UFC

THÈSE DE DOCTORAT

présentée par

Mohamed Karimou Gazibo

en vue de l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Franche-Comté
Spécialité Mathématiques et Applications

Études mathématiques et numériques des problèmes paraboliques avec des conditions aux limites.

Soutenue publiquement le vendredi 6 décembre 2013 devant le jury composé de :

Directeurs de thèse

Boris Andreianov	Maître de Conférences HDR, l'Université de Franche-Comté
Gawtum Namah	Professeur, ENSMM de Besançon

Président du Jury

Stanislas Ouaro	Professeur, Université de Ouagadougou, Burkina-Faso

Rapporteurs

Jérôme Droniou	Professeur, Université de Monash, Australie
Hamidou Touré	Professeur, Université de Ouagadougou, Burkina-Faso
Rachid Touzani	Professeur, Université de Clermont-Ferrand

Examinateurs

Claire Chainais-Hillairet	Professeur, Université de Lille
Rachid Mohamed Laydi	Maître de Conférences HDR, ENSMM de Besançon

Études mathématiques et numériques des problèmes paraboliques avec des conditions aux limites.

Résumé

Cette thèse est centrée autour de l'étude théorique et de l'analyse numérique des équations paraboliques non linéaires avec divers conditions aux limites.
La première partie est consacrée aux équations paraboliques dégénérées mêlant des phénomènes non-linéaires de diffusion et de transport. Nous définissons des notions de solutions entropiques adaptées pour chacune des conditions aux limites (flux nul, Robin, Dirichlet). La difficulté principale dans l'étude de ces problèmes est due au manque de régularité du flux pariétal pour traiter les termes de bords. Ceci pose un problème pour la preuve d'unicité. Pour y remédier, nous tirons profit du fait que ces résultats de régularités sur le bord sont plus faciles à obtenir pour le problème stationnaire et particulièrement en dimension un d'espace. Ainsi par la méthode de comparaison "fort-faible" nous arrivons à déduire l'unicité avec le choix d'une fonction test non symétrique et en utilisant la théorie des semi-groupes non linéaires. L'existence de solution se démontre en deux étapes, combinant la méthode de régularisation parabolique et les approximations de Galerkin. Nous développons ensuite une approche directe en construisant des solutions approchées par un schéma de volumes finis implicite en temps. Dans les deux cas, on combine les estimations dans les espaces fonctionnels bien choisis avec des arguments de compacité faible ou forte et diverses astuces permettant de passer à la limite dans des termes non linéaires. Notamment, nous introduisons une nouvelle notion de solution appelée *solution processus intégrale* dont l'objectif, dans le cadre de notre étude, est de pallier à la difficulté de prouver la convergence vers une solution entropique d'un schéma volumes finis pour le problème de flux nul au bord.
La deuxième partie de cette thèse traite d'un problème à frontière libre décrivant la propagation d'un front de combustion et l'évolution de la température dans un milieu hétérogène. Il s'agit d'un système d'équations couplées constitué de l'équation de la chaleur bidimensionnelle et d'une équation de type Hamilton-Jacobi. L'objectif de cette partie est de construire un schéma numérique pour ce problème en combinant des discrétisations du type éléments finis avec les différences finies. Ceci nous permet notamment de vérifier la convergence de la solution numérique vers une solution onde pour un temps long. Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'étude d'un problème unidimensionnel. Très vite, nous nous heurtons à un problème de stabilité du schéma. Cela est dû au problème de prise en compte de la condition de Neumann au bord. Par une technique de changement d'inconnue et d'approximation nous remédions à ce problème. Ensuite, nous adaptons cette technique pour la résolution du problème bidimensionnel. A l'aide d'un changement de variables, nous obtenons un domaine fixe facile pour la discrétisation. La monotonie du schéma obtenu est prouvée sous une hypothèse supplémentaire de propagation monotone qui exige que la frontière libre se déplace dans les directions d'un cône prescrit à l'avance.

Classification A.M.S 2010 : 65N08, 65M60, 65L10, 58J35 35K05, 35R35.
Mots clés :problème parabolique dégénéré, problème stationnaire, solution entropique, solution intégrale, théorie de semi-groupes non linéaires, méthode des volumes finis, problème à frontière libre, équation de Hamilton-Jacobi, méthode d'éléments finis conforme, schéma monotone, solution onde

Mathematical and numerical studies of parabolic problems with boundary conditions.

Abstract

This thesis focuses on the theoretical study and numerical analysis of parabolic equations with boundary conditions.

The first part is devoted to degenerate parabolic equation which combines features of a hyperbolic conservation law with those of a porous medium equation. We define suitable notions of entropy solutions for each of the boundary conditions (zero-flux, Robin, Dirichlet). The main difficulty in these studies resides in the formulation of the adequate notion of entropy solution and in the proof of uniqueness. There is a technical difficulty due to the lack of regularity required to treat the boundaries terms. We take advantage of the fact that boundary regularity results are easier to obtain for the stationary problem, in particular in one space dimension. Thus, using strong-weak uniqueness approach we get the uniqueness with the choice of a non-symmetric test function and using the nonlinear semigroup theory. The existence of solution is proved in two steps, combining the method of parabolic regularization and Galerkin approximations. Next, we develop a direct approach to construct approximate solutions by an implicit finite volume scheme. In both cases, the estimates in the appropriately chosen functional spaces are combined with arguments of weak or strong compactness and various tricks to pass to the limit in nonlinear terms. In the appendix, we propose a result of existence of strong trace of a solution for the degenerate parabolic problem. In another appendix of independent interest, we introduce a new concept of solution called *integral process solution*. We exploit it to overcome the difficulty of proving the convergence of our finite volume scheme to an entropy solution for the zero-flux boundary problem.

The second part of this thesis deals with a free boundary problem describing the propagation of a combustion front and the evolution of the temperature in a heterogeneous medium. So we have a coupled problem consisting of the heat equation of bidimensional space and a Hamilton-Jacobi equation. The objective is to construct a numerical scheme and to verify that the numerical solution converges to a wave solution for a long time. Recall that an existence of wave solution for this problem was already proven in an analytical framework. At first, we focus on the study of a one-dimensional problem. Here, we face a problem of stability of the scheme. This is due to a difficulty of taking into account the Neumann boundary condition. Through a technique of change of unknown, we can propose a monotone scheme. We also adapt this technique for solving two-dimensional problem. Using a change of variables, we obtain a fixed domain where the discretization becomes easy. The monotony of the scheme is proved under an additional assumption of monotone propagation that requires the free boundary moves in the directions of a cone given beforehand.

