.

Si $B \in \mathcal{L}(X)$ alors $C := A+B$ avec $D(C) := D(A)$ génère un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t\geq 0}$ tel que

$$||S(t)|| \leq Me^{(w+M||B||)t} \qquad \text{pour tout } \ t \geq 0.$$

On dit que B est une perturbation bornée de A.

Théorème 2.4.4. *[3].*

Soit Xun espace de Banach et soit A un opérateur non borné $A : D(A) \subset X \to X$, le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t\geq 0}$ tel que :

$$||S(t)|| \leq Me^{wt} \qquad \text{pour tout } \ t \geq 0$$

pour $w \in \mathbb{R}, M \geq 1$.

Soit $\tilde{A}$ la restriction de A à $D(A^2)$ et soit $\tilde{X}$ l'espace de Banach $(D(A), |.|_{D(A)})$ avec

$$|x|_{D(A)} = |x|_X + |Ax|_X \qquad \text{pour tout } \ x \in \tilde{X}.$$

Alors $\tilde{A} : D(A^2) \subset \tilde{X} \to X$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi groupe $(\tilde{S}(t))_{t\geq 0}$ sur $\tilde{X}$ avec

$$||\tilde{S}(t)|| \leq Me^{wt} \qquad \text{pour tout } \ t \geq 0.$$

Conclusion

Ce chapitre a permis de mettre en lumière les concepts fondamentaux liés au thème étudié. Dans le chapitre suivant nous abordérons la notion de solution de viscosité pour l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB).

Chapitre 3

Solution de viscosité pour l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et d'unicité de solution viscosité pour l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) par rapport aux limites relachées et aux données initiales limites à l'équation (3.1).

3.1 Préliminaires

Comme dit dans l'introduction, considérons l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman définie par :

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi = sup_{\xi \in \varepsilon} \{b(\xi).D\varphi + tr(a(\xi)D^2\varphi)\} \qquad & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x) \qquad & x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{3.1}$$

Où "D", "D^2" et "div" désignent respectivement le gradient, le hessien et la divergence en x, et "tr" est la trace.

Sous l'hypothèse $(H1)$ définie par :

$$\begin{cases} \varepsilon \text{ est un ensemble non vide,} \\ b : \varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^d \text{ une fonction bornée,} \\ a = \sigma^a(\sigma^a)^T \text{ pour une certaines } \sigma^a : \varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times K}, \end{cases}$$

où K est le rang maximal de $A(u)$ et $a(\xi)$.

Notions que dans tout $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, les boules et les cubes de $\mathbb{R}^d$ de centre x et de rayon $r > 0$ sont $B_r(x) := \{y : \ |y - x| < r\}$ et $Q_r(x) =: x + [-r, r]^d$, le symbole "co désigne la coque convexe des ensembles, " (ess) Im " désigne l'image (essentielle) des fonctions (mesurables), " sp " le spectre des matrices, et $\mathbb{1}_U$ la fonction indicatrice d'un ensemble U. Dans la suite de cet présent mémoire nous suivons la notations standard pour les espaces de fonctions , par exemple C_c désigne les fonctions continues à support compact comme vue dans le chapitre 2. Nous notérons que $BLSC$ (resp $BUSC$) désigne les fonctions semi-continues inférieures(supérieures) bornées, L^p désigne les espaces de Lebesgue.

Pour régulariser les fonctions de X (espaces normés), nous utilisons la convolution avec une unité approximative ρ_ν de la forme :

$$\rho_\nu(x) = \frac{1}{\nu^d}\rho(\frac{x}{\nu}), \tag{3.2}$$

où $0 \leq \rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\int \rho = 1$, tandis que pour les fonctions de t, nous convolons avec :

$$\theta_\nu(x) = \frac{1}{\nu^d}\theta(\frac{t}{\nu}), \tag{3.3}$$

où $0 \leq \theta \in C_c^\infty([-\infty, 0])$ et $\int \theta = 1$. Si nécessaire, nous étendons les fonctions de $t \in \mathbb{R}^+$ par zéro à tout $t \in \mathbb{R}$ pour donner un sens à la convolution. Pour les valeurs localement bornées définies par : $\varphi_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ où $\varphi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, nous définissions la infconvolution de φ_0 comme suit : $\forall y$ par

$$(\varphi_0)_\varepsilon(x) := \inf_{y\in\mathbb{R}^d}\left\{\varphi_0(y) + \frac{|x-y|^2}{2\varepsilon^2}\right\}. \tag{3.4}$$

Ici, l'inf est ponctuel et, pour éviter toute confusion, nous utilisons une notation distincte pour ess inf, etc... L'enveloppe semi-continue supérieur φ^* (inférieur φ_*) de φ est définie comme suit :

$$\varphi^*(x,t) := \lim_{(y,s)\to(x,t)} \varphi(y,s) \qquad \left(\varphi_*(x,t) := \lim_{(y,s)\to(x,t)} \varphi(y,s)\right).$$

Pour une famille $(\varphi_\varepsilon := \varphi_\varepsilon(x,t))_{\varepsilon>0}$; les limites supérieures et inférieures détendues comme $\varepsilon \to 0^+$ sont :

$$\overset{*}{\limsup}\, \varphi_\varepsilon(x,t) := \limsup_{\substack{(y,s)\to(x,t)\\ \varepsilon\to 0^+}} \varphi_\varepsilon(y,s). \tag{3.5}$$

$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ et $\liminf_*\, \varphi_\varepsilon := -\limsup^*(-\varphi_\varepsilon)$.

Comme il est d'usage, nous utilisons la même notation $\limsup^*$ et $\liminf_*$ également lorsque les limites sont prises dans une autre variable que $\varepsilon \to^+$, Nous écrivons $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \uparrow \varphi_\varepsilon$ pour la limite si $\varphi_\varepsilon(x,t) \nearrow \sup_{\varepsilon>0} \varphi_\varepsilon(x,t)$ comme $\varepsilon \searrow 0$. Nous utilisons une notation similaire pour $\varphi_0 = \varphi_0(x)$ comme par exemple $(\varphi_0)^*(x) := \limsup_{y\to x} \varphi_0(y)$.

Dans le cas du second ordre , nous avons besoin d'un cadre probabiliste. Par souci de simplicité, nous fixons pour le reste de cet document

$$\begin{cases} \text{Un espace de probabilité filtré complet}(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}), \text{ et} \\ \text{un brownien } \mathcal{B}_t \text{ standard de dimension } d \text{ sur cette filtration.} \end{cases}$$

Nous supposerons sans le mentionner que tous les processus stochastiques présentés dans ce document sont définis sur cet espace de probabilité filtré, et que chaque fois que nous avons besoin d'un mouvement brownien, nous prenons le mouvement brownien ci-dessus. Notons l'espérance par $\mathbb{E}$.

3.2 Solution de viscosité

Dans la suite de cette section notons que $\varphi^*(\text{resp.}\varphi_*)$ désigne l'envelope semi-continue suppérieur (resp. inférieur) de φ.

Définition 3.2.1. *(Solution de viscosité)[28]*
Supposons (H1) et $\varphi_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ *est bornée.*

a) Une fonction $\varphi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *localement bornée est une sous-solution(resp. Sur-solution) de viscosité de (3.1) si*

i) pour tout $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ *et* $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0, +\infty[$ *maximum local de* $\varphi^* - \phi$ *(resp. minimum),*

$$\partial_t \phi(x,t) \leq sup_\varepsilon \{b.D\phi + tr(aD^2\phi)\}(x,t) \qquad (resp. \geq),$$

ii) et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$\varphi^*(x,t) \leq (\varphi_0)^*(x)$ *(resp.* $\varphi_*(x,t) \geq (\varphi_0)_*(x)$*),*

b) Une fonction φ *est une solution de viscosité si elle est à la fois sous et Sur-solution.*

Remarque 3.2.1. [28]
Nous voyons que φ est une sous-solution (resp. Sur-solution) de viscosité de (3.1) si (i)) est vérifié.

Nous rappelons la comparaison bien connue et le fait que le problème est bien posé pour (3.1) dans la section suivante.

3.3 Existence et unicité de solution

Théorème 3.3.1. *(Principe de comparaison) [28].*
Supposons (H1). Si φ *et* ψ *sont des sous et Sur-solutions de (3.1), et*

$$\varphi^*(x,0) \leq \psi_*(x,0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Alors $\varphi^* \leq \psi_*$ *sur* $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$.

Théorème 3.3.2. *(Existence et unicité).*
Supposons que $(H1)$ *et* $\varphi_0 \in C_b(\mathbb{R}^d)$. *Alors il existe une unique solution de viscosité* $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ *de (3.1).*

Remarque 3.3.3. [28].
Par le principe de comparaison, $\inf \varphi_0 \leq \varphi \leq \sup \varphi_0$ et nous avons la propriété de contaction suivante : $||\varphi - \psi||_\infty \leq ||\varphi_0 - \psi_0||_\infty$ pour toute paire de solutions φ et ψ avec des données initiales φ_0 et ψ_0.

3.4 Solution minimale

Proposition 3.4.1. *(Stabilité par rapport à sup)[28].*
Supposons que (H1) et $\mathcal{F} \neq \emptyset$, *une famille de sous-solutions de viscosité uniformément délimitées localement de (3.1). Ensuite, la fonction*

$$(x,t) \longmapsto \sup\{\varphi(x,t) : \varphi \in \mathcal{F}\}$$

est une sous-solution de viscosité de (3.1).

Les résultats suivants concernent des limites relaxés. Considérez la limite supérieure

$$\limsup{}^{*}\varphi_\varepsilon(x,t) := \limsup_{\substack{(y,s)\longrightarrow(x,t)\\ \varepsilon\longrightarrow 0^+}} \varphi_\varepsilon(y,s) \qquad \forall (x,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+,$$

ainsi que la limite inférieure $\liminf_*\varphi_\varepsilon := -\limsup^*(-\varphi_\varepsilon)$. Alors :

Proposition 3.4.2. *(stabilité par rapport aux limites rélâchées). [28]*
Supposons (H1) et soit $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille de sous-solutions (resp. sur-solutions) de viscosité uniformément limitées localement de (3.1). Alors $\limsup^*\varphi_\varepsilon$ (resp. $\liminf_*\varphi_\varepsilon$) est un sous-solution de (3.1) (resp. sur-solution).

Remarque 3.4.3. [28]
La notion de solution (ou semi-solution) est donc stable sous convergence uniforme locale (équivalente à $\limsup^*\varphi_\varepsilon = \liminf_*\varphi_\varepsilon$).

Proposition 3.4.4. *(Données initiales limites).[28]*
Supposons (H1) et soit $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille de sous-solutions (resp sur-solutions) de viscosité uniformément limitées localement de (3.1) . Alors $\limsup^*\varphi_\varepsilon$ (resp. $\liminf_*\varphi_\varepsilon$) satisfait :

$$\Big\{\limsup{}^*\varphi_\varepsilon\Big\}(x,0) = \Big\{\limsup{}^*\varphi_\varepsilon(.,0)\Big\}(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}^d$$

(resp. $\Big\{\liminf_*\varphi_\varepsilon\Big\}(x,0) = \Big\{\liminf_*(\varphi_\varepsilon)_*(.,0)\Big\}(x)$).

Remarque 3.4.5. [28]
Pour les sous-solutions, cela signifie que

$$\limsup_{\substack{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+\ni(y,s)\longrightarrow(x,0)\\ \varepsilon\longrightarrow 0^+}} \varphi_\varepsilon(y,s) = \limsup_{\substack{\mathbb{R}^d\ni y\longrightarrow x\\ \varepsilon\longrightarrow 0^+}} (\varphi_\varepsilon)^*(y,0),$$

où φ_ε^* est l'enveloppe semi-continue supérieur calculée en (x,t).

Théorème 3.4.6. *(Solution minimale).*
Suppposons $(H1)$ et $\varphi_0:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction bornée, alors il existe une solution de viscosité minimale $\underline{\varphi}\in BLSC(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+)$ de (3.1), dans le sens que $\underline{\varphi}\le\varphi$, pour tout solution de viscosité bornée φ de (3.1).
De plus $\underline{\varphi}(x,0) = (\varphi_0)_*(x), \qquad \forall x\in\mathbb{R}^d.$
Notons que $\underline{\varphi}$ est l'unique par définition.

Nous allons commencer par énoncer et prouver un lemme qui nous sera utile dans la preuve du théorème :

Lemme 3.4.7. *Soit $\varphi_\varepsilon:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'il existe $\varphi_\varepsilon\in C^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ telle que $\varphi-\phi$ admet un maximum local strict en φ. Si $(\varphi_{\varepsilon_n})_n\in\mathbb{N}$ est une suite de fonctions convergent uniformément vers φ, alors il existe une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :*

$$\begin{cases}(x_n,t_n)\xrightarrow{n\longrightarrow+\infty}(x,t)\\ \varphi_{\varepsilon_n}(x_n,t_n)\xrightarrow{n\longrightarrow+\infty}\varphi(x,t)\\ \varphi_{\varepsilon_n}-\phi \text{ admet un maximum local en } (x_n,t_n), \text{pour tout à partir d'un certain rang.}\end{cases}$$

Démonstration. (du Théorème 3.4.6).

Pour la preuve de du Théorème nous allons considèrée une infconvolution $(\varphi_0)_\varepsilon$, définie par :

$$(\varphi_0)_\varepsilon := \inf_{y\in\mathbb{R}^d}\left\{\varphi_0(y) + \frac{|x-y|}{2\varepsilon}\right\} \tag{3.6}$$

qui est au moins C_b c'est-à-dire qu'il est au moins une solution continuement bornée avec

$$\inf\varphi_0 \leq (\varphi_0)_* \leq \sup\varphi_0$$

et

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow\downarrow 0}\uparrow(\varphi_0)_\varepsilon = \sup_{\varepsilon>0}(\varphi_0)_\varepsilon = (\varphi_0)_*.$$

Soit φ_ε une solution de viscosité de (3.1) avec pour donnée initiale $(\varphi_0)_\varepsilon$, le Théorème précédent assure le bien posé de cela. Par le principe de maximum vue dans la remarque précédente on a :

$$\inf\varphi_0 \leq \varphi_\varepsilon \leq \sup\varphi_0.$$

Nous pouvons définir une fonction réelle et bornée

$$\underline{\varphi} := \sup_{\varepsilon>0}\varphi_\varepsilon.$$

Nous voyons que cela correspond a nôtre solution minimale cherché.

Montrons que $\underline{\varphi}$ est une solution de (3.1).
L'étape clé de cette démonstration est de prouver que :

$$\underline{\varphi} = \sup_{\varepsilon>0}\varphi_\varepsilon = \liminf{}_*\varphi_\varepsilon. \tag{3.7}$$

où la limite relaxé est pris comme $\varepsilon \longrightarrow 0^+$. Cela s'ensuit par des arguments élémentaires (voir par exemple [12, 24]) puisque φ^ε est au moins semi-continu inférieur et ne décroît pas lorsque $\varepsilon\downarrow 0$, ce qui s'ensuit par comparaison puisque$(\varphi_0)^\varepsilon$ ne décroît pas lorsque $\varepsilon\downarrow 0$. Donnons des détails pour le lecteur commodité.
Pour tout (x,t) fixé.

$$\liminf{}_*\varphi_\varepsilon(x,t) \leq \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0^+}\varphi_\varepsilon(x,t) = \underline{\varphi}(x,t).$$

De plus, pour toute suite $(x_n,t_n,\varepsilon_n) \longrightarrow (x,t,0^+)$ telle que $\varepsilon_n \leq \varepsilon_m$ pour tout $n\geq m$, on a $\varphi_{\varepsilon_n}(x_n,t_n) \geq \varphi_{\varepsilon_m}(x_n,t_n)$. Fixant m et prenant la limite en n,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\inf\varphi_{\varepsilon_n}(x_n,t_n) \geq \lim_{n\longrightarrow\infty}\varphi_{\varepsilon_m}(x_n,t_n) \geq \varphi_{\varepsilon_m}(x,t)$$

par semi-continuité inférieure de φ_{ε_m} . En prenant la limite en m,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\inf\varphi_{\varepsilon_n}(x_n,t_n) \geq \lim_{m\longrightarrow\infty}\varphi_{\varepsilon_m}(x_n,t_n) = \underline{\varphi}(x,t).$$

D'ou $\underline{\varphi}$ est une solution minimale de (3.1) et (4.1).

La stabilité par rapport au sup de la Proposition 3.4.1 nous rassure que, φ est une sous-solution de (3.1).

La stabilité par la limite relachée (Proposition 3.4.2) nous rassure que $\underline{\varphi}$ est une sur-solution de (3.1) et la Proposition 3.4.4 nous permet de déduire les conditions initiales suivantes :

$$(\underline{\varphi})^*(x,t=0) \leq \Big\{ \limsup{}^*\varphi_\varepsilon \Big\}(x,0) = \Big\{ \limsup{}^*\varphi_\varepsilon(.,0) \Big\}(x) \leq (\underline{\varphi_0})^*(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cela nous fourni la première inégalité de la condition initiale. Pour l'autre inégalité, on utilise le fait que $\underline{\varphi}$ est semi-continue inférieure, en tant que sup de fonctions continues, avec

$$\underline{\varphi}(x,t=0) = \sup_{\varepsilon>0} \varphi_\varepsilon(x,0) = (\varphi_0)_*(x).$$

Ceci prouve que $\underline{\varphi}$ est une solution de (3.1).

Montrons que $\underline{\varphi}$ est minimale.
Soit φ une autre solution discontinue bornée. Notons que :

$$(\varphi_0)_\varepsilon \leq (\varphi_0)_* \leq \varphi_*(t=0).$$

Par le principe de comparaison on déduit que $\varphi_\varepsilon \leq \varphi, \qquad \forall \varepsilon > 0$,
donc

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \inf{}_*\varphi_\varepsilon = \underline{\varphi} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\varphi} \leq \varphi \qquad \text{lorsque} \qquad \varepsilon \longrightarrow 0^+$$

d'où $\underline{\varphi}$ est minimale.

De ce qui précède nous pouvons conclure que $\underline{\varphi}$ est une solution minimale de viscosité de (3.1).

□

Proposition 3.4.8. *[28]*
Supposons (H1) et $\varphi_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors toute sur-solutions bornées de φ de (3.1) est telle que $\underline{\varphi} \leq (\varphi)_*$.

Démonstration.

Supposons que φ est une sur-solution bornée de (3.1). Alors d'après la Proposition précédante On a :

$$(\varphi_0)_\varepsilon \leq (\varphi_0)_* \leq \varphi_*(t=0).$$

et par le principe de comparaison on a : $\varphi_\varepsilon \leq \varphi_*$ or $\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \inf{}_*\varphi_\varepsilon = \underline{\varphi}$ d'après (3.7). De plus on a : $\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \inf{}_*\varphi_\varepsilon \leq \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \inf{}_*(\varphi)_* = \varphi_*$

d'où $\qquad \underline{\varphi} \leq \varphi_*.$

□

Proposition 3.4.9. *(Stabilité de la solution minimale) [28]*
Supposons (H1) et $(\varphi_0^n)_n$ une suite non décroissante uniformement bornée. Si $\underline{\varphi_n}$ est la solution minimale de (3.1) avec φ_0^n comme données initiales, alors $\sup_n \underline{\varphi}_n$ est la solution minimale de (3.1) avec données initiales $\sup_n(\varphi_0^n)_*$.

Démonstration.

Soit $\underline{\varphi}$ la solution minimale de (3.1) avec les données intiales : $\varphi_0 := \sup_n(\varphi_0^n)_*$.

Montrons que $\underline{\varphi} = \sup_n \underline{\varphi_n}$, où $\underline{\varphi}$ est la solution minimale de (3.1) avec les données initiales φ_0^n. Grâce au principe de comparaison, nous avons $\underline{\varphi_n} \leq \underline{\varphi} \qquad \forall n$ entier.
Par conséquent d'après (3.7), en prenant $\varepsilon = n$, nous obtenons $\underline{\varphi} \geq \underline{\varphi_n} = \sup_n \underline{\varphi_n} \qquad$ (i).

Il reste à montrer l'autre inégalité.
En effet par la Proposition 3.4.8 $\underline{\varphi} \leq (\varphi)_*$.

Par le principe de comparaison on a : $\varphi_\varepsilon \leq \varphi_* \Longrightarrow \lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \inf_* \varphi_\varepsilon \leq \lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \inf_*(\varphi)_* = \varphi_*$.
De plus d'après (3.7) $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \inf_* \varphi_\varepsilon = \sup\limits_n \underline{\varphi}_n \leq \lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \inf_*(\varphi)_* = \varphi_*$ d'où $\underline{\varphi} \leq \sup\limits_n \underline{\varphi}_n$ (ii).

Pour la suite nous allons utiliser la monoticité de $\underline{\varphi}_n$.
Rappelons que $n \longmapsto \varphi_0^n(x)$ est non décroissante $\forall x$, par le principe de comparaison, la même monotonicité est valable pour les solutions minimales, ce qui signifie que $n \longmapsto \underline{\varphi}_n(x,t)$ est non décroissante pour tout x et t fixé. Puisque $\underline{\varphi}_n$ est semi-continue inférieure, on peut argumenter comme pour (3.7) et on a :

$$\sup_n \underline{\varphi}_n = \liminf_* \underline{\varphi}_n.$$

Par stabilité (voir Proposition 3.4.2 et 3.4.4), nous déduisons que $\liminf\limits_* \underline{\varphi}_n$ est une sur-solution de (3.1) avec les données initiales

$$\liminf_* \underline{\varphi}_n(t=0) = \liminf_*(\varphi_0^n)_*.$$

Cependant ses données initiales sont précisement :

$$\liminf_*(\varphi_0^n)_* = \sup_n(\varphi_0^n)_* = \varphi_0,$$

Par suite d'après (ii) $\sup\limits_n \underline{\varphi}_n = \liminf\limits_* \underline{\varphi}_n \geq \underline{\varphi}$

De tout ce qui précède nous pouvons conclure que $\underline{\varphi}$ est une solution de viscosité avec les données initiales :

$$\liminf_*(\varphi_0^n)_* = \sup_n(\varphi_0^n)_* = \varphi_0 \Longrightarrow \liminf_* \underline{\varphi}_n(t=0) = \sup_n \underline{\varphi}^n(x,t=0) = \underline{\varphi}_0 = \sup_n(\varphi_0^n)_*.$$

□

Proposition 3.4.10. *(Premier Ordre). [28]*
Supposons (H1), $a \equiv 0$ et $\varphi_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. La solution de viscosité minimale de (3.1) est donnée par :

$$\underline{\varphi}(x,t) = \sup_{x+ct}(\varphi_0)_* \qquad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$$

où $c = \overline{co\{Im(b)\}}$.

Démonstration.
Par hypothèse que $a \equiv 0$, (3.1) est maintenant

$$\partial_t \varphi = \sup_{\xi \in \varepsilon} \{b.D\varphi\} = \sup_{q \in C}\{q.D\varphi\},$$

où $c = \overline{co\{Im(b)\}}$ est compact. Par la théorie de contrôle [46], la solution de viscosité de (3.1) est donnée par :

$$\varphi(x,t) = \sup_{x+ct} \varphi_0.$$

Si φ_0 est bornée et uniformément continue. Dans le cas générale, considérons la infconvolution (3.6). Rappelons que $(\varphi_0)_\varepsilon$ est au moins bornée et uniformément continue ,et $(\varphi_0)_\varepsilon \uparrow (\varphi_0)_*$ est pointuel comme $\varepsilon \downarrow 0$. Il s'ensuit que la solution de (3.1) avec $(\varphi_0)_\varepsilon$ comme données initiales est :

$$\varphi_\varepsilon(x,t) = \sup_{x+ct} (\varphi_0)_\varepsilon$$

par la Proposition 3.4.9, la solution minimale de (3.1) est donc :

$$\underline{\varphi}(x,t) = \sup_{\varepsilon>0} \varphi_\varepsilon(x,t) = \sup_{\varepsilon>0} \sup_{x+ct} (\varphi_0)_\varepsilon = \sup_{x+ct} \sup_{\varepsilon>0} (\varphi_0)_\varepsilon = \sup_{x+ct} (\varphi_0)_*.$$

□

Proposition 3.4.11. *(Second ordre). [28]*
Supposons que (H1), $\varphi_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée.

$$\text{L'ensemble } \varepsilon \text{ est compact et les fonctions } b(.) \text{ et } \sigma^a(.) \text{ sont continues.} \tag{3.8}$$

La solution de viscosité minimale de (3.1) est alors données par :

$$\underline{\varphi}(x,t) = \sup_{\xi} \mathbb{E}\{(\varphi_0)_*(X_t^x)\},$$

où ζ_s est un contrôle progressivement mesurable de valeur ε et X_t^x un processus Ito satisfaisant l'Equation Différentielle Stochastique (en anglais : Stochastic Differential Equation (SDE))

$$\begin{cases} dX_t^x = b(\xi_s)ds + \sqrt{2}\ \sigma^a(\xi_s)dB_s, \quad s > 0, \\ X_{s=0}^x = x. \end{cases}$$

Démonstration.
L'équation (3.1) est donnée par :

$$\partial_t \varphi = \sup_{\xi \in \varepsilon} \{b(\xi).D\varphi + tr(\sigma^a(\xi)(\sigma^a)^T(\xi)D^2\varphi)\},$$

où ε est compact et les coefficients a et σ^a sont continus par (3.8). Par la théories de contrôle [45] la solution de viscosité de (3.1) est donnée par

$$\varphi(x,t) = \sup_{\xi} \mathbb{E}\{\varphi_0(X_t^x)\},$$

si φ_0 est bornée et uniformement continue, où ξ_s et X_s^x sont définies comme dans la Proposition 3.4.11. Répétons maintenant l'argument de la preuve de la Proposition 3.4.10 en considérant infconvolution $(\varphi_0)_\varepsilon$ et la solution correspondante de (3.1).

$$\varphi_\varepsilon(x,t) = \sup_{\xi} \mathbb{E}\{(\varphi_0)_\varepsilon(X_t^x)\}.$$

Nous constactons que la solution minimale de (3.1) est

$$\underline{\varphi}(x,t) = \sup_{\varepsilon>0} \varphi_\varepsilon(x,t) = \sup_{\xi} \sup_{\varepsilon>0} \mathbb{E}\{(\varphi_0)_*(X_t^x)\},$$

Puisque $(\varphi_0)_\varepsilon \uparrow (\varphi_0)_*$ comme $\varepsilon \downarrow 0$, nous concluons la preuve en utilisant le Théorème de convergence monotone :

$$\sup_{\varepsilon>0} \mathbb{E}\{(\varphi_0)_*(X_t^x)\} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \uparrow \mathbb{E}\{(\varphi_0)_*(X_t^x)\} = \mathbb{E}\left\{\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \uparrow (\varphi_0)_*(X_t^x)\right\} = \mathbb{E}\{(\varphi_0)_*(X_t^x)\}.$$

□

Conclusion

Après avoir exploré ce chapitre, nous aborderons à présent la notion de solution entropique pour les problèmes de convection diffusion.

Chapitre 4

Solution entropique pour les problèmes de convection diffusion

Introduction

Ce chapitre explore les solutions entropiques pour les problèmes de convection diffusion parabolique dégénérée anisotrope. Apès avoir exploré quelques notions préliminaires et la notions de solution entropique, nous évoquerons l'existence et unicité de ces types de solutions.

4.1 Préliminaires

Considérons l'équation de convection-diffusion parabolique dégénérée anisotrope :

$$\begin{aligned} \partial_t u + divF(u) = div(A(u)Du) \qquad & x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad & x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{4.1}$$

sous l'hypothèse :
(H2) : $F \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ et $A = \sigma^A(\sigma^A)^T$ pour $\sigma^A \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{d\times K})$.

L'espace L^∞_{int}, est appelé espace des fonctions localement bornées. L'espace L^∞_{int} utilisé pour traiter des problèmes qui ont une nature locale, c'est-à-dire lorsque les propriétés d'une fonction sont analysées sur des sous-ensembles à mesure finie. Nous pouvons notée l'espace L^∞_{int} est le dual de l'espace L^1_{loc}, c'est-à-dire que les fonctionnels linéaires continus sur L^1_{loc} peuvent être représentés par des éléments de L^∞_{int}. Cette dualité est importante dans la résolution de problèmes de minimisation en théorie des distributions et dans les espaces de Sobolev.

Définition 4.1.1.

Soit $L^\infty_{int}(\mathbb{R}^d) := \{\varphi_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \quad telque \quad ||\varphi_0||_{L^\infty_{int}} < \infty\}$

où $||\varphi_0||_{L^\infty_{int}} := \int ess\sup_{\bar{Q}_1(x)} |\varphi_0| dx$ *et* $\bar{Q}_r(x) := x + [-r, r]^d$ *pour* $r > 0$.

Théorème 4.1.1.
L'espace L^∞_{int} *est espace de Banach, continuellement plongé dans* $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Lemme 4.1.2.

Pour tout $r > 0$ et $\varepsilon \geq 0$, il existe une constante $C_{r,\varepsilon} \geq 0$ telle que

$$\int \sup_{\bar{Q}_{r+\varepsilon}(x)} |\varphi_0| dx \leq C_{r,\varepsilon} \int \sup_{\overline{Q}_r(x)} |\varphi_0| dx \qquad \forall \varphi_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Nous commençons par définir un triplé de flux entropique-entropique.

Définition 4.1.2. *(flux entropique- triplé entropique) [27].*
Pour toute fonction C convexe $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, les flux entropiques correspondants

$$q = (q_1, ..., q_d) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d \quad et\ r = (r_{ij}) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{d \times K}$$

sont définis par :

$$q'(u) = \eta'(u) f'(u), \quad r'(u) = \eta'(u) a(u).$$

Nous appellerons (η, q, r) un triplé de flux entropique-entropique si $\zeta \in C^2(\mathbb{R})$ est convexe, $q' = \zeta' F'$ et $r' = \zeta' A$.
Pour $1 \leq k \leq K$ et $1 \leq i \leq d$, on a :

$$\zeta_{ik}(u) = \int_0^u \sigma_{ik}^A(\xi) d\xi \quad avec \quad \zeta_k(u) = (\zeta_{1k}(u), ..., \zeta_{dk}(u)),$$

et pour tout $\beta \in C(\mathbb{R})$

$$\zeta_{ik}^\beta(u) = \int_0^u \sigma_{ik}^A(\xi) \beta(\xi) d\xi, \qquad \zeta_k^\beta(u) = (\zeta_{1k}^\beta(u), ..., \zeta_{dk}^\beta(u)),$$

Introduisons l'ensemble de champs vectoriels suivant :

$$L^2(0,T; L^2(div : \mathbb{R})) = \left\{ w = (w_1, ..., w_d) \in \left(L^2((0;T) \times \mathbb{R}^d) \right)^d . : divw \in L^2((0,T) \times \mathbb{R}^d) \right\}.$$

4.2 Notions de solution entropique

Nous définissons une solution entropique comme suit :

Définition 4.2.1. *(Solution entropique) [28]*
Supposons (H2) et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+; L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$ est une solution entropique de (4.1) si

(a) $\sum_{i=1}^d \partial_{x_i} \zeta_{ik}(u) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ pour tout $k = 1, ..., K$,

(b) Pour tout $k = 1, ..., K$ et pour tout $\beta \in C(\mathbb{R})$

$$\sum_{i=1}^d \partial_{x_i} \zeta_{ik}^\beta(u) = \beta(u) \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} \zeta_{ik}(u) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+),$$

(c) et pour tous les triplés de flux entropique $(\eta, q, r) et 0 \leq \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$,

$$\int \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \left(\eta(u) \partial_t \phi + \sum_{i=1}^d q_i(u) \partial_{x_i} \phi + \sum_{i,j=1}^d r_{ij}(u) \partial^2_{x_i x_j} \phi \right) dxdt +$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \eta(u_0(x)) \phi(x,0) dx \geq \int \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \eta''(u) \sum_{k=1}^K \left(\sum_{i=1}^d \partial_{x_i} \zeta_{ik}(u) \right)^2 \phi dxdt.$$

4.3 Existence et unicité de solution entropique

Théorème 4.3.1. *[28] (Existence et unicité)*
Supposons (H2) et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe une unique solution entropique $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+; L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$ de (4.1).

Pour la preuve de ce théorème nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 4.3.2. *(Estimation de l'énergie locale)*
Supposons que (H2), $u_0 \in L^\infty$, $0 \leq \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, et $T \geq 0$. Si u est une solution entropique de (4.1) au sens de la définition (4.2.1) et

$$||u_0||_{L^\infty} + ||u||_{L^\infty} + ||\phi||_{W^{2,1}} \leq M,$$

alors il existe une constante C dépendant uniquement de T, M, F et A telle que

$$\int\int_{\mathbb{R}^d \times [0,T]} \sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} \varsigma_{ik}(u(x,t)) \right)^2 \phi(x) dx dt \leq C.$$

Démonstration.
Pour la preuve nous utilisons la définition (4.2.1)(c) avec l'entropique $\eta(u) = |u|^2$ et les flux correspondants

$$q(u) = 2\int_0^u \xi F'(\xi) d\xi \quad \text{et} \quad r(u) = 2\int_0^u \xi A(\xi) d\xi.$$

Nous prenons également une fonction test $\phi(x)\mathbb{1}_{[0,T]}(t)$ où $0 \leq \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Elle n'est pas lisse dans le temps mais un argument d'approximation standard montre qu'elle peut être utilisée dans la définition (4.2.1)(c) si nous ajoutons également un terme de valeur finale à $t = T$. Ici, nous avons besoin du terrme L^1_{loc} la continuité dans le temps des solutions entropiques.