2010 A.M.S Classification : 65*N*08, 65*M*60, 65*L*10, 58*J*35 35*K*05, 35*R*35.

key words : Degenerate parabolic problem, Stationary problem, Entropy solution, Integral solution, Nonlinear semigroup theory, Finite volume scheme, Free boundary problem, Hamilton-Jacobi equation, Finite element method, Monotone scheme, Wave solution

Remerciements

Cette thèse est un moment très important de ma vie, d'une part, parce qu'elle est l'aboutissement de mon cursus universitaire et d'autre part parce que c'est un de mes rêves qui se réalise. Bien entendu, je n'ai pas fait ce travail seul et à ce titre je tiens à remercier tous ceux qui y ont contribué. Je voudrais tout d'abord remercier Boris Andreianov et Gawtum Namah mes deux directeurs de thèses qui sont à l'origine de ce travail. Durant toutes ces années de recherches ; ils m'ont fait partager leurs compétences, leurs savoirs et de nombreuses idées avec confiance. Cette confiance associée à leurs soutiens et leurs gentillesses a été un enrichissement incroyable et pas seulement scientifique.

Mes remerciements vont aussi aux professeurs Hamidou Touré et Stanislas Ouaro de l'université de Ouagadougou (Burkina-Faso) qui ont été les premiers à m'initier à la recherche. Ils m'ont donné un goût de l'étude des Équations aux Dérivées Partielles hyperboliques et m'ont recommandé auprès de Boris Andreianov et Gawtum Namah pour la thèse. Je suis très heureux d'avoir Hamidou Touré comme rapporteur de cette thèse et Stanislas Ouaro comme membre de jury.

Mes remerciements également à Jérôme Droniou et Rachid Touzani qui ont bien voulu être rapporteurs de cette thèse. Leurs présences sont justifiées bien sûr par leurs grandes compétences dans les thèmes abordés dans cette thèse. J'espère de tout coeur travailler avec eux pour encore enrichir mes connaissances scientifiques et aussi profiter de leurs expériences et de leurs grandes connaissances mathématiques.

Je remercie Rachid Laydi. Je suis très heureux qu'il soit présent dans mon jury, il m'a beaucoup soutenu et à toujours été disponible pour des discussions mathématiques.

Je remercie très sincèrement Claire Chainais-Hillairet d'avoir bien voulu me faire honneur en acceptant d'être dans le jury.

J'ai pu profiter d'un séjour mathématique de deux semaines au sein du Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications, de l'Université de Pau et des pays de l'Adour sur invitation de Guy Vallet. Ses qualités de chercheurs et sa rigueur scientifique m'ont beaucoup aidées. Je profite aussi remercier Petra Wittbold de Universität Duisburg-Essende pour son aide et ses remarques enrichissantes dans les discussions sur la théorie des semi groupes.

Mes sincères remerciements aux membres de l'équipe de Mathématique de L'École Nationale Supérieur de Mécanique et des Microtechniques (ENSMM) particulièrement à Philippe Bori et Remi Barrere pour leurs confiances et les conseils qui m'ont permis d'assurer dans des bonnes conditions les Travaux Dirigés et les cours à l'ENSMM.

Mes amitiés aux thésards de mathématiques du Laboratoire de Mathématique de Besançon principalement à ceux du bureau 422.

Je profite aussi pour adresser mes remerciements à l'équipe d'Analyse Numérique et Calcul Scientifique et celle des Équations aux Dérivées Partielles du laboratoire de mathématiques de Besançon. Je n'oubli pas le Directeur de l'UMR, Christian Maire ainsi que Catherine Pagani et Catherine Vuillemenot pour avoir toujours eu les réponses à mes questions administratifs ; merci pour leurs aides et la facilité de traiter avec rapidité tout ce qui concerne les documents administratives.

Cette thèse a aussi bénéficié de l'allocation de recherches de la région de Franche-Comté et aussi du soutien de l'ANR CoToCoLa (Contemporary Topics on Conservation Laws). L'occasion est ici pour moi de remercier ces partenaires.

J'en viens maintenant à mes parents. Je les remercie très profondement pour leur soutien inestimable. J'associe également à ces remerciements mes quatre frères (Djibril, Yahaya, Salif et Abdoulaye) sans oublié la famille Gazibo.

Enfin, un très grand merci à Hadjara pour ces instants de bonheurs et de complicités.

Sincèrement,

Mohamed.

Dédicace

Je dédie, avec respect et considération, le présent travail
à mes parents.

Table des matières

Introduction générale **1**

0.1 Première partie : Problème parabolique dégénéré 1

0.1.1 Lois de conservation 2

0.1.2 Problème parabolique dégénéré 4

0.1.3 Théorie des semi-groupes non linéaires 5

0.1.4 Méthode de volumes finis 6

0.1.5 Résultats principaux de la première partie 8

0.2 Deuxième partie : Problème à frontière libre 11

0.2.1 Motivation physique 11

0.2.2 Solution onde pour l'équation de Hamilton-Jacobi (H) dans le cas où $K(u) \equiv 1$. 14

0.2.3 Résultats principaux de la deuxième partie 15

Rappels et Notations générales **19**

0.3 Espaces de fonctions et de mesures 19

0.4 Résultat de compacité 21

0.5 Fonctions et inégalités élémentaires 23

0.6 Solution des équations différentielles 25

0.7 Résultats techniques utilisés dans l'analyse numérique 27

I Degenerate hyperbolic-parabolic equation with boundary condition 29

1 Entropy formulation of degenerate parabolic equation with zero-flux and Robin boundary condition **31**

1.1 Zero-flux boundary problem 31

1.2 Definition of Entropy Solution of (P_1) 33

1.3 Existence of Entropy Solutions of (P_1) . . . 35
1.3.1 Viscosity Regularized Problem . . . 36
1.3.2 Strong pre-compactness result and passage to the limit in ϵ . . . 42
1.4 Uniqueness result for entropy solutions of (P_1) in one space dimension . . . 44
1.5 Nonlinear Robin boundary problem . . . 52
1.5.1 Notion of Entropy Solution of (P_2) . . . 53
1.5.2 Existence of Entropy solution of (P_2) . . . 54
1.5.3 Uniqueness result of Entropy Solution of (P_2) in one space dimension . . . 56