De la définition(4.2.1)(c) on a :

$$\int\int_{\mathbb{R}^d \times [0,T]} \left(\eta(u)\partial_t \phi + \sum_{i=1}^{d} q_i(u)\partial_{x_i}\phi + \sum_{i,j=1}^{d} r_{ij}(u)\partial^2_{x_i x_j}\phi \right) dxdt +$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \eta(u_0(x))\phi(x,0)dx \geq \int\int_{\mathbb{R}^d \times [0,T]} \eta''(u) \sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\zeta_{ik}(u) \right)^2 \phi dxdt.$$

Et comme $\eta(u) = |u|^2$ alors $\eta'(u) = 2|u| \Longrightarrow \eta''(u) = 2$. Par suite on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x,T)|^2 \phi(x)dx + \int\int_{\mathbb{R}^d \times [0,T]} \left(\sum_{i=1}^{d} q_i(u)\partial_{x_i}\phi + \sum_{i,j=1}^{d} r_{ij}(u)\partial^2_{x_i x_j}\phi \right) dxdt + \int_{\mathbb{R}^d} |u_0|^2(x))\phi(x)dx$$

$$\geq \int\int_{\mathbb{R}^d \times [0,T]} 2 \sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\zeta_{ik}(u) \right)^2 \phi dxdt.$$

$$\Longrightarrow \qquad \int_{\mathbb{R}^d} |u(x,T)|^2\phi(x)dx + \int\int_{\mathbb{R}^d\times[0,T]} 2\sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{d}\partial_{x_i}\zeta_{ik}(u)\right)^2\phi dxdt$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_0|^2(x))\phi(x)dx \int\int_{\mathbb{R}^d\times[0,T]}\left(\sum_{i=1}^{d} q_i(u)\partial_{x_i}\phi + \sum_{i,j=1}^{d} r_{ij}(u)\partial^2_{x_ix_j}\phi\right)dxdt$$

$$\Longrightarrow \qquad \overbrace{\int_{\mathbb{R}^d} u^2(x,T)\phi(x)dx}^{\geq 0} + 2\int\int_{\mathbb{R}^d\times[0,T]}\sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{d}\partial_{x_i}\varsigma_{ik}(u)\right)^2\phi dxdt$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} u_0^2(x)\phi(x)dx + \int\int_{\mathbb{R}^d\times[0,T]}\left(\sum_{i=1}^{d} q_i(u)\partial_{x_i}\phi + \sum_{i,j=1}^{d} r_{ij}(u)\partial^2_{x_i,x_j}\phi\right)dxdt.$$

Par hypothèse on a : $||u_0||_{L^\infty} + ||u||_{L^\infty} + ||\phi||_{W^{2,1}} \leq M$, il s'ensuit que :

Par les flux correspondants on a

$$\begin{cases} ||q(u)|| = 2\left\|\int_0^u \xi F'(\xi)d\xi\right\| \\ ||r(u)|| = 2\left\|\int_0^u \xi A(\xi)d\xi\right\| \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ||q(u)|| \leq 2\int_0^u \|\xi F'(\xi)\|d\xi \\ ||r(u)|| \leq 2\int_0^u \|\xi A(\xi)\|d\xi \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} ||q(u)||_{L^\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R},\mathbb{R})} \leq 2M^2\ ess\sup_{-M\leq\xi\leq M}|F'(\xi)| \ \text{ et} \\ ||r(u)|_{L^\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R},\mathbb{R})}| \leq 2M^2\ ess\sup_{-M\leq\xi\leq M}|A(\xi)|. \end{cases}$$

Par conséquant

$$\int\int_{\mathbb{R}^d\times[0,T]}\left(\sum_{i=1}^{d} q_i(u)\partial_{x_i}\phi + \sum_{i,j=1}^{d} r_{ij}(u)\partial^2_{x_i,x_j}\phi\right)dxdt$$
$$\leq 2M^2\Big(ess\sup_{-M\leq\xi\leq M}(|F'(\xi)| + |A(\xi)|)\Big) \quad \forall u \in L^\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Par suite on obtient

$$2\int\int_{\mathbb{R}^d\times[0,T]}\sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{d}\partial_{x_i}\varsigma_{ik}(u)\right)^2\phi(x)dxdt \leq \int_{\mathbb{R}^d} u_0^2(x)\phi(x)dx$$

$$2M^2\Big(ess\sup_{-M\leq\xi\leq M}(|F'(\xi)| + |A(\xi)|)\Big) + \overbrace{\int_{\mathbb{R}^d} u^2(x,T)\phi(x)dx}^{\geq 0}$$

d'où

$$\int\int_{\mathbb{R}^d\times[0,T]}\sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{d}\partial_{x_i}\varsigma_{ik}(u)\right)^2\phi(x)dxdt \leq C.$$

□

Lemme 4.3.3. *[25].*

Pour $\varepsilon > 0$, définissons

$$sign_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} -1 & si\ \xi < -\varepsilon \\ sin(\frac{\pi}{2\varepsilon}\xi) & si\ |\xi| \leq \varepsilon \\ 1 & si\ \xi > \varepsilon. \end{cases}$$

Pour chaque $c \in \mathbb{R}$ *la fonction entropique correspondante*

$$u \longmapsto \eta_\varepsilon(u,c) = \int_c^u sign_\varepsilon(\xi)d\xi$$

est convexe et appartient à $C^2(\mathbb{R})$ *avec* $\eta''_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R})$ *et* $|\eta'_\varepsilon| < 1$ *De plus,* η_ε *est symétrique dans le sens où* $\eta_\varepsilon(u,c) = \eta_\varepsilon(c,u)$ *et pour tout* $u \in \mathbb{R}$,

$$\eta_\varepsilon(u,c) \longrightarrow \eta(u,c) := |u-c| \qquad comme \quad \varepsilon \downarrow 0.$$

Pour chaque $c \in \mathbb{R}$ *et* $1 \leq i,j \leq d$ *nous définissons les fonctions de flux entropiques*

$$u \longmapsto q_i^\varepsilon(u,c) = \int_c^u sign_\varepsilon(\xi - c)F_i'(\xi)d\xi$$

$$u \longmapsto r_{ij}^\varepsilon(u,c) = \int_c^u sign_\varepsilon(\xi - c)A_{ij}'(\xi)d\xi$$

où $A'_{ij}(.) = a_{ij}(.), \qquad pour \quad 1 \leq i,j \leq d.$ *Alors comme* $\varepsilon \downarrow 0$

$$\begin{aligned} q_i^\varepsilon(u,c) &\longrightarrow \eta(u,c) := sign_\varepsilon(u-c)(F_i'(u) - F_i'(c)) \\ r_{ij}^\varepsilon(u,c) &\longrightarrow \eta(u,c) := sign_\varepsilon(u-c)(A_{ij}'(u) - A_{ij}'(c)) \end{aligned} \tag{4.2}$$

pour $1 \leq i,j \leq d$. *Soit* $q^\varepsilon = (q^1, ...q^d), \quad r^\varepsilon = (r_{ij}^\varepsilon)$ *et de même pour* q, r.

Le Lemme suivant est un résultat clé pour contrôler la différence entre deux solutions entropiques d'une équation au dérivée partielle (EDP) non linéaire grâce aux techniques de comparaison. L'inéquation de Kato joue un rôle crucial dans l'étude de la contraction des solutions entropiques et de la stabilité des solutions en tenant compte des perturbations des données initiales.

Lemme 4.3.4. *(Inéquation de Kato)[28].*

Supposons (H2) et u, v *sont des solutions entropiques de (4.1) avec les données initiales* $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. *Alors pour tou* $T \geq 0$ *et toutes les fonctions test non négatives* $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,T])$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |u-v|(x,T)\phi(x,T)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_0 - v_0|(x)\phi(x,0)dx \\ + \int\int_{\mathbb{R}^d \times [0,T]} \left(|u-v|\partial_t\phi + \sum_{i=1}^d q_i(u,v)\partial_{x_i}\phi + \sum_{i,j=1}^d r_{ij}(u,v)\partial^2_{x_i x_j}\phi \right) dxdt, \end{aligned} \tag{4.3}$$

où

$$q_i(u,v) = sign(u-v)\int_v^u F'(\xi)d\xi, \quad r_{ij}(u,v) = sign(u-v)\int_v^u A_{ij}(\xi)d\xi.$$

Lemme 4.3.5. *[28].*

Supposons que (H1) et u, v soient des solutions entropiques L^∞ de (4.1) avec les données initiales $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout $t \geq 0$ et $m < M$ tel que u et v prennent leurs valeurs dans $[m, M]$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u - v|(x,t)e^{-|x|}dx \leq e^{(L_F + L_A)t} \int_{\mathbb{R}^d} |u_0 - v_0|(x)e^{-|x|}dx,$$

où $L_F = ess\sup_{[m,M]} |F'|$ et $L_A = ess\sup_{[m,M]} tr(A)$.

Démonstration. du Théorème 4.3.1 [28].

Par le Lemme 4.3.5 il reste à montrer l'existence. Etant donné $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, prenons $(u_0^n)_n$ dans $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$-ess\sup u_0^- \leq u_0^n \leq ess\sup u_0^+ \qquad \text{et} \quad u_0^n \longrightarrow u_0 \ \text{ dans } \ L^1_{loc}(\mathbb{R}^d). \tag{4.4}$$

Soit u_n la solution entropique de (4.1) avec les données initiales u_0^n. Par le principe de maximum (dans $L^1 \cap L^\infty$), nous savons que

$$-ess\sup u_0^- \leq u_0^n \leq ess\sup u_0^+. \tag{4.5}$$

De plus, par le Lemme 4.3.5, nous avons pour tout $R \geq 0,\ T \geq 0$, et les entiers n, m,

$$\begin{aligned}
&||u_m - u_n||_{C([0,T];L^1(|x|<R))} \\
&= \sup_{t\in[0,T]} \int_{|x|<R} |u_m(x,t) - u_n(x,t)|dx \\
&\leq e^R \sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^d} |u_m(x,t) - u_n(x,t)|e^{-|x|}dx \\
&\leq e^R \int_{\mathbb{R}^d} |u - v|(x,t)e^{-|x|}dx \\
&\leq e^{(L_F+L_A)t} \int_{\mathbb{R}^d} |u_0^m - u_0^n|(x)e^{-|x|}dx,
\end{aligned}$$

où cette dernière inégalité tend vers 0 lorsque $n, m \longrightarrow \infty$ par (4.4). Il existe donc un certain $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+; L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$ tel que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = u \quad \text{dans} \quad C([0,T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)), \quad \forall\ T \geq 0. \tag{4.6}$$

Il reste à montrer que u est une solution entropique de donnée initiale u_0. Par le Lemme 4.3.2 et les bornes L^∞ dans (4.5) , la suite

$$\left\{ \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} \zeta_{ik}(u_n) \right\} \subset L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$$

est uniformément bornée dans $L^2(\mathcal{K})$, pour tout $k = 1, ..., K$, et $\mathcal{K}$ (compact) $\subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$. Elle converge alors faiblement dans $L^2(\mathcal{K})$ vers $\sum_{i=1}^d \partial_{x_i} \zeta_{ik}(u)$. Nous pouvons identifier la limite car $\sum_{i=1}^d \partial_{x_i} \zeta_{ik}(u_n)$ converge également vers $\sum_{i=1}^d \partial_{x_i} \zeta_{ik}(u)$ au sens de la distribution. En effet

$$\zeta_{ik}(.) = \int_0^{\cdot} \sigma_{ik}^A(\xi)d\xi$$

est localement continue lipschitz puisque $\sigma_{ik}^A(.)$ est localement borné par hypothèse, et (4.5) et (4.6) nous assure que $\zeta_{ik}(u_n) \longrightarrow \zeta_{ik}(u)$ dans $C([0,T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$ pour tout $T \geq 0$.

Et comme revendiqué précédemment, toutes les dérivées correspondantes convergent nécessairement dans le sens de la distribution. Ce qui prouve que $\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\zeta_{ik}(u) \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ pour tout $k = 1, ..., K$.

D'après ce qui précède la preuve de la partie (a) de la Définition 4.2.1 est complète. De plus, nous avons trouvé que

$$\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\zeta_{ik}(u_n) \rightharpoonup \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\zeta_{ik}(u) \quad \text{dans} \quad L^2(\mathcal{K}),$$

pour tout $k = 1, ..., K$ et $\mathcal{K}$ (compact) $\subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$. Pour montrer la règle de chaîne dans la partie (b) de la Définition 4.2.1, nous commençons par la règle d'enchaînement pour u_n,

$$\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\zeta_{ik}^{\beta}(u_n) = \beta(u_n) \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\zeta_{ik}(u_n) \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+), \tag{4.7}$$

valide pour tout $\beta \in C(\mathbb{R}), \quad k = 1, ..., K$, et tout entier n. Rappelons aussi que

$$\zeta_{ik}^{\beta}(u_n) = \int_0^{u_n} \sigma_{ik}^{A}(\xi)\beta(\xi)d\xi.$$

D'après les résultats et bornes de convergence précédents, le membre droit de (4.7) converge faiblement vers $\beta(u) \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\zeta_{ik}(u)$ dans $L^2(\mathcal{K})$.Nous pouvons argumenter comme précédemment pour montrer que le membre gauche converge faiblement $L^2(\mathcal{K})$ vers $\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\zeta_{ik}^{\beta}(u)$. On obtient donc la partie (b) de la Définition 4.2.1 dans la limite. En outre,

$$\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\zeta_{ik}^{\beta}(u_n) \rightharpoonup \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\zeta_{ik}^{\beta}(u) \quad \text{dans} \quad L^2(\mathcal{K}), \tag{4.8}$$

pour tout $\beta \in C(\mathbb{R}), \quad k = 1, ..., K$, et $\mathcal{K}$ (compact) $\subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$.

Il reste maintenant à prouver la partie (c) de la Définition 4.2.1. Nous nous concentrons sur le terme quadratique. Prenons $\beta = \sqrt{\eta''}$ et appliquons la règle de la chaîne Définition 4.2.1(b),

$$\begin{aligned}
&\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+} \eta''(u_n) \sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\zeta_{ik}(u_n) \right)^2 \phi dxdt \\
&= \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+} \eta''(u_n) \sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\zeta_{ik}(u_n) \right) \left(\sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j}\zeta_{jk}(u_n) \right) \phi dxdt \\
&= \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+} \sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\zeta_{ik}^{\sqrt{\eta''}}(u_n) \right) \left(\sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j}\zeta_{jk}^{\sqrt{\eta''}}(u_n) \right) \phi dxdt \\
&= \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+} \sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\zeta_{ik}^{\sqrt{\eta''}}(u_n)\sqrt{\phi} \right)^2 dxdt \\
&= \sum_{k=1}^{K} \left\| \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\zeta_{ik}^{\sqrt{\eta''}}(u_n)\sqrt{\phi} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+)}.
\end{aligned}$$

Mais, par (4.8), nous avons pour tout $k = 1, ..., K$,

$$\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\zeta_{ik}^{\sqrt{\eta''}}(u_n)\sqrt{\phi} \rightharpoonup \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\zeta_{ik}^{\sqrt{\eta''}}(u)\sqrt{\phi} \qquad \text{dans} \quad L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+).$$

Il s'ensuite que

$$\left\| \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} \zeta_{ik}^{\sqrt{\eta''}}(u)\sqrt{\phi} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+)} \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf \left\| \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} \zeta_{ik}^{\sqrt{\eta''}}(u_n)\sqrt{\phi} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+)},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\longrightarrow\infty} \inf \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+} \eta''(u_n) \sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} \zeta_{ik}(u_n) \right)^2 \phi dxdt \\
&\geq \sum_{k=1}^{K} \left\| \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} \zeta_{ik}^{\sqrt{\eta''}}(u)\sqrt{\phi} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+)} \\
&= \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+} \eta''(u) \sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} \zeta_{ik}(u) \right)^2 \phi dxdt,
\end{aligned}$$

Rappelons que la mesure de dissipation parabolique $n_l^{u,\psi}(x,t)$ voir [25] est définie par :

$$n^{u,\psi}(x,t) = \psi(x,t) \sum_{k=1}^{K} \Big(div\ \zeta_k(u(x,t)) \Big)^2.$$

Pour tout triplée de flux entropique (η, q, r), on a :

$$\bullet \partial_t \eta(u_n) + \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} q_i(u_n) - \sum_{i,j=1}^{d} \partial^2_{x_i x_j} r_{ij}(u_n) - \eta((u_0)_n) \leq -n^{u_n,\eta''} \ \text{ dans } \ L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+).$$

Et d'après (4.6) , on obtient

$$\begin{aligned}
&\partial_t \eta(u_n) \rightharpoonup \partial_t \eta(u) \\
&\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} q_i(u_n) \rightharpoonup \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} q_i(u) \\
&\sum_{i,j=1}^{d} \partial^2_{x_i x_j} r_{ij}(u_n) \rightharpoonup \sum_{i,j=1}^{d} \partial^2_{x_i x_j} r_{ij}(u) \\
&\eta((u_0)_n) \rightharpoonup \eta(u_0) \\
&n^{u_n,\eta''} = \eta''(u_n) \sum_{k=1}^{K} \Big(div\ \zeta_k(u_n(x,t)) \Big)^2.
\end{aligned}$$

De plus

$$\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+} n^{u_n,\eta''} = \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+} \eta''(u_n(x,t)) \sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} \zeta_{ik}(u_n(x,t)) \right)^2 \phi dxdt$$

car

$$div\ \zeta_k(u_n(x,t) = \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} \zeta_{ik}(u_n(x,t))$$

En tenant compte de l'inégalité en $\bullet$ on peut avoir :

$$\begin{aligned}
&\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+} \left(\partial_t \phi \eta(u_n) + \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} \phi q_i(u_n) + \sum_{i,j=1}^{d} \partial^2_{x_i x_j} \phi r_{ij}(u_n) \right) dxdt + \int_{\mathbb{R}^d} \eta((u_0)_n)(x)\phi(x,0)dx \\
&\geq \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+} n^{u_n,\eta''} dxdt
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left\| \partial_t \phi \eta(u_n) + \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} \phi q_i(u_n) + \sum_{i,j=1}^{d} \partial^2_{x_i x_j} \phi r_{ij}(u_n) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)} + \left\| \eta((u_0)_n)\phi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

$$\geq \left\| \eta''(u_n(x,t)) \sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} \sqrt{\phi} \zeta_{ik}(u_n(x,t)) \right)^2 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)}$$

d'où

$$\int \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \left(\partial_t \phi \eta(u_n) + \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} \phi q_i(u_n) + \sum_{i,j=1}^{d} \partial^2_{x_i x_j} \phi r_{ij}(u_n) \right) dxdt +$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \eta(u_0(x))\phi(x,0)dx \geq \int \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \eta''(u) \sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} \zeta_{ik}(u) \right)^2 \phi dxdt.$$

Ce qui achève la partie (c) de la Définition 4.2.1.

Par conséquent $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+; L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$ est une solution entropique de (4.1) et elle est unique grâce au lemme précédent.

□

Comme sous produit de la preuve précédente, nous obtenons le lemme ci-dessous.

Lemme 4.3.6. *[28].*

Supposons (H2),$u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, et u est la solution entropique de (4.1). Alors

$$ess \ \inf u_0 \leq u \leq ess \ \sup u_0.$$

De plus, si v est la solution entropique avec données initiales v_0, alors $u_0 \geq v_0$ implique $u \geq v$.

Démonstration.

Pour le principe de comparaison, définissons $u_0^n(x) = u_0(x)\mathbb{1}_{|x|<n}$ et v_0^n de façon similaire.

Comme précédement, les solutions entropiques associées u_n et v_n convergent respectivement vers u et v dans $C([0,T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$, $t \geq 0$, et donc identiquement jusqu'à la prise d'un (commun) sous-séquence. Si $u_0 \geq v_0$, alors $u_0^n \geq v_0^n$ pour tout n, alors $u_n \geq v_n$ par le principe de comparaison dans $L^1 \cap L^\infty$, et $u \geq v$ à la limite. Par le principe du maximum u.

□

Conclusion

Ayant établi la notion de Solution de viscosité pour l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) et la solution entropique pour les problèmes de convection diffusion, il est maintenant pertinent de se pencher sur les principaux résultats.

Chapitre 5

Principaux résultats

Introduction

Dans ce chapitre, nous énonçons précisement les résultats de cette nouvelle dualité. Nous débuteront par évoquer l'estimation de la contraction pondérée de L^1 pour (4.1), ensuite nous aborderons l'optimalité du poids et enfin l'interprétation en terme de semi-groupe non linéaire dual qui prendra en compte la théorie L^1 pour (3.1).

5.1 Contraction pondérée de L^1 pour les solutions entropiques

Dans cette section, nous parlerons des estimations de type contraction qui sont des résultats quantitatifs de dépendance continue des données initiales. Un exemple simple est le principe de contraction L^1 :

$$||(u-v)(t)||_{L^1} \leq ||u_0 - v_0||_{L^1}. \tag{5.1}$$

Pour les solutions L^∞ éventuellement non intégrables, nous avons besoin d'estimations pondérées. Un résultat important est la propriété de vitesse de propagation finie pour les EDPs du premier ordre :

$$\int_{|x-x_0|<R} |u(x,t) - v(x,t)|dx \leq \int_{|x-x_0|<R+Ct} |u_0(x) - v_0(x)|dx, \tag{5.2}$$

voir [30] pour les estimations optimales. Pour les EDP du second ordre, un exemple standard est donné par :

$$\int |u(x,t) - v(x,t)|e^{-\sqrt{1+|x|^2}}dx \leq \int |u_0(x) - v_0(x)|e^{-\sqrt{1+|x|^2}}dx. \tag{5.3}$$

Le poids φ est notre nouvelle estimation pour (4.1) la solution de viscosité de (3.1) avec les données $b = F', \quad a = A, \quad \varepsilon = [m, M] \cap \{\text{points de Lebesgue de } (F', A)\}$ un problème que nous reécrivons sous une forme plus pratique comme suit :

$$\partial_t \varphi = esssup_{m\leq\xi\leq M} \{F'(\xi).D\varphi + tr(A(\xi)D^2\varphi)\} \qquad x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0. \tag{5.4}$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x) \qquad x \in \mathbb{R}^d, \tag{5.5}$$

pour $m < M$ et φ_0. Nous donnons tout d'abord une nouvelle estimation très précise de la contraction pondérée de L^1 pour (4.1) de la forme

$$\int |u(x,t) - v(x,t)|\varphi_0(x)dx \leq \int |u_0(x) - v_0(x)|\varphi(x,t)dx, \tag{5.6}$$

où $\varphi_0 \geq 0$ est arbitraire.

Théorème 5.1.1. *[28] (Contraction pondérée de L^1).*
Supposons (H2), $m < M, u_0 = u_0(x)$ et $v_0 = v_0(x)$ sont mesurables avec des valeurs dans $[m, M]$, et $0 \leq \varphi_0 \in BLSC(\mathbb{R}^d)$. Alors les solutions entropiques u et v de (4.1) et la solution de viscosité minimale $\underline{\varphi}$ de (5.4) satisfont à :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u - v|(x,t)\varphi_0(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_0 - v_0|(x)\underline{\varphi}(x,t)dx \qquad \forall t \geq 0. \tag{5.7}$$

Remarque 5.1.2. [28].

1. Le problème (5.4) est de la forme (4.1) avec un "sup" ponctuel pris sur les points de Lebesgue de F' et A.
2. Le coté droit de (5.7) peut être infini. Pour obtenir des intégrales finis, il suffit de prendre $\varphi_0 \in L^\infty_{int}$ ou $u_0 - v_0 \in L^1$.
3. Le même résultat s'applique lorsque $\underline{\varphi}$ est remplacé par une sur-solution mesurable quelconque de (5.4), puisqu'il est supérieur à $\underline{\varphi}$.

Démonstration. [28].
Nous devons montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u - v|(x,T)\varphi_0(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_0 - v_0|(x)\underline{\varphi_0}(x,T)dx \quad \forall T \geq 0. \tag{5.8}$$

Utilisons l'inégalité de Kato (4.3) avec $0 \leq \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,T])$. On obtient alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
&\left\{ \sum_{i=1}^d q_i(u,v)\partial_{x_i}\phi + \sum_{i,j=1}^d r_{ij}(u,v)\partial^2_{x_i x_j}\phi \right\}(x,t) \\
&= sign(u(x,t) - v(x,t)) \int_{v(x,t)}^{u(x,t)} F'(\xi).D\phi(x,t) \\
&+ sign(u(x,t) - v(x,t)) \int_{v(x,t)}^{u(x,t)} \sum_{i,j=1}^d A_{ij}(\xi)D^2\phi(x,t)d\xi \\
&= sign(u(x,t) - v(x,t)) \int_{v(x,t)}^{u(x,t)} \{F'(\xi).D\phi(x,t) + tr(A(\xi)D^2\phi(x,t)\}d\xi \\
&\leq |u(x,t) - v(x,t)| ess \sup_{m \leq \xi \leq M} \{F'(\xi).D\phi(x,t) + tr(A(\xi)D^2\phi(x,t))\},
\end{aligned} \tag{5.9}$$

où nous avons pris le sup sur $[m, M]$ à cause du principe du maximum Lemme 4.3.6. En injectant dans (4.3), nous obtenons que :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} |u - v|(x,T)\phi(x,T)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_0 - v_0|(x)\phi(x,0)dx \\
&+ \int \int_{\mathbb{R}^d \times [0,T]} |u - v| \left(\partial_t\phi + ess \sup_{m \leq \xi \leq M} \{F'(\xi).D\phi + tr(A(\xi)D^2\phi)\} \right) dxdt.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Dans la troisième intégrale, nous reconnaissons la version à rebours dans le temps de (5.4). La preuve de (5.8) consiste alors à prendre $\phi(x,t) = \underline{\varphi}(x, T-t)$.

Cas simplifié : $0 \leq \varphi_0 \in C_c(< \mathbb{R}^d)$.
Maintenant (5.4) a une unique solution de viscosité φ qui coïncide avec $\underline{\varphi}$. Elle appartient à $C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^d))$ par le Corollaire 5.3.17 et le Théorème 4.1.1. Régularisons-la par convolution

$$\varphi_\nu := \varphi *_{x,t} (\rho_\nu \theta_\nu),$$

avec les suites régularisant (3.2) et (3.3). Il s'ensuit que

$$\varphi_\nu \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^d))$$

avec toutes ses dérivées. Cela suffit pour prendre $\phi_\nu(x,t) := \varphi_\nu(x, T-t)$ comme fonction test dans (5.10) par approximation. Notons ϕ_ν est une sur-solution de la version rétrograde de (5.4) par le Lemme 5.3.13, c'est-à-dire :

$$\partial_t \phi_\nu + ess \sup_{m \leq \xi \leq M} \{F'(\xi).D\phi_\nu + tr(A(\xi)D^2\phi_\nu)\} \leq 0 \qquad \text{pour tout} \quad t < T.$$

L'inégalité (5.10) avec la fonction test ϕ_ν implique alors que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u-v|(x,T)\varphi_\nu(x,0)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_0 - v_0|(x)\varphi_\nu(x,T)dx,$$

pour tout $T \geq 0$ et $\nu > 0$. Par la régularité $C(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^d))$ de φ, la convolution $\varphi_\nu = \varphi *_{x,t} (\rho_\nu \theta_\nu)$ converge vers φ dans $C([0,T], L^1(\mathbb{R}^d))$ comme $\nu \to 0^+$. Le passage à la limite comme $\nu \to 0^+$ donne alors (5.8).

Cas général : $0 \leq \varphi_0 \in BLSC(\mathbb{R}^d)$.
Nous souhaitons approximer ponctuellement φ_0 par une suite monotone $\varphi_0^n \uparrow \varphi_0$ telle que $0 \leq \varphi_0^n \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Prendre

$$\varphi_0^n(x) := \inf_{y \in \mathbb{R}^d} \{\varphi_0(y)(x)\mathbb{1}_{|y|<n} + n|x-y|^2\} \geq 0.$$

Alors φ_0^n est continue comme une infconvolution. De même

$$\varphi_0^n(x) \leq \varphi_0(x)\mathbb{1}_{|y|<n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

ce qui implique que $\varphi_0^n \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Dans la limite $n \to \infty$, on a $\varphi_0^n \uparrow (\varphi_0)_*$. Soit φ_n la solution de (5.4) avec les données initiales φ_0^n, alors par l'étape précédente,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u-v|(x,T)\varphi_0^n(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_0 - v_0|(x)\varphi_n(x,T)dx,$$

pour tout $T \geq 0$ et n. Par la stabilité des solutions minimales (voir Proposition 3.4.9), ces solutions satisfaites $\varphi_n \uparrow \underline{\varphi}$ ponctuellement. On conclut donc la preuve de 5.8 en passant à la limite lorsque $n \to \infty$ en utilisant le théorème de convergence monotone. □

Remarque 5.1.3. [28].

En revenant à (4.3) et (5.9), nous pouvons penser au cadre cinétique de (4.1) puisque

$$\begin{aligned} &sign(u(x,t)-v(x,t))\int_{v(x,t)}^{u(x,t)}\Big\{\partial_t\phi(x,t)+F'(\xi).D\phi(x,t)+tr(A(\xi)D^2\phi(x,t))\Big\}d\xi \\ &=\int_{\mathbb{R}^d}|\chi(\xi;u)-\chi(\xi;v)|\Big\{\partial_t\phi(x,t)+F'(\xi).D\phi(x,t)+tr(A(\xi)D^2\phi(x,t))\Big\}d\xi; \end{aligned} \tag{5.11}$$

avec la fonction cinétique habituelle χ, cependant, nous n'avons pas exploré cette posibilité. Pour L^1 solutions cinétiques de (4.1), u et v prendraient des valeurs en dehors de tout intervalle borné, il y aurait donc d'autres termes pour les grands $|\xi|$ et nous n'avons aucune idée de ce que pourait alors être une version raisonnable de (5.6).

En conséquence de ce résultat et de la formule de représentation des EDP du premier ordre, nous obtenons l'estimation suivante sur le domaine de dépendance :

Corollaire 5.1.4 (équations du 1re ordre)**.** *[28].*

Supposons (H1) avec $A\equiv 0$, $m<M$, et que u_0 et v_0 soient des fonctions mesurables avec des valeurs dans $[m,M]$. Soient u et v les solutions entropiques de (4.1) avec les données initiales u_0 et v_0. Alors, pour tout ensemble borélien $B\subset\mathbb{R}^d$ et pour tout $t\geq 0$,

$$\int_B|u-v|(x,t)\,dx\leq\int_{B-tC}|u_0-v_0|(x)\,dx,$$

où $C=\overline{co\Big\{ess\ Im\Big((F')|_{[m,M]}\Big)\Big\}}$ et ess Im est l'image essentielle.

Démonstration. [28].

Soit $U\supseteq B$ un ensemble ouvert et prenons $\varphi_0=\mathbb{1}_U$. Par la Proposition **??**, la solution minimale de (5.4) est $\underline{\varphi}_0(x,t)=\mathbb{1}_{U-tC}(x)$. Appliquons alors le Théorème 5.1.1 et prenons l'infimum sur tous ouverts $u\supseteq B$. □

Pour les équations du second ordre, nous avons l'extension suivante du résultat du domaine de dépendance :

Corollaire 5.1.5 (équations du second ordre)**.** *[28].*

Supposons (H2), $F'(\cdot)$ et $\sigma^A(\cdot)$ soient continus, $m<M$, et que $u_0,v_0\in L^\infty(\mathbb{R}^d,[m,M])$. Soient u et v les solutions entropiques de (4.1) avec les données initiales u_0 et v_0. Alors pour tout ensemble ouvert $U\subseteq\mathbb{R}^d$ et tout $t\geq 0$, on a :

$$\int_U|u-v|(x,t)\,dx\leq\int_{\mathbb{R}^d}|u_0-v_0|(x)\sup_{\xi_s}\mathbb{P}(X_t^x\in U)\,dx,$$

où ξ_s est l'ensemble des processus progressivement mesurables $[m,M]$-valué , et X_s^x est un processus d'Itô satisfaisant l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_s^x=F'(\xi_s)\,ds+\sqrt{2}\sigma^A(\xi_s)\,dB_s, & s>0,\\ X_{s=0}^x=x. \end{cases} \tag{5.12}$$

Remarque 5.1.6. [28].

1. X_s^x est un processus stochastique partant de x à l'instant $s = 0$. La dynamique de X_s^x est donnée par EDS(Équations Différentielles Stochastiques) contrôlée (5.12) où les coefficients sont les dérivées des flux de l'équation (4.1). La commande est déterminée pour maximiser la probabilité que le processus atteigne U au temps $s = t$. Équation (5.4) est l'équation de programmation dynamique pour ce problème de contrôle.
2. Si $A \equiv 0$, le problème est déterministe et nous retrouvons le Corollaire 5.1.4.

Démonstration.

Prenons $\varphi_0 = \mathbb{1}_U$ et appliquons la Proposition 3.4.11 pour calculer $\underline{\varphi}$ dans le Théorème 5.1.1.

□

5.2 Optimalité du poids

Nous discutons de l'optimalité du Théorème 5.1.1 et de son interprétation rigoureuse en termes de relations de dualité. La première étape est une reformulation de la définition des sur-solutions de viscosité en terme de poids dans L^1 estimations de contractions pour (3.1).

Pour établir la nouvelle caractérisation des sur-solutions de viscosité ,nous avons besoin de plusieurs lemmes techniques.

Voici un premier résultat classique sur les solutions entropiques.

Lemme 5.2.1. *Supposons (H2) et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors, la solution entropique de (4.1) est une solution distributionnelle de (4.1),*

$$\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+} \left(u\partial_t\phi + \sum_{i=1}^d F_i(u)\partial_{x_i}\phi + \sum_{i,j=1}^d \mathcal{A}_{ij}(u)\partial^2_{x_ix_j}\phi \right) dxdt$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\phi(x,0)dx = 0 \qquad \forall\ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+),$$

où $\mathcal{A}_{ij}(u) = \int_0^u A_{ij}(\xi)d\xi$.

Démonstration. [28].

En prenant $\eta(u) = \pm u$ successivement dans les inégalités entropiques, Par la Définition 4.2.1(c) on obtient le résultat.

En effet en posant $\eta(u) = u$ dans la Définition 4.2.1(c) on a :

$$\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+} \left(u\partial_t\phi + \sum_{i=1}^d q_i(u)\partial_{x_i}\phi + \sum_{i,j=1}^d r_{ij}(u)\partial^2_{x_ix_j}\phi \right) dxdt +$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\phi(x,0)dx > 0.$$

Identiquement pour $\eta(u) = -u$ on a :

$$-\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+} \left(u\partial_t\phi + \sum_{i=1}^d q_i(u)\partial_{x_i}\phi + \sum_{i,j=1}^d r_{ij}(u)\partial^2_{x_ix_j}\phi \right) dxdt -$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\phi(x,0)dx \geq 0,$$

$$\Longrightarrow \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+} \left(u\partial_t\phi + \sum_{i=1}^{d} q_i(u)\partial_{x_i}\phi + \sum_{i,j=1}^{d} r_{ij}(u)\partial^2_{x_ix_j}\phi \right) dxdt +$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\phi(x,0)dx \leq 0,$$

en tenant compte du Définition 4.1.2.

Des deux résultats précédentes nous déduisons la preuve du corollaire.

□

Voici un résultat sur la continuité dans le temps.

Lemme 5.2.2. *[28].*
Supposons que (H2), $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, u et v deux solutions entropiques de (4.1) avec les données initiales u_0 et v_0. Alors $u - v \in C(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^d))$.

Démonstration. [28].
Par le Théorème 5.1.1 avec $\varphi_0 \equiv 1$, on a

$$||u(.,t) - v(.,t)||_{L^1} \leq ||u_0 - v_0||_{L^1} \qquad \forall t \geq 0.$$

Puisque la partie gauche est fini, $u - v \in C(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^d))$. Par la continuité en temps à valeurs dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ de ces fonctions, il reste à prouver que

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \int_{|x|\geq R} |u(x,t) - v(x,t)|dx = 0 \qquad \forall T \geq 0. \tag{5.13}$$

Pour ce faire, nous utiliserons à nouveau le Théorème 5.1.1.

Fixez $m < M$ de telle sorte que u_0 et v_0 prennent leurs valeurs dans $[m, M]$, et considérez

$$\varphi_0^R(x) := \varphi_0(\frac{x}{R}), \qquad R >,$$

où $\varphi_0 = \varphi_0(x)$ est un noyau tel que

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi_0 \in C_b(\mathbb{R}^d), \\ \varphi_0(x) = 0 \quad \text{pour} \quad |x| \leq 1/2, \\ \text{et} \quad \varphi_0(x) = 1 \quad \text{pour} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

Avec ce choix , $\varphi_0^R \to 0$ comme $R \to \infty$ localement de manière uniforme. Nous affirmons ensuite que les solutions φ^R de (5.4) avec des données initiales φ_0^R convergent localement uniformément vers zéro également . Ceci est une conséquence de la méthode des semi-limites relaxées [9]. Donnons des détails pour être complet. Selon le principe du maximum,

$$||\varphi^R||_\infty \leq ||\varphi_0^R||_\infty = ||\varphi_0||_\infty \qquad \forall R > 0.$$

Nous pouvons alors appliquer les Propositions 3.4.2 et 3.4.4 à $\limsup^* \varphi^R$ comme $R \to \infty$ et il s'agit d'une sous-solution de (5.4) satisfaisant

$$\limsup^*_{} \varphi^R(x,0) = \limsup^*_{} \varphi^R_0(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

De même, $\liminf_* \varphi^R$ est une sur-solution de (3.1) avec zéro comme donnée initiale. Le principe de comparaison implique alors que

$$\limsup^*_{} \varphi^R \leq \liminf_* \varphi^R.$$

Par conséquent, φ^R converge localement uniformément vers l'unique solution de (5.4) avec des données initiales nulles, c'est-à-dire zéro elle-même.
Nous pouvons maintenant montrer (5.13). Par le Théorème 5.1.1 avec les m, M et φ^R_0 précédents,

$$\int_{|x|\geq R} |u(x,t) - v(x,t)|dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u(x,t) - v(x,t)|\varphi^R_0(x)dx$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x,t) - v_0(x,t)|\varphi^R(x,t)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x) - v_0(x)| \sup_{s\in[0,T]} \varphi^R(x,s)dx,$$

pour tout $T \geq t \geq 0$. La partie droit disparait comme $R \to \infty$ par la discussion ci-dessus et le théorème de convergence dominée. La preuve de (5.13) est complète. □

Plus tard nous passerons à la limite

$$\varphi_\flat := \liminf_* \varphi_\nu \qquad \text{comme } \nu \to 0^+$$

et comparez $\varphi_\flat$ avec la fonction

$$\varphi_\sharp(x,t) = \liminf_{\substack{r\to 0^+ \\ y\to x}} \frac{1}{mes(B_r(y))} \int_{B_r(y)} \varphi(z,t)dz. \tag{5.14}$$

Pour ce faire, nous supposerons en outre que

$$supp(\rho_\nu) \subset B_\nu(0) \qquad \text{et} \quad supp(\theta_\nu) \subset (-\nu, 0). \tag{5.15}$$

Voici les propriétés fondamentales de $\varphi_\flat$ et $\varphi_\sharp$ qui seront nécessaires.