2 Strong boundary conditions for entropy solutions of the Dirichlet problem for parabolic-hyperbolic balance law 59

2.1 Introduction . . . 59
2.2 Characterization of the graph prescribing the effective boundary condition . . . 62
2.2.1 Case of the hyperbolic problem . . . 62
2.2.2 Case of the non-degenerate parabolic problem . . . 63
2.2.3 Case of the degenerate parabolic problem . . . 63
2.3 Entropy solution of stationary problem . . . 64
2.3.1 Definitions of entropy solution of (S_3) . . . 65
2.3.2 Equivalence of the three definitions of entropy solution of (S_3) . . . 67
2.3.3 Well-posedness result for (S_3) . . . 69
2.4 Integral solutions and well-posedness of the abstract evolution problem associated with (P_3) . . . 71
2.4.1 Operator associated to (S_3) . . . 71
2.4.2 Abstract evolution problem associated with A_β . . . 73
2.5 Weakly trace-regular entropy solutions of evolution problem (P_3) . . . 77
2.5.1 Equivalence of the three definitions of entropy solution of (P_3) . . . 80
2.5.2 Uniqueness of entropy solution . . . 83
2.5.3 On existence of trace regular solution . . . 84

3 Degenerate parabolic equation with zero flux boundary condition and its approximations 87

3.1 Introduction . . . 87

3.2 Presentation of a finite volume scheme for degenerate parabolic problem with zero flux boundary condition . . . 89
3.3 Discrete entropy inequalities . . . 92
3.4 Estimates of discrete solution and existence . . . 93
3.4.1 L^∞ bound on discrete solutions . . . 94
3.4.2 Weak BV and $L^2(0,T,H^1(\Omega))$ estimates . . . 94
3.4.3 Estimates of space and time translates . . . 99
3.4.4 Existence of a discrete solution . . . 103
3.5 Continuous entropy inequality . . . 104
3.6 Convergence of the scheme . . . 110
3.6.1 Entropy process solution . . . 111
3.7 Integral-process solution and uniqueness of entropy solution . . . 113

4 Numerical experiments **121**
4.1 Introduction . . . 121
4.2 Evolution of solutions and speed of convergence of the scheme . . . 121
4.2.1 Numerical illustrations of evolution of solution . . . 121
4.2.2 Mesh refinement and speed of convergence . . . 125
4.3 Numerical behavior with and without confinement assumptions . . . 125
4.3.1 Further numerical illustrations . . . 125
4.3.2 Conjectures and perspectives . . . 128

II Solution onde pour un système couplé dans un milieu hétérogène 131

5 Equation de Hamilton-Jacobi : propagation monotone d'un front **133**
5.1 Introduction . . . 133
5.2 Évolution du front sous le seul effet de la courbure ($r = 0$) . . . 133
5.3 Evolution du front avec r non nul . . . 134
5.3.1 Propagation de front sans effet de courbure ($\epsilon = 0$) . . . 136
5.3.2 Propagation de front avec effet de la courbure ($\epsilon \neq 0$) . . . 137

5.3.3 Illustrations et observations numériques . . . 137
5.4 Condition de monotonie . . . 140

6 Propagation d'un front en milieu homogène : le cas d'un problème à frontière libre en 1 D 143
6.1 Introduction . . . 143
6.2 Existence de solution onde du problème . . . 144
6.2.1 Notion de solution onde . . . 144
6.2.2 Convergence vers la solution onde . . . 144
6.3 Discrétisation . . . 149
6.3.1 Discrétisation à l'intérieur du domaine . . . 149
6.3.2 Discrétisation de la température au front . . . 149
6.4 Convergence de la solution numérique vers la solution onde : quelques simulations numériques . . . 151

7 Propagation en milieu hétérogène : problème 2D 153
7.1 Introduction . . . 153
7.2 Solution onde pour le système couplé $(H-P)$ . . . 153
7.3 Changement de variables . . . 154
7.4 Discrétisation . . . 156
7.4.1 Discrétisation de l'équation du front (H) . . . 157
7.4.2 Construction d'un schéma pour l'équation de la température (T) à l'intérieur du domaine . . . 158
7.4.3 Discrétisation des conditions limites . . . 167
7.5 Propriété de monotonie du schéma global . . . 172

8 Simulations et convergence numérique vers une solution onde dans un milieu hétérogène 175
8.1 Introduction . . . 175
8.2 Illustrations et convergence numérique vers une solution onde dans le cas d'un système quasi-couplé $(K(u)=1)$ . . . 176
8.2.1 Comportement dans le temps de la température numérique au front . . . 176
8.2.2 Comportement dans le temps de la température numérique hors du front . . . 177
8.3 Illustrations et convergence numérique vers une solution onde dans le cas d'un système couplé $K(u_f)=\exp(-\frac{1}{u_f})$ . . . 178
8.3.1 Propagation du front . . . 178
8.3.2 Comportement dans le temps de la température numérique au front . . . 180

8.3.3 Comportement dans le temps de la température numérique hors du front 182
8.4 Quelques remarques sur la solution onde numérique 183

III Appendix **185**

A Existence of strong trace of solutions to degenerate parabolic equation **187**
A.1 Definition and properties of strong trace 187
A.2 Notion of quasi-solution 188
A.3 Existence of strong trace 189
A.4 Application for boundary value problems 193

Integral-process solutions in the nonlinear semi group theory **197**
B.1 Notion of integral-process solutions 197

Conclusion et perspectives **203**

Bibliographie **205**

Introduction générale

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse concernent l'étude théorique et numérique des équations aux dérivées partielles paraboliques non-linéaires. Ils s'articulent autour de deux grands thèmes de recherche :

1. Étude théorique et numérique de problème parabolique dégénéré avec des conditions de bord.
2. Étude d'un système couplé d'équations paraboliques décrivant un problème à frontière libre.