Lemme 5.2.3. *[28].*
Supposons que $\varphi \in BLSC(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$, $\varphi_\flat$ et $\varphi_\sharp$ sont les mêmes que ci-dessus, et (5.15) tient. Dans ce cas :

(i) La limite $\varphi_\flat$ est la plus grande fonction ponctuelle dans $BLSC(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ qui est inférieure ou égale à φ i.a. De plus $\varphi_\flat = \varphi$ i.a.

(ii) Pour tout $t \geq 0, \varphi_\sharp(.,t)$ est la plus grande fonction ponctuelle dans $BLSC(\mathbb{R}^d)$ inférieure ou égale à $\varphi(.,t)$ i.a. De plus $\varphi_\sharp = \varphi(.,t)$ i.a.

Remarque 5.2.4. [28].
Il est entendu que" i.a" s'applique à (x,t) dans (i) et à x dans (ii).

Théorème 5.2.5 (de Fubini version simplifiée)**.** *[40]*

Soient $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $E \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble mesurable. Si f est intégrable sur E, alors l'intégrale de f sur E peut être calculée comme une suite d'intégrales itérées. Dans le cas d'une intégrale double :

$$\int_{A\times B} f(x,y)\, d(x,y) = \int_A \left(\int_B f(x,y)\, dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x,y)\, dx \right) dy$$

où , $A \subset \mathbb{R}^n$ et $B \subset \mathbb{R}^d$ est une fonction mesurable sur $A \times B$.

Conditions d'application :

1. *f doit être intégrable par rapport à la mesure produit sur $A \times B$.*
2. *Les intégrales de f sur A et B doivent exister et être finis.*

Voici également une inégalité générale entre $\varphi_\flat$ et $\varphi_\sharp$ qui sera nécessaire.

Lemme 5.2.6. *[28].*

Sous les hypothèses du lemme précédent, $(\varphi_\sharp)_* \leq \varphi_\flat$ ponctuellement.

Démonstration. [28].

Prouvons d'abord que $\varphi_\sharp$ est mesurable en (x,t). On a

$$\varphi_\sharp(x,t) = \sup_{n\geq 1} \overbrace{\inf_{m\geq n} \underbrace{\inf_{\substack{\frac{1}{m}\leq r\leq \frac{1}{n} \\ |y|\leq \frac{1}{n}}} \frac{1}{mes(B_r(y))} \int_{B_r(y)} \varphi(x+z,t)dz}_{=:\varphi_{n,m}(x,t)}}^{=:\varphi_n(x,t)},$$

où n et m sont des nombres entiers. Pour chaque $\frac{1}{m} \leq r \leq \frac{1}{n}$ et $|y| \leq \frac{1}{n}$, la fonction

$$(x,t) \longmapsto \frac{1}{mes(B_r(y))} \int_{B_r(y)} \varphi(x+z,t)dz$$

est semi-continue inférieure par le lemme de Fatou et $\varphi \in BLSC$(hypothèse du lemme précédent). L'infimum $\varphi_{n,m}$ reste semi-continu inférieur, car r et y sont contenues dans des ensembles compacts. Par conséquent, $\varphi_n = \inf_{m\geq n} \varphi_{n,m}$ est mesurable en (x,t) et il en est de même pour $\varphi_\sharp = \sup_{n\geq 1} \varphi_n$.

Nous pouvons maintenant prouver le lemme. Pour tout $t \geq 0$, les fonctions mesurables satisfont $\varphi_\sharp(.,t) = \varphi(.,t)$ i.a., donc nous pouvons utiliser le théorème de Fubini pour conclure que

$$\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+} \mathbb{1}_{\varphi_\sharp=\varphi} dxdt = \int_{\mathbb{R}^+} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\varphi_\sharp(x,t)=\varphi(x,t)} dx \right) dt = 0.$$

Cela prouve que $\varphi_\sharp = \varphi$ i.a. en (x,t), de sorte que $(\varphi_\sharp)_* \leq \varphi$ i.a. en (x,t). D'où $(\varphi_\sharp)_* \leq \varphi_\flat$ ponctuellement par le Lemme 5.2.3((i)). □

Démonstration. [28].

Prouvons (i). Remarquons d'abord que $\varphi_\flat$ est semi-continue inférieure en tant que limite relaxée inférieure. Pour prouver que $\varphi_\flat \leq \varphi$ i.a., il suffit de le faire pour les points de Lebesgue de φ. De tels points $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,+\infty[$ satisfont

$$\lim_{\nu\to 0^+} \frac{1}{\nu^{d+1}} \int\int_{B_\nu(x)\times(t-\nu,t+\nu)} |\varphi(y,s) - \varphi(x,t)| dyds = 0,$$

Ainsi, par les hypothèse sur les suites régularisantes, voir (3.2), (3.3) et (5.15), nous trouvons que

$$|\varphi_\nu(x,t)-\varphi(x,t)| \le \frac{1}{\nu^{d+1}}\int\int_{B_\nu(x)\times(t,t+\nu)} |\varphi(y,s)-\varphi(x,t)|\rho(\frac{x-y}{\nu})\theta(\frac{t-s}{\nu})dyds \to 0$$
$$\text{lorsque } \nu \to 0^+.$$

Il s'ensuit que

$$\varphi_\flat(x,t) \le \lim_{\nu\to 0^+} \varphi_\nu(x,t) = \varphi(x,t),$$

en tout point de Lebesgue. De plus, pour tout (x,t) fixé, la semi-continuité inférieure de φ implique que

$$\varphi_\nu(y,s) = \int_{B_\nu(y)\times(s,s+\nu)} \underbrace{\varphi(z,\tau)}_{\ge\varphi(x,t)+o(1)} \rho(\frac{y-z}{\nu})\theta(\frac{s-\tau}{\nu})dzd\tau \ge \varphi(x,t)+o(1)$$

comme $(y,s,\nu)\to(x,t,0^+)$, et nous obtenons que

$$\varphi_\flat(x,t) = \liminf_{*} \varphi_\nu(x,t) \ge \varphi(x,t).$$

On en conclut que $\varphi_\flat = \varphi$ i.a.

Maintenant, pour compléter la preuve de (i), il reste à prouver que $\varphi_\flat \ge \psi$ ponctuellement pour tout autre $\psi \in BLSC(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+)$ tel que $\psi \le \varphi$ i.a. Étant donné une telle fonction, laissez

$$\psi_\flat := \liminf_{*} \psi *_{x,t} (\rho_\nu\theta_\nu).$$

Comme ci-dessus, $\psi \le \psi_\flat$ ponctuellement ; mais aussi $\psi_\flat \le \varphi_\flat$ ponctuellement puisque

$$\psi *_{x,t} (\rho_\nu\theta_\nu) \le \varphi *_{x,t} (\rho_\nu\theta_\nu).$$

Cela prouve (i) et les arguments pour le point (ii) sont similaires.

□

Lemme 5.2.7. *[28].*
Soit $\varphi,\psi \in BLSC(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+)$ et $\varphi_\sharp,\psi_\sharp$, comme dans (5.14). Dans ce cas

(i) $\varphi \le (\varphi_\sharp)_*$ ponctuellement, et

(ii) si $\varphi \le \psi_\sharp$ ponctuellement, alors $\varphi_\sharp \le \psi_\sharp$ ponctuellement.

Démonstration.

Nous pouvons montrer que $\varphi \le \psi_\sharp$ à partir de la définition de $\varphi_\sharp$ et de la semi continuité inférieure de φ, exactement comme nous avons montré que $\varphi \le \varphi_\flat$ dans la preuve du Lemme 5.2.3. En particulier, $\varphi \le (\varphi_\sharp)_*$, ce qui correspond à la partie (i). Pour la partie (ii), on utilise le Lemme 5.2.3 (ii). Il dit que $\psi_\sharp(.,t) = \psi(.,t)$ i.a. dans x, pour chaque $t \ge 0$ fixé. Par conséquent, $\varphi(.,t) \le \psi(.,t)$ i.a. et l'inégalité désirée découle à nouveau des définitions de $\varphi_\sharp$ et $\psi_\sharp$. □

Théorème 5.2.8. *(poids et sur solution)[28].*
Supposons (H2), $m<M$, et $0 \le \varphi \in BLSC(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+)$. Les énoncés ci-dessous sont alors équivalents :

(i) Pour toutes les fonctions mesurables u_0 et v_0 avec des valeurs dans $[m, M]$ et les solutions entropiques u et v de (4.1) avec des données initiales u_0 et v_0,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u-v|(x,t)\varphi(x,s)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_0-v_0|(x)\varphi(x,t+s)dx, \qquad \forall\ t,s \geq 0.$$

(ii) La fonction

$$\varphi_\sharp(x,t) := \liminf_{\substack{r\to 0^+ \\ y\to x}} \frac{1}{mes(B_r(y))} \int_{B_r(y)} \varphi(z,t)dz$$

est une sur solution de viscosité de (5.4).

Notons que $B_r(y) := \{z : |z-y| < r\}$.

Lemme 5.2.9. *[28].*

Supposons que (H2), $m < M$, ρ_ν et θ_ν sont définis dans (3.2) et (3.3), et que $0 \leq \varphi \in BLSC(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ satisfait (i) dans le Théorème 5.2.8. Alors pour tout $\nu > 0$, la convolution

$$\varphi_\nu := \varphi *_{x,t} (\rho_\nu \theta_\nu) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$$

satisfait également (i) dans le Théorème 5.2.8.

Démonstration.

Par hypothèse :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u-v|(x,t)\varphi(x,s)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_0-v_0|(x)\varphi(x,t+s)dx, \tag{5.16}$$

pour tout $t, s \geq 0, u_0$ et v_0 avec des valeurs dans $[m, M]$, et les solutions entropiques u et v de (4.1) avec u_0 et v_0 comme données initiales. Notre but est d'obtenir le même résultat pour φ_ν. Utilisons (5.16) non pas pour u_0 et v_0, mais pour leurs translations $u_0(.+y)$ et $v_0(.+y)$ pour un certains y fixe $\mathbb{R}^d$. Puisque la partie EDP de (4.1) est invariante par rapport à la translation, les solutions correspondantes sont $u(x+y,t)$ et $v(x+y,t)$. D'où,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u-v|(x+y,t)\varphi(x,s)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_0-v_0|(x+y)\varphi(x,t+s)dx$$

pour tout $t, s \geq 0$. En changeant de variable d'intégration, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u-v|(x,t)\varphi(x-y,s)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_0-v_0|(x)\varphi(x-y,t+s)dx.$$

Nous fixons maintenant $\tau \leq 0$ et appliquons cette formule, non pas pour s mais pour $s-\tau$. Nous en déduisons que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u-v|(x,t)\varphi(x-y,s-\tau)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_0-v_0|(x)\varphi(x-y,t+s-\tau)dx.$$

Multipliez alors par $\rho_\nu(y)\theta_\nu(\tau)$ et intégrons sur $(y,\tau) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^-$ on obtient

$$\int_y^\tau |u-v|(x,t)\varphi(x-y,s-\tau)\rho_\nu(y)\theta_\nu(\tau)dx \leq \int_y^\tau |u_0-v_0|(x)\varphi(x-y,t+s-\tau)\rho_\nu(y)\theta_\nu(\tau)dx$$

$$\Longrightarrow \int_y^\tau |u-v|(x,t)\varphi_\nu(x-y,s-\tau)dx \leq \int_y^\tau |u_0-v_0|(x)\varphi_\nu(x-y,t+s-\tau)dx$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u-v|(x,t)\varphi(x,s)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_0-v_0|(x)\varphi(x,t+s)dx.$$

□

Démonstration. du Théorème 5.2.8 [28].

Procédons en plusieurs étapes.

1. (ii)$\Longrightarrow$(i).
   Par (ii), $(\varphi_\sharp)_*$ est une sur-solution $BLSC$ de (5.4). En particulier, pour tout $s \geq 0$ fixé, la fonction
   $$(x,t) \longmapsto (\varphi_\sharp)_*(x,t+s)$$
   est également une sur-solution de (5.4). Par la Remarque 5.1.2(c),nous pouvons appliquer le Théorème 5.1.1 à cette sur-solution avec le poids initial $BLSC$ $(\varphi_\sharp)_*(.,s)$. Le résultat est que
   $$\int_{\mathbb{R}^d} |u-v|(x,t)(\varphi_\sharp)_*(x,s)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_0-v_0|(x)(\varphi_\sharp)_*(x,t+s)dx,$$
   pour tout $u_0 = u_0(x)$ et $v_0 = v_0(x)$ avec des valeurs dans $[m,M]$, u et v solutions entropiques de (4.1) avec u_0 et v_0 comme données initiales, et $t,s \geq 0$. C'est exactement (i) mais avec $(\varphi_\sharp)_*$ au lieu de φ. Pour remplacer $(\varphi_\sharp)_*$ par φ, nous utilisons le Lemme 5.2.7(i) pour la partie gauche. Pour la partie droite, nous utilisons que $(\varphi_\sharp)_* \leq \varphi_\sharp$ ponctuellement et le fait que $\varphi_\sharp(x,t+s) = \varphi(x,t+s)$ pour x i.a., voir le Lemme 5.2.3(ii). Ceci implique (i) avec φ, comme souhaité.
2. (i) $\Longrightarrow$(ii) pour des poids lisses φ.
   Prouvons l'implication inverse lorsque $0 \leq \varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$. Nous choisirons judicieusement u_0 et v_0 plus tard. Pour l'instant, nous supposons que
   $$m \leq v_0 \leq u_0 \leq M \quad \text{et} \quad u_0 - v_0 \in L^1(\mathbb{R}^d).$$
   Par les Lemmes 5.2.7 et 5.2.2, $0 \leq u-v \in C(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^d))$, et nous pouvons alors utiliser (i) pour obtenir
   $$\int_{\mathbb{R}^d} (u-v)(x,T)\varphi(x,s)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} (u_0-v_0)(x)\varphi(x,T+s)dx, \tag{5.17}$$
   pour tout $T,s \geq 0$. Fixons $s>0$ et déterminons l'EDP à laquelle φ satisfait. Pour ce faire, injectons la formulation faible de (4.1) dans (5.17) et passons à la limite comme $T \to 0^+$. Par le Lemme 5.2.1,
   $$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} (u-v)(x,T)\phi(x,T)dx = \int\int_{\mathbb{R}^d\times(0,T)} \Big(&(u-v)\partial_t\phi + \sum_{i=1}^d (F_i(u)-F_i(v))\partial_{x_i}\phi \\ &+ \sum_{i,j=1}^d (\mathcal{A}_{ij}(u)-\mathcal{A}_{ij}(v))\partial^2_{x_ix_j}\phi \Big) dxdt \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} (u_0-v_0)(x)\phi(x,0)dx,\end{aligned}$$
   pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,T))$ et $\mathcal{A}'_{ij} = \mathcal{A}_{ij}$. Notons que nous avons reécrit l'équation donnée par le Lemme 5.2.1 avec des intégrales en $t<T$ et un terme final supplémentaire à $t=T$. Ceci découle d'arguments standards utilisant la continuité L^1_{loc} dans le temps de u et v. Puisque $\varphi \in C_b^\infty$, $u-v \in C_t(L^1_x)$ et $u,v \in L^\infty$, une approximation standard l'argument montre que nous pouvons prendre ϕ comme étant
   $$\phi(x,t) = \varphi(x,t+s-T),$$

et obtenir que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}(u-v)(x,T)\varphi(x,s)dx = \int\int_{\mathbb{R}^d\times(0,T)}\Big((u-v)\partial_t\varphi(t+s-T)\\ +\sum_{i=1}^{d}(F_i(u)-F_i(v))\partial_{x_i}\varphi(t+s-T)\\ +\sum_{i,j=1}^{d}(\mathcal{A}_{ij}(u)-\mathcal{A}_{ij}(v))\partial^2_{x_ix_j}\varphi(t+s-T)\Big)dxdt\\ +\int_{\mathbb{R}^d}(u_0-v_0)(x)\varphi(x,s-T)dx.\end{aligned} \tag{5.18}$$

Nous supposons ici que $s>0$ et que T est si petit que $s-T>0$. En insérant (5.18) dans (5.17), on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}(u_0-v_0)(x)\varphi(x,T+s)dx-\int_{\mathbb{R}^d}(u_0-v_0)(x)\varphi(x,s-T)dx\\ \geq\int\int_{\mathbb{R}^d\times(0,T)}\Big((u-v)\partial_t\varphi(t+s-T)\\ +\sum_{i=1}^{d}(F_i(u)-F_i(v))\partial_{x_i}\varphi(t+s-T)\\ +\sum_{i,j=1}^{d}(\mathcal{A}_{ij}(u)-\mathcal{A}_{ij}(v))\partial^2_{x_ix_j}\varphi(t+s-T)\Big)dxdt.\end{aligned}$$

Nous aimerions maintenant diviser par $2T$ et passer à la limite lorsque $T\to 0^+$. Tous les calculs sont justifiés, toujours parce que $\varphi\in C_b^\infty$, les solutions u et v sont bornées et $u-v\in C_t(L^1_x)$. On obtient que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}(u_0(x)-v_0(x))\partial_s\varphi(x,s)dx\geq\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\Big((u_0-v_0)\partial_s\varphi(s)\\ +\sum_{i=1}^{d}(F_i(u_0)-F_i(v_0))\partial_{x_i}\varphi(s)\\ +\sum_{i,j=1}^{d}(\mathcal{A}_{ij}(u_0)-\mathcal{A}_{ij}(v_0))\partial^2_{x_ix_j}\varphi(s)\Big)dx.\end{aligned}$$

La soustraction du terme $\int(u_0-v_0)\partial_s\varphi(s)dx/2$ du coté droit implique que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d}(u_0(x)-v_0(x))\partial_s\varphi(x,s)dx\\ &\geq\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\sum_{i=1}^{d}(F_i(u_0)-F_i(v_0))\partial_{x_i}\varphi(s)+\sum_{i,j=1}^{d}(\mathcal{A}_{ij}(u_0)-\mathcal{A}_{ij}(v_0))\partial^2_{x_ix_j}\varphi(s)\Big)dx\\ &=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{v_0(x)}^{u_0(x)}\{F'(\xi).D\varphi(x,s)+tr(A_{ij}(\xi)D^2\varphi(x,s))\}d\xi dx,\end{aligned} \tag{5.19}$$

pour tout $s > 0$ et $0 \leq u_0 - v_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tel que u_0 et v_0 prennent leurs valeurs dans l'intervalle $[m, M]$. Il reste à choisir $u_0 - v_0$ comme unité approximative, jusqu'à une certaine constante multiplicative.
Introduisons de nouveaux paramètres : $x_0 \in \mathbb{R}^d, \varepsilon > 0$ et $m \leq a \leq b \leq M$. Nous aimerons choisir

$$u_0 - v_0 = (b-a)\mathbb{1}_{x_0+(-\varepsilon,\varepsilon)^d},$$

avec la contrainte que u_0 et v_0 ne prennent que les deux valeurs a et b. Écrire $x = (x_i)$, prendre par exemple

$$u_0(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad x_1 > (x_0)_1 + \varepsilon \\ b & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$v_0(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad x_1 > (x_0)_1 + \varepsilon \quad \text{ou} \quad x \in x_0 + (-\varepsilon,\varepsilon)^d \\ b & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $m \leq v_0 \leq u_0 \leq M$ et $u_0 - v_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ comme requis. En insérant notre choix dans (5.19) et en divisant par $(b-a)\varepsilon^d$, on en déduit que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon^d} \int_{x_0+(-\varepsilon,\varepsilon)^d} \partial_s \varphi(x,s) dx \\ &\geq \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{x_0+(-\varepsilon,\varepsilon)^d} \frac{1}{b-a} \int_a^b \{F'(\xi).D\varphi(x,s) + tr(A_{ij}(\xi) D^2\varphi(x,s))\} d\xi dx. \end{aligned}$$

Soit maintenant $\xi \in [m, M]$ tout point de Lebesgue de n'importe quel représentante arbitrairement choisi de (F', A). Prenons d'abord la limite en $a, b \to \xi$ telle que ξ est le centre de chaque $[a, b]$ afin d'utiliser la propriété du point de Lebesgue ; prenons ensuite la limite en $\varepsilon \to 0^-$. Cela nous donne que

$$\partial_s \varphi(x_0, s) \geq F'(\xi).D\varphi(x_0, s) + tr(A_{ij}(\xi) D^2\varphi(x_0, s)),$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $s > 0$, et point de Lebesgue ξ. C'est-à-dire que φ est une sur-solution de (5.4). Ceci compléte la preuve de l'implication restante dans le cas où φ est C_b^∞(et donc $\varphi_\sharp = \varphi$).

3. (i) $\Longrightarrow$(ii) pour des poids BLSC φ non négatifs.
Dans ce cas, nous utilisons la procédure de régularisation du Lemme 5.2.9. Par ce lemme

$$\varphi_\nu = \varphi *_{x,t} (\rho_\nu \theta_\nu)$$

satisfait (i) puisque φ le fait par hypothèse. Par l'étape précédente, nous déduisons que φ_ν est une sur-solution de (5.4). D'où

$$\varphi_\flat = \liminf_* \varphi_\nu$$

est aussi une sur-solution par la stabilité (cf. Proposition 3.4.2). Mais pour prouver (ii), nous devons montrer que $\varphi_\sharp$ est une sur-solution. Nous le ferons en montrant que $\varphi_\flat = (\varphi_\sharp)_*$ ponctuellement (au moins pour des temps positifs). Nous avons

déjà $(\varphi_\sharp)_* \leq \varphi_\flat$ par le Lemme 5.2.6. Pour prouver que $\varphi_\flat \leq (\varphi_\sharp)_*$, il faut utiliser (i). Par (i),

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u-v|(x,t)\varphi(x,s)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_0-v_0|(x)\varphi(x,t+s)dx,$$

pour tout u_0 et v_0 dans $L^\infty(\mathbb{R}^d,[m,M])$ et les solutions u et v correspondantes de (4.1) et $t,s \geq 0$. Par le Lemme 5.2.3(i), on a aussi que $\varphi_\flat = \varphi$. En particulier, il existe un ensemble nul $N \subset \mathbb{R}^+$ tel que $\varphi(.,s) = \varphi_\flat(.,s)$ i.a., pour tout $s \notin N$.[1] On fixe $T>0$, il existe donc une suite $s_n \to T^-$ telle que $s_n \notin N$, pour tout n. En choisissant de plus $t_n := T - s_n$, on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u-v|(x,t_n)\varphi_\flat(x,s_n)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_0-v_0|(x)\varphi(x,T)dx.$$

Passons à la limite lorsque $n \to \infty$ dans la partie gauche. Pour cela, nous utilisons le lemme de Fatou, ce qui est possible du fait de la semi-continuité inférieure de $\varphi_\flat$ et la continuité des solutions entropiques à valeurs dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, ce qui implique que

$$|u-v|(x,t_n) \to |u_0-v_0|(x) \quad \text{pour} \quad i.a \quad x$$

(le long d'une sous-séquence). Dans la limite, il s'ensuit que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u_0-v_0|(x)\varphi_\flat(x,T)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_0-v_0|(x)\varphi(x,T)dx,$$

pour tout u_0 et v_0 dans $L^\infty(\mathbb{R}^d,[m,M])$ et $T>0$. Pour continuer, nous argumentons comme dans l'étape précédente où nous avons chosi $0 \leq u_0 - v_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour être une unité approximative jusqu'à une constante multiplicative. Les mêmes arguments impliquent que pour tout $T>0$,

$$\varphi_\flat(.,T) \leq \varphi(.,T) \quad i.a.$$

Par le Lemme 5.2.3(ii), on conclut que $\varphi_\flat \leq \varphi_\sharp$ ponctuellement (pour des temps positifs). Ceci implique que $(\varphi_\sharp)_* = \varphi_\flat$ est une sur-solution de (5.4). La preuve du Théorème 5.2.8 est complète.

□

Remarque 5.2.10. [28].

La fonction $\varphi_\sharp$ satisfait (i) si et seulement si φ le fait puisqu'elle est une représentante équivalente dans l'espace de φ.

Nous déduirons donc en grosso modo du principe de comparaison que notre poids est optimal dans la classe des poids

$\mathcal{W}_{m,M,\varphi_0} := \{0 \leq \varphi \in \ BLSC(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ satisfaisant (i) et $\varphi(t=0) \geq \varphi_0\}$.

Nous avons maintenant établi tous les résultats préliminaires et sommes prêts à prouver une des résultats de dualité qui est le corollaire suivant.

Corollaire 5.2.11. *(Optimalité du poids) [28].*

Supposons (H2), $m<M$, et $0 \leq \varphi_0 \in \ BLSC(\mathbb{R}^d)$. Alors le poids $\underline{\varphi}$ du Théorème 5.1.1 appartient à la classe $\mathcal{W}_{m,M,\varphi_0}$ et satisfait

$$(\underline{\varphi})_\sharp(x,t) = \inf\{\varphi_\sharp(x,t) : \varphi \in \mathcal{W}_{m,M,\varphi_0}\} \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+.$$

1. Pour trouver N, utilisez $\int\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mathbb{1}_{\{\varphi_\flat = \varphi\}} dxds = 0 = \int_{\mathbb{R}^+} meas\{\varphi(.,s) = \varphi_\flat(.,s)\}ds$ par Fubini.

Démonstration. [28].

Nous savons déjà que $\underline{\varphi} \in \mathcal{W}_{m,M,\varphi_0}$ par le Théorème 5.1.1. Prouvons la formule avec l'inf. Prenons $\varphi \in \mathcal{W}_{m,M,\varphi_0}$, ce qui signifie que $\varphi \in BLSC$ et satisfait le Théorème 5.2.8 (i) avec $\varphi(t=0) \geq \varphi_0$. Par ce Théorème, φ satisfait aussi (ii), c'est-à-dire que $\varphi_\sharp$ est une sur-solution de (5.4). Rappelons que $\varphi \leq (\varphi_\sharp)_*$ ponctuellemnt par le Lemme 5.2.7. En particulier

$$(\varphi_\sharp)_*(t=0) \geq \varphi(t=0) \geq \varphi_0.$$

Ainsi $\varphi_\sharp$ est une sur-solution du problème de Cauchy (5.4), et $\underline{\varphi} \leq \varphi_\sharp$ par la Proposition 3.4.8. Alors le Lemme 5.2.7(ii) implique que $(\underline{\varphi})_\sharp \leq \varphi_\sharp$, et nous concluons que

$$(\underline{\varphi})_\sharp(x,t) = \inf\{\varphi_\sharp(x,t) : \varphi \in \mathcal{W}_{m,M,\varphi_0}\} \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$$

(avec une égalité car $\underline{\varphi} \in \mathcal{W}_{m,M,\varphi_0}$). La preuve est complète. □

Remarque 5.2.12. [28].

1. La propriété (i) est plus forte que (5.7) puisqu'elle est valable pour tout $s \geq 0$. Cela peut être interprété comme une propriété du semi-groupe.
2. La propriété (i) est satisfaite par la plupart des poids de la littérature, comme par exemple pour

$$\varphi \equiv 1, \qquad \varphi(x,t) = \mathbb{1}_{|x-x_0|<R+Ct} \qquad \text{et} \quad \varphi(x,t) = e^{Ct}e^{-\sqrt{1+|x|^2}},$$

dans respectivement (5.1),(5.2),(5.3) ; voir aussi les résultats de stabilité de [42].

5.3 Formulation en semi-groupes et une nouvelle forme de dualité

Dans cette section notons que $C_b \cap L^\infty_{int}$ comme cadre naturel L^1 pour (3.1). Nous expliquons d'abord pourquoi le cadre pur L^1 est trop faible pour développer une théorie général du bien posé de (3.1).

Considèrons une solution de l'équation de type eikonal [2]

$$\partial_t \varphi = \sum_{i=1}^{d} |\partial_{x_i} \varphi| \tag{5.20}$$

avec une donnée initiale $\varphi_0 \in C_b(\mathbb{R}^d)$.
Sous quelle condition est-elle intégrable ?

Proposition 5.3.1. *(Necéssité et condition suffisante d'intégralité) [28].*
Nous avons

$$[\varphi(.,t) \in L^1(\mathbb{R}^d) \qquad \forall t \geq 0] \Longleftrightarrow [\varphi_0^- \in L^1(\mathbb{R}^d) \quad et \quad \varphi_0^+ \in L^\infty_{int}(\mathbb{R}^d)].$$

Démonstration. [28]

Puisque $\varphi(x,t) = \sup_{\overline{Q}_t(x)} \varphi_0$ par la Proposition 3.4.10 et grâce au Lemme 4.1.2 on conclut cette équivalence.

□

2. L'équation (5.20) est de la forme (4.1) avec $\varepsilon = \bar{Q}_1(0)$, $b(\xi) = \xi$, et $a \equiv 0$.

Nous continuons en montrant que la topologie L^1 est trop faible pour obtenir une dépendance continue aux données initiales, même pour les solutions qui restent intégrables.

Proposition 5.3.2. *(Échec de la dépendance continue L^1) [28].*
Pour tout $n \geq 1$, soit $\varphi_0^n(x) := (1 - n|x|)^+$, et φ^n est la solution de (5.20) avec les données initiales φ_0^n. Alors $\varphi_0^n \in C_b \cap L^\infty_{int}(\mathbb{R}^d)$ et

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_0^n = 0 \qquad \text{dans} \quad L^1(\mathbb{R}^d),$$

mais

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(.,t) = \mathbb{1}_{\overline{Q}_t}(.) \neq 0 \qquad \text{dans} \quad L^1(\mathbb{R}^d), \quad \forall t > 0.$$

Il est intéressant de noter qu'une analyse similaire fonctionne également pour les équations H.J.B purement diffusives. Considérons par exemple, une équation dans une dimension spatiale [3]

$$\partial_t \varphi = (\partial^2_{xx} \varphi)^+. \tag{5.21}$$

Pour avoir L^1 solution, il faut à nouveau que $\varphi_0^+ \in L^\infty_{int}$.

Dans ce qui suit, nous allons rappeler la nécessité de l'utilisation de L^∞_{int} pour (3.1), au lieu de L^1. Nous avons besoin d'un résultat sur le profil $U(r) = c_0 \int_r^\infty e^{-\frac{s^2}{4}} ds$ avec c_0 tel que $U(0) = 1$.

Lemme 5.3.3.
Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, soit

$$\psi(x,t) := \begin{cases} U(|x|/\sqrt{t}) & \text{si} \quad t > 0, \\ \mathbb{1}_{\{0\}}(x) & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$$

Alors $\psi \in BUSC(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ est une sur-solution de (5.21).

Démonstration. [28].
Prouvons que ψ est une sous-solution de (5.21). Dans le domaine $\{x \neq 0, t > 0\}$, nous trouvons comme dans la preuve du Lemme 5.3.11 que

$$\partial_t \psi = \partial^2_{xx} \psi = (\partial^2_{xx} \psi)^+$$

au sens classique du terme. Si maintenant $x = 0$, nous avons

$$\partial_t \psi(0,.) = 0 \leq (\partial^2_{xx} \psi(0,.))^+$$

puisque $\psi(0,.)$ est constant dans le temps. Montrons maintenant que ψ est $BUSC$. Elle est clairement continue pour t positif et il ne reste plus qu'à prouver que

$$\mathbb{1}_{x=0} \geq \lim \sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \ni (y,t) \to (x,0)} U\left(|y|/\sqrt{t}\right),$$

3. Léquation (5.21) est de la forme (4.1) avec $\varepsilon = [0,1]$, $b \equiv 0$, et $a(\xi) = \xi$.

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, le résultat s'ensuit puisque $U(r) \leq U(0) = 1$ pour tout $r \geq 0$. Si $x \neq 0$, alors on utilise que

$$|y|/\sqrt{t} \to \infty \qquad \text{comme} \quad (y,t) \to (x,0^+)$$

ainsi que le fait que $\lim_{r\to\infty} U(r) = 0$. La preuve du lemme est complète.

□

Proposition 5.3.4. *(L^∞_{int} et diffusions non-linèaires)[28].*

Soit $\varphi_0 \in C_b(\mathbb{R})$ qui est non négative et φ est la solution de (5.21) avec comme donnée initial φ_0. Alors

$$[\varphi(.,t) \in L^1(\mathbb{R}) \qquad \forall t \geq 0] \Longleftrightarrow \varphi_0 \in L^\infty_{int}(\mathbb{R}).$$

Démonstration. [28]

Le Théorème 5.3.16 implique la partie "si". Prouvons la partie "seulement si". Elle est basée sur la borne inférieure ponctuelle suivante :

$$\varphi(x,t) \geq U\left(1/\sqrt{t}\right) \sup_{x+[-1,1]} \varphi_0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}, t > 0, \tag{5.22}$$

où U est le profil du lemme précédent, $0 \leq \varphi_0 \in C_b(\mathbb{R})$ et φ est la solution de (5.21) avec φ_0 comme donnée initiale. Prouvons (5.22). Fixons x et t. Le sup du côté droit est atteint pour un certain $x_0 \in x + [-1,1]$. Par le lemme précédent,

$$(y,s) \longmapsto \varphi_0(x_0) U(|y - x_0|/\sqrt{s})$$

est une sous-solution $BUSC$ de (5.21). À $s = 0$, elle est égale à la fonction

$$y \longmapsto \varphi_0(x_0) \mathbb{1}_{\{x_0\}}(y)$$

qui est inférieure ou égale à $\varphi_0 = \varphi_0(y)$. Par le principe de comparaison (Théorème 3.3.1),

$$\varphi(y,s) \geq \varphi_0(x_0) U(|y - x_0|/\sqrt{s}) \qquad \forall y \in \mathbb{R}, \forall s > 0.$$

En prenant $(y,s) = (x,t)$, on obtient alors que

$$\varphi(x,t) \geq \underbrace{\varphi_0(x_0)}_{=\sup_{x+[-1,1]} \varphi_0} \underbrace{U\left(|x - x_0|/\sqrt{t}\right)}_{\geq U(1/\sqrt{t})}.$$

Ceci complète la preuve de (5.22). À partir de cette borne, la partie "seulement si" de la Proposition 5.3.4 est évidente puisque $U(1/\sqrt{t})$ est positif pour $t > 0$.

□

Nous utilisons maintenant l'absence de solution fondamentale de (5.21) pour montrer qu'il n'y a pas de dépendance continue aux données initiales dans L^1. Considérons les solutions φ_n de (5.21) avec une fonction delta approximative comme données initiales :

$$\varphi_n(x, t = 0) = n\rho(nx), \tag{5.23}$$

où $0 \leq \rho \in C_c(\mathbb{R})$ est non trivial. Dans ce cas nous avons la proposition suivante :

Proposition 5.3.5. *(Effondrement ou explosion partout)[28].*

Pour tout $n \geq 0$ et φ_n la solution de viscosité de (5.21) avec une fonction delta approximative comme données initiales :

$$\varphi_n(x, t = 0) = n\rho(nx), \tag{5.24}$$

où $0 \leq \rho \in C_c(\mathbb{R})$ est non trivial. Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x, t) = \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

Démonstration. [28].