Ces deux thèmes seront présentés séparément. Nous présenterons dans cette introduction un aperçu sur les motivations et aussi les résultats obtenus tout au long de ces années de recherches.

0.1 Première partie : Problème parabolique dégénéré

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude de l'équation parabolique suivante :

$$u_t + \operatorname{div} f(u) - \Delta\phi(u) = 0 \text{ dans } Q = (0,T)\times\Omega, \quad T > 0, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^\ell; \tag{E_p}$$

Nous nous intéressons à l'étude des problèmes paraboliques mêlant des phénomènes non-linéaires de diffusion et qui présentent la particularité que le mécanisme de diffusion est inhibé en deçà d'une valeur critique de l'inconnue que nous noterons u_c. Ces équations jouent un rôle important dans le domaine de l'ingénierie pétrolière voir par exemple le livre "Analyse mathématique de modèles non linéaires de l'ingénierie pétrolière" de G. Gagneux et M. Madaune-Tort et Gagneux [44] : lors de l'étude d'écoulements diphasiques de deux fluides (huiles et gaz) incompressibles et immiscibles en milieu poreux pour la récupération assistée des hydrocarbures.
Donnons une liste non exhaustive de modèles faisant intervenir des problèmes paraboliques dégénérés :

1. La floculation des argiles lors d'envasements d'estuaires par hydro-sédimentation (voir par exemple [25] et ces références). Lorsque la concentration de particules atteint une valeur critique, il y a formation d'agrégats et le phénomène de diffusion moléculaire devient inexistant. Seul subsiste le processus de transport convection.
2. Les écoulements forcés de fluides en milieux poreux : diverses modélisations font apparaitre des courbes de perméabilité relative plates en deçà d'une certaine valeur résiduelle de la saturation du constituant considéré. Il s'ensuit que le processus darcéen [1] de diffusion est inopérant en deçà d'un

1. Qualifie un écoulement qui peut être décrit par la loi de Darcy.

certain seuil de saturation, alors qu'existe un phénomène de convection forcée. De tels modèles se rencontrent également en pédologie, lorsqu'il s'agit de décrire des processus d'humidification des sols (voir par exemple [31]).

3. L'évolution d'un trafic autoroutier : dans ce cas le terme de diffusion traduit un effet d'anticipation des conducteurs qui corrigent leur vitesse instantanée en fonction des variations locales de densité de la circulation à partir d'un certain seuil « bouchon ».

Pour résoudre le problème (E_p), il faut y ajouter une condition initiale

$$u(0,x) = u_0(x); \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

et des conditions aux limites, pour $(t,x) \in (0,T) \times \Sigma$ lorsque $\Omega \subset \mathbb{R}^\ell$. Une des difficultés majeures dans l'étude des problèmes avec des conditions prescrites sur le bord du domaine est la prise en compte de la condition au limite qui peut être délicat. Il convient alors de trouver une formulation entropique adaptée pour voir dans quel sens la condition au bord doit être vérifiée afin d'avoir un problème bien posé.

Nous passons en revue quelques théories dont la connaissance à été essentielle pour mener à bien cette première partie de la thèse.

0.1.1 Lois de conservation

Etant donné un ouvert Ω de $\mathbb{R}^\ell$, on considère l'équation suivante :

$$u_t + \operatorname{div} f(u) = 0 \text{ dans } Q = (0,T) \times \Omega, \quad T > 0, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^\ell; \tag{E_h}$$

munie d'une condition initiale et en plus d'un condition au bord lorsque $\Omega \subset \mathbb{R}^\ell$. Il est bien connu que même avec des données très régulières, il est difficile de trouver des solutions classiques (continu par exemple). Par contre en se tournant vers la notion de solution au sens des distributions (solution dite *faible*), on arrive à trouver des solutions qui peuvent contenir d'éventuelles discontinuités. Ainsi, en considérant le problème de Burgers ($f(u) = \frac{u^2}{2}$) avec une condition initiale $u_0(x) = -1$ si $x < 0$ et $u_0 = 1$ si $x > 0$, la fonction donnée par $u(t,x) = u_0(x)$ est bien une solution faible de l'équation de Burgers. On remarque aussi que la fonction définie par :

$$v(t,x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -t \\ \frac{x}{t} & \text{si } |x| \leq t \\ 1 & \text{si } t < x \end{cases}$$

est aussi une solution faible. D'après les observations faites sur les modèles physiques, la multiplicité des solutions n'est pas du tout réaliste et admissible. Il convient alors de chercher un cadre plus général permettant d'avoir un problème bien posé au sens de Hadamard. La notion de solution dite entropique obtenue par approximation visqueuse [2] ou par la méthode des volumes finis permet d'obtenir existence et unicité. Pour une fonction f localement Lipschitzienne, S. N. Kruzhkov ([49]) défini une solution

2. Dans plusieurs situations du monde réel, le modèle ainsi régularisé correspond à une prise en compte plus fine de la réalité physique ; en ce sens, la loi de conservation hyperbolique doit être vue comme une limite singulière de l'équation parabolique avec diffusion qui tend vers zéro.

entropique $u \in L^\infty(Q)$ du problème de Cauchy (E_h) si pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction u vérifie l'inégalité dite entropique suivante :

$$\partial_t|u-k| + \mathrm{div}\Big(sign(u-k)(f(u)-f(k))\Big) \leq 0 \ \text{ dans } \mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^\ell). \tag{2}$$

La technique qu'il utilise pour obtenir l'unicité de la dite solution entropique est basée sur "le dédoublement de variables". Cette méthode consiste à supposer $u(t,x)$ et $\hat{u}(s,y)$ deux solutions entropiques de (E_h). En prenant $k = u$ (respectivement $k = \hat{u}$) dans les formulations entropiques correspondantes, on arrive à l'inégalité suivante :

$$(\partial_t + \partial_s)|u-\hat{u}| + (\mathrm{div}_x + \mathrm{div}_y)\Big(sign(u-\hat{u})(f(u)-f(\hat{u}))\Big) \leq 0 \ \text{ dans } \mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^\ell). \tag{3}$$