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $c > 0$ tel que

$$\rho \geq c\mathbb{1}_{\{x_0\}},$$

où ρ est définie dans (5.23), et définie par

$$\psi_n(x, t) := nc\psi(nx - x_0, n^2 t),$$

où ψ est donné par le Lemme 5.3.3. Il est facile de voir que ψ_n reste une sous-solution de (5.21). De plus, il est $BUSC$ avec

$$\varphi_n(x, 0) \geq \psi_n(x, 0) \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

par (5.23). Donc $\varphi_n \geq \psi_n(x, 0)$ par le principe de comparaison et il suffit de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x, t) = \infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0.$$

Mais c'est assez facile car

$$\psi_n(x, t) = ncU\left(\left|x - \frac{x_0}{n}\right| / \sqrt{t}\right),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, et la constante c et le profil $U(.)$ sont tous deux positifs. La preuve est complète. □

Remarque 5.3.6. [28]

Pour les équations de diffusions linéaires, φ_n convergerait à la solution fondamentale, mais ici elle explose ponctuellement et pour tout L^p_{loc}. Un contre-exemple de la dépendance continue L^1 pour (5.21) est alors donné par le contre-exemple séquence de solutions

$$\psi_n(x, t) := \varphi_n(x, t) / \sqrt{||\varphi_n(., t_0)||_{L^1}} \qquad \text{pour un } t > 0 \text{ fixé},$$

puisque $||\psi_n(t = 0)||_{L^1} \to 0$ tandis que $||\psi_n(., t)||_{L^1} \geq ||\psi_n(., t_0)||_{L^1} \to \infty$ pour tout $t \geq t_0$.

Au vu des résultats précédents, nous cherchons maintenant un espace de Banach $X \subset L^1$ qui soit suffisamment fort pour obtenir la bientraitance pour (3.1) en général. Nous sommes principalement intéréssés par la définition correcte d'un sem-groupe associé.

Un lemme qui sera utile pour la preuve du Théorème 5.3.8.

Lemme 5.3.7. *[28]*

Pour tout $\varphi_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\sup|\varphi_0| \leq |\sup \varphi_0| + |\inf \varphi_0|$.

Définition 5.3.1. *[28].*
Soit E un espace normé.

(a) Une famille de cartes $G_t : E \to E$ paramétrée par $t \geq 0$ est un semi-groupe sur E si

$$\begin{cases} G_{t=0} = id \ \ (l'identité), \ \ et \\ G_{t+s} = G_t G_s \ \ (c'est\text{-}à\text{-}dire \ la \ composition) \ \ pour \ tout \ \ t, s \geq 0. \end{cases}$$

(b) Il s'agit d'un semi-groupe d'opérateurs continus si, en outre, $G_t : E \to E$ est continu pour chaque $t \geq 0$.

(c) Et elle est fortement continue si pour chaque $\varphi_0 \in E$, $t \geq 0 \longmapsto G_t\varphi_0 \in E$ est fortement continue (c'est-à-dire continue dans la norme).

Soit φ l'unique solution de viscosité de (3.1) et définisons

$$G_t : \varphi_0 \in C_b(\mathbb{R}^d) \longmapsto \varphi(., t) \in C_b(\mathbb{R}^d). \tag{5.25}$$

Alors G_t est un semi-groupe d'opérateurs continus Lipschitz par la Remarque 3.3.3. Une construction naturelle consiste à définir X comme la compléton d'un certain $E \subseteq C_b \cap L^1$, tel que $X \subset L^1$ et G_t peuvent être étendus de E à X. Plus précisément , nous exigeons que

$$\begin{cases} E \ \ \text{est un sous-espace vectoriel de} \ \ C_b \cap L^1(\mathbb{R}^d), \\ E \ \ \text{est un espace normé}, \\ E \ \ \text{est continuellement intégré dans} \ \ L^1(\mathbb{R}^d), \end{cases} \tag{5.26}$$

et pour toute donnée (ε, b, a) satisfaisant (H1), le semi-groupe (5.25) satisfait :

$$\forall t \geq 0, \begin{cases} G_t(E) \subseteq X := \overline{E}^{||.||_E}, \ G_t : E \to E \ \ \text{est continue, et} \\ G_t \ \ \text{admet une extension sur } x \text{ en tant qu'opérateur continu.} \end{cases} \tag{5.27}$$

Le meilleur E est donné ci-dessous.

Théorème 5.3.8. *(Un cadre naturel L^1 pour (3.1)) [28].*
L'espace $C_b \cap L^\infty_{int}(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Banach satisfaisant les propriétés (5.26)-(5.27). De plus, tout autre espace E satisfaisant (5.26)-(5.27) est continuellemnt intégrée dans $C_b \cap L^\infty_{int}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. [28]
Le fait que $E = C_b \cap L^\infty_{int}(\mathbb{R}^d)$ satisfasse (5.26)-(5.27) découle du Théorème 4.1.1 et du Corollaire 5.3.17. Prenons maintenant E comme un autre espace normé satisfaisant de telles propriétés et prouvons qu'il est continûment intégré dans $C_b \cap L^\infty_{int}(\mathbb{R}^d)$. Rappelons que (5.27) est requis pour toute donnée $b = b(\xi)$ et $a = a(\xi)$ satisfaisant (H1). Choisissons par exemple l'équation d'eikonal

$$\partial_t\varphi = \sum_{i=1}^{d} |\partial_{x_i}\varphi|$$

et désignons par G_t^e son semi-groupe. Par la Proposition de représentation 3.4.10,

$$G_t^e\varphi_0(x) = \sup_{x+t[-1,1]^d} \varphi_0.$$

Puisque $G_{t=1}^e$ cartes $E \subseteq C_b \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ en $X = \overline{E}^{||.||_E} \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ par hypothèse, la fonction

$$x \longmapsto \sup_{x+[-1,1]^d} \varphi_0$$

appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\varphi_0 \in E$. En utilisant que E est un espace vectoriel, $-\varphi_0 \in E$, et la fonction

$$x \longmapsto \inf_{x+[-1,1]^d} \varphi_0$$

appatient également à $L^1(\mathbb{R}^d)$. Par Lemme 5.3.7, nous concluons que $E \subseteq C_b \cap L^\infty_{int}(\mathbb{R}^d)$. Enfin, nous utilisons le fait que $G_{t=1}^e : E \to X$ est continue sur $\varphi_0 \equiv 0$ pour obtenir que pour tout $||\varphi_0^n||_E \to 0$, comme $n \to \infty$, nous avons $G_{t=1}^e\varphi_0^n \to 0$ dans X. En combinant cela avec la continuité de l'inclusion $X \subset L^1(\mathbb{R}^d)$, on obtient que

$$\left\| \sup_{x+[-1,1]^d} \varphi_0^n \right\|_{L^1_x} \to 0.$$

En utilisant à nouveau le fait que E est un espace normé, il en va de même avec $-\varphi_0$, c'est-à-dire

$$\left\| \inf_{x+[-1,1]^d} \varphi_0^n \right\|_{L^1_x} \to 0.$$

Par le Lemme 5.3.7, nous concluons que $\|\varphi_0^n\|_{int} \to 0$, ce qui complète la preuve.

□

Remarque 5.3.9. [28]

Puisque le meilleur $E = X$ est un espace de Banach par le Théorème 4.1.1, il n'est a posteriori pas nécessaire d'étendre G_t à l'extérieur de C_b. La notion classique de solutions de viscosité est alors déjà satisfaite pour étudier L^1 les solutions d'EDPs dégénérées totalement non linéaires.

Montrons maintenant que (3.1) est bien posé dans L^∞_{int} comme indiqué dans le Corollaire 5.3.17. Nous devons d'abord prouver la stabilité générale de L^∞_{int} (Théorème 5.3.16) pour lequel nous utiliserons les lemmes ci-dessous.

Lemme 5.3.10.
Supposons (H1), et que φ et ψ sont des sous et sur-solutions de (3.1).

Alors $(\varphi^* - \psi_*)^+$ reste une sous-solution.

Démonstration.

Soit $H_\xi(\varphi) := b(\xi).D\varphi + tr(a(\xi)D^2\varphi)$ et notons que

$$\partial_t(\varphi - \psi) \leq \sup_{\xi\in\varepsilon} H_\xi(\varphi) - \sup_{\xi\in\varepsilon} H_\xi(\psi) \leq \sup_{\xi\in\varepsilon}(H_\xi(\varphi) - H_\xi(\psi)).$$

Par stabilité, $(\varphi^* - \psi_*)^+ = \max\{\varphi^* - \psi_*, 0\}$ est donc une sous-solution. □

Lemme 5.3.11. *[28]*
Soit $L_b \geq 0$ et $L_a > 0$. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$, définir

$$\Psi(x,t) := \begin{cases} U\left((|x| - 1 - L_b t)^+ / \sqrt{L_a t}\right) & si \quad t > 0, \\ \mathbb{1}_{|x|<1} & si \quad t = 0. \end{cases} \tag{5.28}$$

Donc au sens de la viscosité,

$$\partial_t \Psi \geq L_b |D\Psi| + L_a \sup_{\lambda \in Sp(D^2\Psi)} \lambda^+ \qquad dans \quad \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$$

(il s'agit en fait d'une égalité). De plus $\Psi \in C_b(\mathbb{R}^d \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^d))$ où cette dernière continuité temporelle est valable jusqu'à $t = 0$.

Remarque 5.3.12. [28]
En gros, nous utiliserons Ψ comme solution fondamentale pour construire L^1 sur-solutions de (3.1), mais nous pouvons pas la prendre comme masse de Dirac à $t = 0$ à cause de la Proposition 5.3.5.

Démonstration. [28]
L'EDP désirée tient si $|x| < 1 + L_b t$ puisque Ψ est constante dans cette région. Elle est également satisfaite si $|x| = 1 + L_b t$ car les sous-ensembles sont vides.
Maintenant, si $|x| > 1 + L_b t$, alors

$$\partial_t \Psi = -L_a \frac{|x| - 1 - L_b t}{2(L_a t)^{\frac{3}{2}}} U' - \frac{L_b}{\sqrt{L_a t}} U', \qquad D\Psi = \frac{x}{|x|} \frac{U'}{\sqrt{L_a t}},$$

et

$$\partial^2_{x_i x_j} \Psi = \left(\frac{\delta_{ij}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3}\right) \frac{U'}{\sqrt{L_a t}} + \frac{x_i x_j}{|x|^2} \frac{U''}{L_a t}.$$

Puisque $U' \leq 0$ et $U'' \geq 0$, nous avons $\sum_{i,j=1}^d \partial^2_{x_i x_j} \Psi h_i h_j \leq \dfrac{U''}{L_a t}$ pour tout $h = (h_i)$ avec $|h| = 1$. Par conséquent, $\sup_{\lambda \in Sp(D^2\Psi)} \lambda^+ \leq \dfrac{U''}{L_a t}$ et

$$\partial_t \Psi - L_b |D\Psi| - L_a \sup_{\lambda \in Sp(D^2\Psi)} \lambda^+ \geq -\frac{r U'(r)/2 + U''(r)}{t}$$

avec $r = (|x| - 1 - L_b t)/\sqrt{L_a t}$. Le coté droit est nul par définition de U, et nous obtenons l'équation désirée pour les temps positifs. Vérifions maintenant que $\Psi \in C_b(\mathbb{R}^d \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^d))$ ne présente pas de difficulté particulière et est laissée au lecteur. La preuve est complète.

□

Poursuivons avec les procédures de régularité. Habituellement, nous considérons les inf et supconvolution, mais pour les hamiltoniens convexes, nous pouvons utiliser la convolution classique pour les sur-solutions, voir [10, 11].

Lemme 5.3.13. *[28]*
Supposons que (H1), $\varphi \in BLSC(\mathbb{R}^d \times (0,\infty))$ est une sur-solution de (3.1), et $0 \leq f \in L^1(\mathbb{R}^d \times (-\infty, 0))$. Alors $\varphi *_{x,t} f$ est une sur-solution de (3.1).

Ici et partout, nous étendons les fonctions par zéro à tout $t \in \mathbb{R}$ pour donner un sens aux convolutions dans le temps. Vous trouverez ci-dessous une autre version qui sera nécessaire.

Lemme 5.3.14. *[28]*
Supposons que (H1), $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d \times (0,\infty))$ est une sur-solution de (3.1), et $0 \leq g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $\varphi *_x g$ reste une sur-solution.

Ce dernier lemme n'est pas prouvé dans [10, 11], mais peut être obtenu par une procédure d'approximation standard. Donnons-le par souci d'exhaustivité. Tout au long de ce document, ρ_ν est une unité approximative de l'espace comme $\nu \to 0^+$ de la forme (3.2). De plus, θ_ν est une unité de temps approximative de la forme (3.3).

Démonstration. du Lemme 5.3.14 [28]
Par le Lemme 5.3.13, $\varphi_\nu := \varphi *_x g *_x \rho_\nu *_t \theta_\nu$ est une sur-solution de (3.1). Il reste à passer à la limite lorsque $\nu \to 0^+$. Nous montrerons que la convergence est localement uniforme vers $\varphi *_x g$, ce qui sera suffisant par stabilité de l'équation. Nous n'avons besoin d'une convergence locale uniforme que pour $t > 0$ car la conclusion ne concerne que l'EDP. Avec la régularité supposée sur φ,

$$\lim_{\nu \to 0^+} \varphi *_x \rho_\nu *_t \theta_\nu = \varphi \qquad \text{localement de manière uniforme,}$$

et $||\varphi *_x \rho_\nu *_t \theta_\nu|varphi||_\infty \leq ||\varphi||_\infty$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}^d, t > 0$ et $R \geq 0$,

$$\begin{aligned} |\varphi_\nu - \varphi *_x g|(x,t) &\leq |\varphi *_x \rho_\nu *_t \theta_\nu - \varphi| *_x g(x,t) \\ &\leq \Big(|\varphi *_x \rho_\nu *_t \theta_\nu - \varphi|(x-y,t) \Big) \int_{|y| \leq R} g(y)dy \\ &+ 2||\varphi||_\infty. \end{aligned}$$

Il suffit de conclure que $\lim_{R\to\infty} \int_{|y|>R} g(y)dy = 0$. □

Théorème 5.3.15. *(Ky Fan, 1951) [22].*
Soient A une matrice symétrique réelle $n \times n$, et $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_d$ ses valeurs propres. De même, soient $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_d$ les éléments diagonaux de (ordonnés de manière décroissante). Alors pour tout $k = 1, 2, \cdots d$, on a l'inégalité suivante :

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{k} \mu_i$$

avec égalité si et seulement si A est diagonale.

Le Théorème 5.3.8 repose sur les estimations suivantes :

Théorème 5.3.16. *(Stabilité générale de L^∞_{int}) [28].*
Supposons que (H1) et $T \geq 0$. Pour toute sous-solution φ et sur-solution ψ bornées de (3.1),

$$\int \sup_{\overline{Q}_1(x)\times[0,T]} (\varphi^* - \psi_*)^+ dx \leq C \int \sup_{\overline{Q}_1(x)} (\varphi^* - \psi_*)^+(.,0)dx, \tag{5.29}$$

pour une certaine constante $C = C(d, ||a||_\infty, ||b||_\infty, T) \geq 0$.

Démonstration. [28]

Soit $L_b := ||b||_\infty$ et $L_a := ||tr(a)||_\infty$ et supposons $L_a > 0$. Nous utiliserons l'inégalité de Ky Fan suivante :

$$tr(XY) \leq \sum_{i=1}^{d} \lambda_i(X)\lambda_i(Y) \qquad \forall X, Y \text{ matrices symétriques } d \times d \text{ réelles}, \tag{5.30}$$

avec les valeurs propres ordonnées $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_d$. Cela implique que toute sous-solution de (3.1) est une sous-solution de l'équation

$$\partial_t \varphi = L_b |D\varphi| + L_a \sup_{\lambda \in Sp(D^2\varphi)} \lambda^+. \tag{5.31}$$

Considérons maintenant des sous et sur-solutions bornées arbitraires φ et ψ de (3.1). Par le Lemme 5.3.10, $(\varphi^* - \psi_*)^+$ est une sous solution de (3.1) et donc de (5.31). Pour prouver l'estimation (5.29), nous allons construire une sur-solution intégrable de (5.31). Nous la prendrons de la forme

$$\psi := \Psi *_x \sup_{\overline{Q}_1(.)} \phi_0,$$

où $\phi_0(x) := (\varphi^* - \psi_*)^+(x, t = 0)$ et Ψ est défini dans le Lemme 5.3.11. Utilisons le Lemme 5.3.14 pour montrer que ψ est une sur-solution de (5.31). Nous avons besoin que $\sup_{\overline{Q}_1(.)} \phi_0$ soit intégrable, ce qui peut être supposé sans perte de généralité puisque (5.29) trivialement si ce n'est pas le cas. Rappelons maintenant que $\Psi \in C_b(\mathbb{R}^d \times (0, \infty))$ est une sur-solution de (5.31), le Lemme 5.3.14 s'applique et ψ reste une sur-solution. Puisque de plus $\Psi \in C(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^d))$ et $\sup_{\overline{Q}_1(.)} \phi_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, cette sur-solution est continue jusqu'à $t = 0$ et satisfait

$$\psi(x, 0) = \int \mathbb{1}_{|x|<1} \sup_{\overline{Q}_1(x-y)} \underbrace{\phi_0}_{=(\varphi^* - \psi_*)^+(t=0)} dy \geq (\varphi^* - \psi_*)^+(x, 0).$$

Par conséquent, $(\varphi^* - \psi_*)^+ \leq \psi$ partout par le principe de comparaison, et

$$\int \sup_{\overline{Q}_1(x)\times[0,T]} (\varphi^* - \psi_*)^+ dx \leq \int \sup_{\overline{Q}_1(x)\times[0,T]} \psi dx \leq \int \sup_{t\in[0,T]} \Psi(y, t) dy \int \sup_{\overline{Q}_2(x)} \phi_0 dx,$$

par le théorème de Fubini, etc. La première intégrale satisfait

$$int \sup_{t\in[0,T]} \Psi(y, t) dy \leq \int U\left((|y| - 1 - L_b T)^+ / \sqrt{L_a T} \right) dy < \infty,$$

par (5.28) et puisque U est non décroissante et intégrable. Pour la deuxième intégrale, le Lemme 4.1.2 implique que

$$\int \sup_{\overline{Q}_2(x)} \phi_0 dx \leq C \int \sup_{\overline{Q}_1(x)} (\varphi^- \psi_*)^+(., 0) dx,$$

pour une constante C qui ne dépend que de d. La combinaisons des trois inégalités ci-dessus complète la preuve de(5.29) lorsque $L_a = ||tr(a)||_\infty > 0$. Si $L_a = 0$, il n'y a pas de partie diffusive dans (3.1), et (5.29) découle de la Proposition 3.4.10 et du Lemme 4.1.2. □

En conséquence, nous avons le résultat suivant :

Corollaire 5.3.17. *(L^∞_{int} bientraitance de (3.1)) [28].*
Supposons (H1) et que G_t est le semi-groupe solution défini en (5.25). Alors sa restriction à $C_b \cap L^\infty_{int}(\mathbb{R}^d)$ est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs Lipschitz continus.