Ainsi, avec le choix d'une fonction test $\xi = \xi(t,x,s,y)$ symétrique par rapport aux variables d'espace et de temps (*i.e.* $(\nabla_x + \nabla_y)\xi = 0$, $(\partial_t + \partial_s)\xi = 0$) , S. N. Kruzhkov arrive à avoir une contraction L^1 qui est synonyme d'unicité.
Il existe dans la littérature plusieurs généralisations de cette notion de solution entropique dans le cas où le problème (E_h) est muni de condition aux limites.
La condition au bord ayant reçu le plus d'attention est celle de Dirichlet. Le papier de Bardos, Leroux et Nédélec [14] y fait figure de référence. Pour avoir une idée de la difficulté quant à la prise en compte de la condition de bord, considérons le problème (E_h) en prenant $f(u) = u$ sur un intervalle de la droite réelle $\Omega = (0,1)$ avec une condition initiale et pour condition de Dirichlet $u(t,0) = a(t)$ et $u(t,1) = b(t)$, $t > 0$. Il apparaît en prenant $a(t) = 0$, $b(t) = 1$ pour tout t et en démarrant avec une donnée initiale nulle, une couche limite [3] en $x = 1$. Ceci traduit le fait qu'en imposant à la solution une valeur en $x = 1$ au bord, le problème devient insoluble. Ainsi, en analysant le problème de Dirichlet non homogène $u(t,x) = u^D(t,x)$ sur $\Sigma = (0,T)\times\partial\Omega$ et en étudiant la limite $\epsilon \to 0$ du problème approché, Bardos, Leroux et Nédélec s'appuyent sur la notion d' une solution entropique au sens de (2) à l'intérieur du domaine qu'on appellera au Chapitre 2 'solution entropique locale'. Pour traitement du bord, Bardos, Leroux et Nédélec [14] n'imposent pas à la solution u de vérifier la condition de bord u^D, mais plutôt l'inégalité suivante :

$$sign(\gamma u - k)(f(\gamma u) - f(u^D)).\eta \geq 0 \text{ pour } k \in [\min(\gamma u, u^D), \max(\gamma u, u^D)]. \tag{4}$$

Cette condition appelée condition *'BLN'* (initiale des trois auteurs) restreint le cadre d'étude dans $L^\infty \cap BV$, car l'appartenance de la solution à l'espace BV des fonctions à variations bornées justifie l'existence de la trace γu au bord. Plus tard, F. Dubois et Ph. LeFloch (voir [37]), adaptent le cadre *'BLN'* en travaillant avec un graphe maximal monotone, dans ce cas la condition de Dirichlet se présente en terme de graphe $\beta = \{u^D\}\times\mathbb{R}$. Récemment Boris Andreianov et Karima Sbihi [12] généralisent ces résultats avec un graphe maximal monotone avec dépendance en (t,x) *i.e.* $\beta_{t,x} = \{u^D(t,x)\}\times\mathbb{R}$.
Dans le cadre L^∞, Félix Otto, propose une formulation intégrale entropique de bord sans l'utilisation de trace de la solution. Il prouve l'existence et l'unicité. La liste des papiers traitant du problème de Dirichlet est longue, nous pourrions citer entre autre [73, 72, 4, 29] qui nous ont beaucoup aidé dans la compréhension de la prise en compte des conditions aux bords tout au long de ces années de recherches.

3. Le schéma numériques s'efforce de respecter la condition au bord, et cela entraine des phénomènes purement numérique au bord

Une autre condition au bord tout aussi importante du point de vue des applications est la condition de flux nul au bord. S'inspirant des travaux de Vasseur [74], sur l'existence de trace forte au bord pour la convergence L^1 des lois de conservation, résultat généralisé plus tard par Panov [65], Bürger, Frid et Karlsen proposent une formulation entropique incluant le terme de bord $sign(\gamma u - k)f(k)$ dans la formulation entropique. Cette quantité à bien un sens, en effet, la fonction sign étant discontinue en $k = \gamma u$, en ce point de discontinuité, grâce à la trace forte de u et la continuité de f ; on a $f(\gamma u) = \gamma f(u) = 0$ sur Σ. L'existence de solution est obtenue par la méthode de viscosité évanescente. Bürger et al, prouvent l'unicité par les techniques de dédoublement de variables. Ils arrivent à ce résultat

$$(\partial_t + \partial_s)|u - \hat{u}| + (\mathrm{div}_x + \mathrm{div}_y)\Big(sign(u - \hat{u})(f(u) - f(\hat{u}))\Big)$$
$$+ sign(\gamma u - \hat{u})f(\gamma u).\eta(y)d\mathcal{H}^{\ell-1}(x) + sign(u - \gamma\hat{u})f(u).\eta(x)d\mathcal{H}^{\ell-1}(y) \leq 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0,T)\times\overline{\Omega}).$$

Les termes de bords disparaissent en faisant $x \to y$ grâce à la trace forte de flux qui est nulle au bord. Ainsi le choix d'une fonction test symétrique assure facilement l'unicité. Notons que dans leur papier, la condition "$f(u) = 0$" est vérifiée de façon littérale *i.e* obtenue comme limite quand $\epsilon \to 0$ du problème approché, grâce à une hypothèse supplémentaire $f(0) = f(u_{\max})$, ici $u_{\max}$ est supposé être une valeur infranchissable de la solution due par exemple aux contraintes physico-chimiques (par exemple le cas d'un problème de saturation).

0.1.2 Problème parabolique dégénéré

Dans le cas de l'équation parabolique dégénérée (E_p), les techniques issues des lois de conservation peuvent être appliquées et une solution entropique pour le problème de Cauchy (E_p) dans l'espace $\mathbb{R}^\ell$ tout entier vérifie l'inégalité suivante

$$\forall k \in \mathbb{R},\ \ \partial_t|u - k| \ +\ \mathrm{div}\Big(sign(u - k)\Big(f(u) - f(k) - \nabla\phi(u)\Big)\Big) \ \leq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^\ell). \tag{5}$$

En traitant le problème d'unicité par le dédoublement de variables, on se heurte au traitement du terme non-linéaire $\nabla\phi(u)$. Pour contourner cette difficulté, José Carrillo à eu l'idée d'introduire l'ensemble suivant :

$$\Omega_x = \{x \in \Omega|\ \ \phi(u(t,x)) = 0\} \tag{6}$$

et déduit à travers la formulation entropique une information sur la dissipation d'énergie :

$$\forall k \in \Omega_x,\ \ \forall D \in \mathbb{R}^\ell,\ \ \partial_t|u - k| \ +\ \mathrm{div}\Big(sign(u - k)\Big(f(u) - f(k) - \nabla\phi(u) - D\Big)\Big)$$
$$\leq \varlimsup_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sigma}\mathbf{1}_{\{-\sigma<\phi(u)-\phi(k)<\sigma\}}\nabla\phi(u)(D - \nabla\phi(u)) \ \text{ dans } \mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^\ell). \tag{7}$$

Ainsi, en combinant l'inégalité entropique pour k appartenant au complémentaire de Ω_x et l'information sur la dissipation d'énergie pour $k \in \Omega_x$, José Carrillo [28] généralise de la méthode de dédoublement des variables de Kruzhkov pour les problèmes paraboliques dégénérés.
Tout comme pour les lois de conservation, il existe plusieurs papiers traitant des condition de bords de Dirichlet pour le problème (E_p). On peut citer entre autre pour les conditions de Dirichlet homogène

[28, 68, 28] et pour les conditions de Dirichlet non homogène [58, 59, 71, 42, 18]. Il existe très peu de références qui traitent de la condition zéro-flux et à notre connaissance, elles traitent presque toutes du problème en une dimension d'espace (pour l'unicité). Dans [23], Bürger Frid et Karlsen, proposent un résultat d'existence et d'unicité en s'appuyant sur le cadre fonctionnels des champs vectoriels dont la divergence est une mesure. Ce cadre leur permet de donner un sens a la formulation de Green-Gauss dans le traitement du flux au bord. Récemment, H. Watanabe et O. Shinnosuke dans [45] ont prouvé l'existence et l'unicité de solution entropique, pour une condition au bord qui peut s'apparenter à une condition de Robin sous certaines hypothèse sur le flux de convection. Notre démarche tout au long de cette thèse sera une approche différente. Nous profiterons entre autre des résultats de régularités plus facile à appréhender pour le problème stationnaire associé au problème (E_p) et ainsi en se basant sur la théorie des semi-groupes non linéaires, on arrive à prouver l'unicité.

0.1.3 Théorie des semi-groupes non linéaires

La théorie des semi-groupes est une théorie riche dans le sens qu'elle s'applique à une large famille de problèmes concrets et permet d'avoir des résultats d'existence et d'unicité dans un cadre abstrait. Dans notre travail, elle fournit l'unicité de problème d'évolution avec très peu de résultat de régularité disponible, comme nous le verrons tout au long de cette thèse. Elle s'appuie sur l'étude des opérateurs m-accrétifs (l'unicité est assurée par l'accrétivité de l'opérateur). Contrairement à la théorie de Kruzhkov, s'appuyant sur l'espace L^∞, la théorie des semi-groupes a pour cadre fonctionnel les espaces de Banach (dans les applications qui nous intéressent, l'espace est L^1). Néanmoins, ces deux théories peuvent être complémentaires. On désigne par X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ et du crochet $[.,.]$ défini comme suit :

$$[a,b] = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\|a + \alpha b\| - \|b\|}{\alpha}. \tag{8}$$

Considérons le problème d'évolution abstrait gouverné par un opérateur dans l' espace de Banach X

$$u' + Au \ni h, \quad u(0) = u_0. \tag{9}$$

Elle offre un cadre propice d'étude d'existence et en ce qui nous intéresse l'unicité de solution pour l'étude des problèmes d'évolution généraux. Pour cela considérons le schéma implicite du problème (9)

$$\begin{cases} \frac{u_\sigma^i - u_\sigma^{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + Au_\sigma^i & \ni h_\sigma^i \quad i = 1, ..., N, \quad \sigma > 0 \\ u_\sigma^0 & = u_0(x), \end{cases} \tag{10}$$

et $(t_0, ..., t_N : \quad h_\sigma^1, ..., h_\sigma^N)$ une discrétisation définie par

$$\begin{cases} t_0 = 0 < t_1 < .... < t_N < T; \quad \max\limits_{i=1,...,N} |t_i - t_{i-1}| \leq \sigma \\ T - t_N < \sigma \text{ et } h_\sigma^i = h(t_i) \quad i = 1, ..., N. \end{cases}$$

L'objectif est de construire $u_\sigma : [0, T] \to X$ tel que :

$$u_\sigma(t) = \begin{cases} u_\sigma^i & \text{pour tout } t \in [t_{i-1}, t_i[\quad i = 1, .., N \\ u_\sigma^N & \text{pour tout } t \in [t_N, T[\end{cases}$$

et u_σ^i est donnée par (10). On a alors

$$\left(u_\sigma^i - (t_i - t_{i-1})Au_\sigma^i\right) \ni \left(u_\sigma^{i-1} + (t_i - t_{i-1})h_\sigma^i\right) \; i = 1, ..., N. \tag{11}$$

Ainsi, pour résoudre (11), on a besoin que l'inverse de l'opérateur $(I + \lambda A)$ soit bien défini et univoque. Dans ce cas

$$u_\sigma^i = \left(I - (t_i - t_{i-1})A\right)^{-1}\left(u_\sigma^{i-1} + (t_i - t_{i-1})h_\sigma^i\right) \; i = 1, ..., N. \tag{12}$$

Pour construire, par la suite, une théorie permettant d'obtenir la convergence de u_σ vers une limite u lorsque sigma tend vers zéro, on a besoin que la résolvante $(I + \lambda A)^{-1}$ soit une contraction dans X. La propriété contractante (au sens large) de la résolvante s'interprète sous forme d'accrétivité de l'opérateur A. L'opérateur A est dit accrétif si :

$$\|x - \hat{x}\| \leq \|x - \hat{x} + \lambda(y - \hat{y})\| \;\; \lambda \geq 0, (x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in A. \tag{13}$$