Pour la preuve du Corollaire 5.3.17, nous avons besoin de lemme ci-dessous.

Lemme 5.3.18. *Suppososns (H1) et que φ et ψ sont des solutions continues de viscosité de (3.1). Alors $|\varphi - \psi|$ est une sous-solution de la même EDP.*

Démonstration. [28]
Utilisez que $|\varphi - \psi| = \max\{(\varphi - \psi)^+, (\psi - \varphi)^+\}$ et le Lemme 5.3.10. □

Démonstration. du Corollaire 5.3.17 [28].
Le fait que G_t cartographie $C_b \cap L^\infty_{int}(\mathbb{R}^d)$ en lui-même découle du Théorème 5.3.16. En effet, si $\varphi_0 \in C_b \cap L^\infty_{int}(\mathbb{R}^d)$, alors la fonction $(x,t) \longmapsto |G_t\varphi_0(x)|$ est une sous-solution bornée de (3.1), par le même Lemme 5.3.18 avec $\psi \equiv 0$. L'estimation (5.29) implique alors que pour tout $t \geq 0$,

$$||G_t\varphi_0||_{int} = \int \sup_{\overline{Q}_1(x)} |G_t\varphi_0| dx \leq \int \sup_{\overline{Q}_1(x)} |\varphi_0| dx,$$

pour une certaine constante $C = C(d, ||a||_\infty, ||b||_\infty, t)$. Prouvons maintenant que

$$G_t : C_b \cap L^\infty_{int}(\mathbb{R}^d) \to C_b \cap L^\infty_{int}(\mathbb{R}^d)$$

est continue Lipschitz pour tout $t \geq 0$. Appliquons à nouveau (5.29) à

$$(x,t) \longmapsto |G_t\varphi_0(x) - G_t\psi_0(x)|,$$

qui est une sous-solution de (3.1) par le Lemme 5.3.18. Comme ci-dessus nous obtenons que

$$||G_t\varphi_0 - G_t\psi_0||_{int} \leq \int \sup_{\overline{Q}_1(x)} |\varphi_0 - \psi_0| dx,$$

et en déduire la continuité désirée car C ne dépend pas des données initiales. Donc G_t est un semi-groupe d'opérateur continus Lipschitz sur $C_b \cap L^\infty_{int}(\mathbb{R}^d)$ et il reste à prouver la continuité temporelle. Fixons $t_0 \geq 0$ et montrons que

$$\int \sup_{\overline{Q}_1(x)} |G_t\varphi_0 - G_t\psi_0| dx \to 0 \qquad \text{comme} \quad t \to t_0.$$

La convergence ponctuelle découle de la continuité de $(x,t) \longmapsto G_t\varphi_0(x)($ en tant que solution de (3.1)), et une fonction dominante est donnée par

$$x \longmapsto \sup_{(y,s) \in \overline{Q}_1(x) \times [0, t_0+1]} 2|G_s\varphi_0(y)|$$

qui est intégrable par le Théorème 5.3.16.

□

Dans le contexte des semi-groupes, le résultat ci-dessus reflète une certaine forme de dualité. Pour chaque $t \geq 0$, laissez

$$S_t : u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \longmapsto u(.,t) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$$

où u est la solution entropique de (4.1), et laissez

$$G_t : \varphi_0 \in C_b \cap L^\infty_{int}(\mathbb{R}^d) \longmapsto \varphi(.,t) \in C_b \cap L^\infty_{int}(\mathbb{R}^d)$$

où φ est la solution de viscosité de (5.4). Notons que $G_t = G_t^{m,M}$ dépend des paramètres m et M par le bias de l'équation (5.4).

Corollaire 5.3.19. *(Une forme de dualité) [28].*

Supposons (H2), $m < M$, et considérons les semi-groupes S_t et G_t définis comme ci-dessus. Alors G_t est le plus petit semi-groupe fortement continu d'opérateurs continus sur $C_b \cap L^\infty_{int}(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant

$$\int_{\mathbb{R}^d} |S_t u_0 - S_t v_0| \varphi_0 dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_0 - v_0| G_t \varphi_0 dx, \tag{5.32}$$

pour tout u_0 et v_0 dans $L^\infty(\mathbb{R}^d, [m, M])$, $0 \leq \varphi_0 \in C_b \cap L^\infty_{int}(\mathbb{R}^d)$, et $t \geq 0$.

Démonstration. [28]

Fixons $m < M$. Par ce qui précède, le semi-groupe solution G_t de (5.4) est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs continus sur $C_b \cap L^\infty_{int}(\mathbb{R}^d)$ et satisfait (5.32). Soit maintenant H_t un autre semi-groupe arbitraire de ce type satisfait (5.32), tel que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |S_t u_0 - S_t v_0| \varphi_0 dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u_0 - v_0| H_t \varphi_0 dx,$$

pour tout u_0 et v_0 dans $L^\infty(\mathbb{R}^d, [m, M])$, $0 \leq \varphi_0 \in C_b \cap L^\infty_{int}(\mathbb{R}^d)$, et $t \geq 0$. Nous devons prouver que pour tout φ_0 et t,

$$G_t \varphi_0 \leq H_t \varphi_0.$$

Tout d'abord, la solution minimale de (5.4) est l'unique solution continue, c'est-à-dire

$$\underline{\varphi}(x,t) = G_t \varphi_0(x) \qquad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+.$$

En outre, l'hypothèse ci-dessus sur H_t implique que

$$H_t \varphi_0(x) \in \mathcal{W}_{m,M,\varphi_0}.$$

Par le Corollaire 5.2.11, nous déduisons que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $t \geq 0$,

$$(G_t \varphi_0)_\sharp(x) \leq (H_t \varphi_0)_\sharp(x),$$

où nous rappelons que

$$(G_t \varphi_0)_\sharp(x) = \liminf_{\substack{r \to 0^+ \\ y \to x}} \frac{1}{mes(B_r(y))} \int_{B_r(y)} G_t \varphi_0(z) dz$$

(et de même pour H). Puisque $G_t \varphi_0(x)$ et $H_t \varphi_0(x)$ sont tous deux continus en x, nous avons $(G_t \varphi_0)_\sharp = G_t \varphi_0$ et $(H_t \varphi_0)_\sharp = H_t \varphi_0$ ponctuellement et la preuve est complète. □

Remarque 5.3.20.

Ici "le plus petit" signifie que tout autre semi-groupe H_t satisfaisant les mêmes propriétés est tel que

$$G_t\varphi_0 \leq H_t\varphi_0 \qquad \forall\varphi_0 \geq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Remarque 5.3.21.

1. L'inégalité (5.32) peut être considérée comme une inégalité duale non linéaire entre S_t et G_t, et G_t comme un semi-groupe duale de S_t dont la restriction sur le cône $C_b \cap L^{\infty}_{int}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^+)$ est entièrement déterminée par S_t à travers (5.32).
2. La question de la dualité dans l'autre sens est ouverte. Formulons-là précisément. Considérons S_t et la famille entière $\{G_t^{m,M} : \ m < M\}$ définie simplement avant le Corollaire 5.3.19.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principaux résultats obtenus dans le cadre de l'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires. celle-ci nous a permis explicité la nouvelle forme de dualité recherchée.

Conclusion générale et Perspectives

Ce mémoire s'est penché sur l'étude des solutions faibles, en particulier les solutions entropiques dans L^∞ des problèmes paraboliques dégénérés et de viscosité dans L^1 pour les équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman, dans le cadre des équations aux dérivées partielles non linéaires. Inspirés par les travaux de Nathaël Alibaud, Jorgen Endal et Espen Robstad Jakobsen, nous avons principalement exploré la dualité non linéaire entre ces deux types de solutions, ainsi que leur rôle dans l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) et les équations paraboliques anisotropes dégénérées.

Les apports de ce mémoire sont multiples. En premier lieu, pour établir les principaux résultats nous avons présenté et analysé l'inégalité de contraction pondérée en norme, qui utilise les solutions de viscosité comme poids optimaux. Cette approche montre que les solutions entropiques bénéficient d'une stabilité optimale en réponse aux perturbations des données initiales, un résultat fondamental pour les lois de conservation et les problèmes de diffusion non linéaire. En particulier, les solutions de viscosité dans l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman ont été d'une grande importance puisqu'elles ont permis de mieux comprendre la structure des solutions de viscosité et entropiques dans un cadre unifié.

L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman occupe une place centrale dans la théorie du contrôle optimal et des processus stochastiques. Ce mémoire a démontré comment les solutions de viscosité de l'équation $H.J.B$, combinées avec les solutions entropiques, peuvent être utilisées pour établir des résultats de stabilité dans des contextes non linéaires, et ce, même en présence de phénomènes complexes comme la dégénérescence anisotrope. Les méthodes proposées ici s'appliquent également à des situations où la régularité des solutions classiques n'est pas garantie, renforçant ainsi leur utilité dans des applications pratiques. Dans un premier temps, nous avons brièvement rappelé quelques notions générales nécessaires pour atteindre notre objetif.
Dans la deuxième partie représentée par le chapitre 2, nous avons présenté quelques notions préliminaires nécessaires pour la compréhension et la rédaction du présent mémoire. Dans la troisième partie représentée par le chapitre 3, nous avons présenté l'existence et d'unicité de solution viscosité pour l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) par rapport aux limites relachées et aux données initiales limites. Dans la quatrième partie représentée par le chapitre 4, nous avons évoque l'existence, l'unicité de solution entropique pour les problèmes de convection diffusion.
Dans la dernière partie qui représente le chapitre 5, il a été question des principaux résultats, nous avons eu explicité la nouvelle forme de dualité recherchée.

Les résultats obtenus dans ce mémoire ouvrent la voie à plusieurs questions et direc-

tions de recherche pour mieux comprendre et exploiter les interactions entre les solutions entropiques et de viscosité dans des systèmes plus complexes :

Les résultats présentés se sont concentrés sur des équations scalaires. Cependant, dans de nombreux problèmes réels, les systèmes d'EDPs sont multi-dimensionnels. Comment les concepts de dualité non linéaire et de stabilité optimale se généralisent-ils aux systèmes d'EDPs vectoriels, notamment dans le cadre des équations de type Hamilton-Jacobi couplées avec des lois de conservation ?

Pour la suite des recherches, nous pouvons penser à l'étude de la dynamique asymptotique des solutions faibles, en particulier dans des problèmes à longue échéance, tels que les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (H.J.B.) dans des contextes où le comportement limite des solutions joue un rôle déterminant dans les décisions de contrôle optimal.

Bibliographie

[1] A. Bressan, Hyperbolic Systems of Conservation Laws : The One-Dimensional Cauchy Problem, Oxford University Press, 2000.

[2] A. C. Ponce. Elliptic PDEs, measures and capacities. EMS Tracts Math., 23, 2016.

[3] A. Pazy. : Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differentiel Equations, New York, NY :Pringer-verlag, 1983.

[4] A. Porretta. Decay rates of convergence for Fokker-Planck equations with confining drift. Adv. Math., 436 :109393, 2024.

[5] C. M. Theobald. An inequality for the trace of the product of two symmetric matrices. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 77 :265 ?267, 1975.

[6] D. Revuz, M. Yor, "Continuous martingales and Brownian motion", Springer Verlag, 1999.

[7] Dafermos, Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics, Springer, 2016.

[8] E. Carlini, N. Forcadel and R. Monneau. A generalized fast marching method for dislocation dynamics. SIAM J. Numer. Anal., 49(6) :2470-2500, 2011.

[9] G. Barles and B. Perthame. Exit time problems in optimal control and vanishing viscosity method. SIAM J. *Control Optim.,* 26(5) :1133-1148, 1988.

[10] G. Barles and E. R. Jakobsen. On the convergence rate of approximation schemes for Hamilton-Jacobi-Bellman equations. M2AN Math. Model., Numer. Anal., 36(1) :33-54, 2002.

[11] G. Barles and E. R. Jakobsen. Error bounds for monotone approximation schemes for parabolic Hamilton-Jacobi-Bellman equations. Math. Comp., 76(240) : 1861-1893, 2007.

[12] G. Barles. Solutions de viscosité des équations d'Hamilton-Jacobi. Springer-Verlag, Paris, 1994.

[13] G.-Q. Chen and B. Perthame. Well-posedness for non-isotropic degenerate parabolic hyperbolic equations Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lin´eaire, 20(4) :645 668, 2003.

[14] H.Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et applications, édition masson New, york 1987.

[15] I. Karatzas, S. E. Shreve, "Brownian motion and stochastic calculus", Springer Verlag, 1991.

[16] J. A. Carrillo and D. Gámez-Castro. Interpreting systems of continuity equations in spaces of probability measures through PDE duality. Preprint, arXiv :2206.03968v2 [math.AP], 2023.

[17] J. Carrillo. Entropy Solutions for nonlinear Degenerate Problems. Arch. Ration. Mech. Anal., 147(4) :269-361, 1999.

[18] J.L.Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Gauthier-Villars, Paris 1969, republié par Dunod, Paris 2002.

[19] J. van Neerven. The adjoint of a semigroup of linear operators. Lecture Notes in Math., 1529 Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[20] J. L. Vázquez. The porous medium equation. Mathematical theory. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007.

[21] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. Ann. Mat. Pura appl. (4) 146 (1987) 65-96.

[22] Ky Fan, "On a Theorem of Weyl concerning Eigenvalues of Linear Transformations I", Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, vol. 37, no. 11, 1951, pp. 760-766.

[23] L. Caffarelli, M. G. Crandall, M. Kocan and A. Swi¸ech. On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients. Comm. Pure Appl. Math., 49(4) :365-397, 1996.

[24] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta. Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellmann equations. Systems and control : Foundations and Applications, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1997.

[25] M. Bendahmane and K. H. Karlsen. Renormalized entropy solutions for quasilinear anisotropic degenerate parabolic equations. SIAM J. Math. Anal., 36(2) : 405422, 2004.

[26] M. G. Crandall, P.-L. Lions, Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations, Trans. Amer. Math. Soc., 1983.

[27] N. Alibaud and C. Imbert. Fractional semi-linear parabolic equations with unbounded data. Trans. Amer. Math. Soc., 361(5) :2527-2566, 2009.

[28] NATHAËL ALIBAUD ,JORGEN ENDAL, AND ESPEN R.JAKOBSEN. Optimal stability results and nonlinair duality for L^∞ entropy and L^1 viscosity solutions [math.AP] 4 may 2023.

[29] N. Bouleau,"Probabilités de l'ingénieur", Hermann, 1986.

[30] N. Pogodaev. Estimates of the domain of dependence for scalar convervation laws. J. Differ. Equ., 265(4) :1654-1677, 2018.

[31] O. Bokanowski, N. Forcadel and H. Zidani. L^1 -error estimates for numerical approximations of Hamilton-Jacobi-Bellman equations in dimension 1. Math. Comp., 79(271) :1395-1426, 2010.

[32] Ph. Bénilan, M. G. Crandall and A. Pazy. Nonlinear Evolution Equations Goeverned by Accretive Operators. Book Manuscript, Besan¸con, 2001.

[33] Ph. Bénilan, M. G. Crandall and M. Pierre. Solutions of the porous medium equation in RN under optimal conditions on initial values. Indiana Univ. Math. J., 33(1) :51-87, 1984.

[34] Ph. Bénilan and P. Wittbold. Nonlinear evolution equations in Banach spaces : basic results and open problems. Functional analysis (Essen, 1991), 1-32, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 150, Dekker, New York, 1994.

[35] P.-L. Lions, Optimal Control of Diffusion Processes and Hamilton-Jacobi-Bellman Equations, 1983.

[36] Ph. Protter, "Stochastic integration and differential equations. A new approach", Springer Verlag, 1990.

[37] Quentin Petit Les solutions de viscosité des Équations de Hamilton-Jacobi 05/07/2015.

[38] R. Durrett,"The essentials of probabilit", The Duxbury Press, 1994.

[39] R. Durrett, "Stochastic calculus. A practical introduction", CRC Press 1996.

[40] Rudin, Walter. Principles of Mathematical Analysis. McGraw-Hill, 1976. (Chapitre 10 sur les intégrales multiples et les théorèmes de Fubini et Tonelli).

[41] S. M. Ross, "Initiation aux probabilité", PPUR, 1987.

[42] S. N. Kružkov. First order quasilinear equations with several independent variables. Math. Sb. (N.S) (in Russian), 81(123) :228-255, 1970.

[43] Virtual laboratories in probability and statistics : http ://www.math.uah.edu/stat/.

[44] V. Caselles. Scalar conservation laws and Hamilton-Jacobi equations in one-space variable. Nonlinear Anal. 18(5) :461-469, 1992.

[45] W. Fleming and H. M. Soner. Controlled Markov Procesess and Viscosity Solutions. Springer-Verlag, New York, 1993.

[46] Zhiping Rao, L'approche Hamilton-Jacobi-Bellman pour des problèmes de contrôle optimal avec des coefficients discontinus,Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur de l'École Polytechnique, le 13 décembre 2013.

[47] Z. Wu, J. Zhao, J. Yin and H. Li. Nonlinear diffusion equations. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2001.