Dans le cas où l'opérateur est accrétif, notons $J_\lambda^A = (I + \lambda A)^{-1}$ la résolvante de A. On note que le domaine de la résolvante est l'image de l'opérateur $(I + \lambda A)$ i.e $D(J_\lambda^A) = R(I + \lambda A)$. Revenons à la relation (14) qui s'écrit formellement :

$$u_\sigma^i = J^A_{(t_i - t_{i-1})} = \left(u_\sigma^{i-1} + (t_i - t_{i-1})h_\sigma^i\right) \; i = 1, ..., N. \tag{14}$$

Cette équation indique qu'à part l'accrétivité de l'opérateur, on a tout aussi besoin d'une condition sur l'image de la résolvante pour bien assurer l'existence de la solution i.e $D(J_\lambda^A) = R(I + \lambda A) = X$. Ainsi, on dit que l'opérateur A est m-accrétif si et seulement si A est accrétif et $R(I + \lambda A) = X$ pour tout $\lambda > 0$. On défini ainsi une notion de solution appelé bonne solution du problème abstrait (9) qui est la limite de u_σ lorsque σ tends vers zéro. On a l'existence grâce au Théorème de Crandall-Liggett dont une généralisation dans le cas $h \neq 0$ peut être trouvée dans la thèse de Ph. Bénilan (voir [16]). Ce théorème indique qu'il existe une unique bonne solution du problème (9) si A est m-accrétif et la donnée initiale $u_0 \in \overline{D(A)}$. De plus cette 'bonne solution ' est appelée solution intégrale et vérifie :

$$\forall (v, z) \in A \;\; \frac{d}{dt}|u - v| \leq \Big[u - v, h - z\Big]. \tag{15}$$

Il est également montré dans [16] que la propriété (15) suffit, à elle seule, à définir la notion de solution pour laquelle le problème d'évolution est bien posé. C'est la notion de solution intégrale, qui jouera un rôle majeur dans la première partie de cette thèse.

0.1.4 Méthode de volumes finis

Dans cette section, nous rappellerons la méthode des volumes finis appliquée à l'étude des problèmes paraboliques dégénérés. On suppose que Ω est un ouvert polygonal de $\mathbb{R}^\ell$ et on se donne un maillage $\mathcal{O}$ de Ω. Un maillage $\mathcal{O}$ de Ω est un découpage de Ω en petits volumes polygonaux K appelés volumes de contrôle. Le domaine temporel $[0, T[$ est subdivisé en $\delta t > 0$ pas de temps c'est à dire $[0, T] =$

$\bigcup_{n=0}^{N}[n\delta t,(n+1)\delta t[$ avec $N=\frac{T}{\delta t}+1$. On intègre ensuite l'équation (E_p) sur $[n\delta t,(n+1)\delta t[\times K$:

$$\int_K\Big(u((n+1)\delta t,x)-u(n\delta t,x)\Big)dx+\int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t}\int_K \text{div } f(u)dxdt-\int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t}\int_K \Delta\phi(u)dxdt=0. \tag{16}$$

Par la formule de Stokes, (16) donne

$$\int_K\Big(u((n+1)\delta t,x)-u(n\delta t,x)\Big)dx+\int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t}\int_{\partial K} f(u).\eta_K d\gamma dt-\int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t}\int_{\partial K}\nabla\phi(u).\eta_K d\gamma dt=0,$$

où η_K est le vecteur unitaire normal à ∂K extérieur à K. On décompose ensuite le bord de chaque volume de contrôle K en arêtes du maillage c'est à dire $\partial K=\bigcup_{\sigma\in\mathcal{E}_K}\sigma$ où $\mathcal{E}_K$ représente l'ensemble des arêtes (interfaces) de K. On obtient alors

$$\frac{1}{\delta t}\int_K\Big(u((n+1)\delta t,x)-u(n\delta t,x)\Big)dx+\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K}\int_\sigma f(u).\eta_{K,\sigma}d\gamma-\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K}\int_\sigma\nabla\phi(u).\eta_{K,\sigma}d\gamma=0,$$

où $\eta_{K,\sigma}$ est le vecteur unitaire normal à σ extérieur à K. On pourra opter pour un schéma implicite qui a l'avantage de réduire le temps de calcul et éviter une éventuelle condition de Courant-Friedrichs-Levy (CFL). Pour cela, on approche le terme $\int_K u((n+1)\delta t,x)dx$ par l'inconnue discrète u_K^{n+1} et le terme $\int_K u((n+1)\delta t,x)dx$ par u_K^n. La grande difficulté est de trouver une bonne approximation des termes de convection et de diffusion. Pour obtenir donc un schéma numérique, il nous reste à exprimer le flux numérique de convection et de diffusion en fonction des inconnues discrètes $(u_K^{n+1})_{K\in O}$, associées aux mailles et $(u_\sigma^{n+1})_{\sigma\in\mathcal{E}_K}$ associées aux arêtes : Pour des raisons d'interprétations des phénomènes physiques liés à ces problèmes, la discrétisation du flux de convection doit tenir compte du rendement entre le flux entrant et sortant à travers l'interface σ donné séparant deux volumes de contrôle ($\sigma=\partial K\cap\partial L$ avec L un volume voisin de K), ce qui est un des avantages de la méthodes des volumes finis par rapport aux autres méthodes d'approximations numériques. Pour cela, on posera :

$$F_{K,\sigma}(u_K^{n+1},u_{K,\sigma}^{n+1})\sim:=\int_\sigma f(u).\eta_{K,\sigma}d\gamma. \tag{17}$$

Ce flux numérique doit être monotone, conservatif, régulier et consistant :

$$\forall a,b,\in\mathbb{R}\ \ F_{K,\sigma}(a,a)=m(\sigma)f(a).\eta_{K,\sigma},\ \text{ et }\ \partial_b F_{K,\sigma}(a,b)\le 0\le\partial_a F_{K,\sigma}(a,b).$$

Il existe dans la littérature des exemples de flux numériques satisfaisant ces conditions, on peut citer par exemple le flux numérique de Godunov et celui de Rusanov.
Il reste à discrétiser le terme issu du flux de diffusion, ce qui suggère une approximation du gradient continue d'une fonction en gradient discret. Une façon d'approcher le gradient est la suivante :

$$-\int_\sigma\nabla\phi(u).\eta_{K,\sigma}d\gamma:=-\frac{\phi(u_{K,\sigma}^{n+1})-\phi(u_K^{n+1})}{d_{K,\sigma}}m(\sigma), \tag{18}$$

où $d_{K,\sigma}$ est la distance du point x à l'arête σ et $m(\sigma)$ la longueur de l'arête (voir Figure 1 incluant notamment une condition d'orthogonalité). On a ainsi approché le problème (E_p) par une suite de solutions

approchées obtenue par la méthode Euler implicite en temps, volumes finis en espace, sur un maillage admissible $\mathcal{O}$ incluant notamment une condition d'orthogonalité (voir, e.g., [42, 59] et aussi la Figure 1). Une inconnue discrète u_K^{n+1} pour chaque volume de contrôle $K \in \mathcal{O}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ est introduite et le schéma est défini par

$$m(K)\frac{u_K^{n+1}-u_K^n}{\delta t} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}(u_K^{n+1}, u_{K,\sigma}^{n+1}) - \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} \tau_{K,\sigma}(\phi(u_{K,\sigma}^{n+1}) - \phi(u_K^{n+1})) = 0. \tag{19}$$

Ici, $\tau_{K,\sigma} = \frac{m(\sigma)}{d_{K,\sigma}}$ appelé transmissibilité est le rapport de la mesure $(\ell-1)$-dimensionnelle $m(\sigma)$ de σ sur la mesure ℓ-dimensionnelle $m(K)$ de la maille K.
Une condition de démarrage est nécessaire pour permettre de faire les calculs. La donnée initiale sera discrétisée comme suit :

$$\text{pour } K \in \mathcal{O}, \quad u_K^0 = \frac{1}{m(K)}\int_K u_0 dx.$$

La prise en compte de la condition au bord peut s'avérer très délicate. Par exemple dans le cas d'une condition de Dirichlet homogène, on peut créer des points fictifs hors du domaine et ainsi pour le bilan des flux, imposer une relation entre le flux sortant et entrant au bord en fonction de la donnée de Dirichlet homogène en supposant que les points fictifs sont tous nuls (voir [59]). En ce qui concerne la condition de flux nul qui sera décrite au Chapitre 3, la condition de flux zéro est imposée dans (19) au sens littéral puisque les termes de flux sur les arêtes de ∂K incluses dans $\partial\Omega$ sont absentes (puisqu'ils sont supposés nuls).

Si ce schéma implicite possède une solution, on dira que la fonction continue par morceaux $u_{\mathcal{O},\delta t}(t,x)$ définie par : $u_{\mathcal{O},\delta t}(t,x) = u_K^{n+1}$ pour $x \in K$ et $t \in]n\delta t, (n+1)\delta t]$, est solution approchée de (E_p). L'existence de $u_{\mathcal{O},\delta t}$ s'en découle par des arguments de degré topologique. On retrouve dans [42] des estimations *a priori* suivantes nécessaire pour passer à la limite : les bornes L^∞ de $u_{\mathcal{O},\delta t}$, une estimation $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ discrète, des inégalités entropiques discrètes puis continues du type (5) avec un terme reste, et des estimations des translatées L^2 en espace-temps pour $\phi(u_{\mathcal{O},\delta t})$. Il est alors possible de prouver qu'une sous-suite des solutions $u_{\mathcal{O}_h,\delta t_h}$, où h désigne la taille des discrétisations, converge en un sens non-linéaire faible-$*$ vers une limite ν dite solution processus-entropique, définie, en posant $u = \int_0^1 \nu(\alpha)\,d\alpha$, par

$$\forall k \in \mathbb{R}\ \left(\int_0^1 |\nu(\alpha)-k|\,d\alpha\right)_t + \nabla\left(\int_0^1 sign(\nu(\alpha)-k)\Big[f(\nu(\alpha)) - f(k)\Big]d\alpha\right) - \Delta|\phi(u)-\phi(k)| \le 0$$

dans $\mathcal{D}'((0,T)\times\Omega)$, où $\nu : (t,x,\alpha) \in [0,T]\times\Omega\times[0,1]$ est une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la variable α permet de tenir compte d'éventuelles oscillations dans la famille $(u_{\mathcal{O}_h,\delta t_h})_h$. Il ne reste plus qu'a montrer que cette solution processus-entropique est en faite une solution entropique, c'est à dire : $\nu(t,x,\alpha) = \nu(t,x)$ et vérifie donc (5).

0.1.5 Résultats principaux de la première partie

Cette première partie de la thèse comporte quatre chapitres : Nous présentons ici un résumé des résultats obtenus par chapitre.
Dans le premier chapitre, nous considérons le problème (E_p) avec une condition dite de flux nul ie $(f(u) - \nabla\phi(u)).\eta = 0$ sur $\Sigma = (0,T)\times\partial\Omega$. Dans ce chapitre, on supposera l'hypothèse $f(0) = f(u_{\max}) = 0$

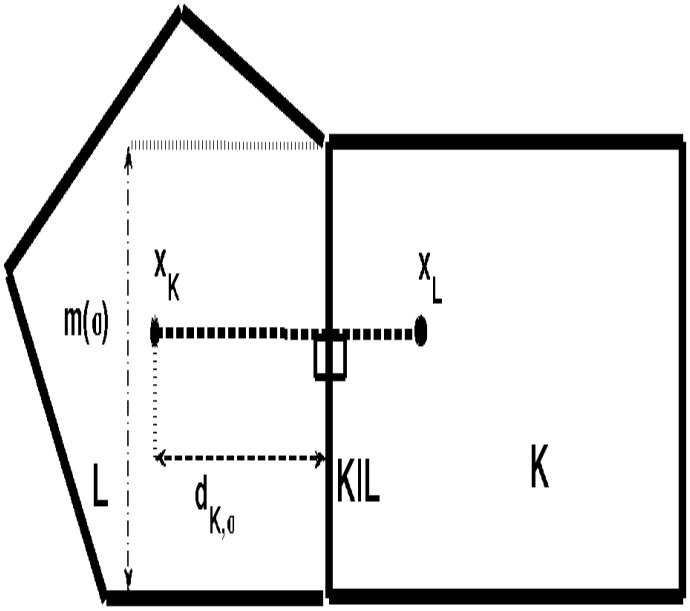

FIGURE 1 – Condition d'orthogonalité pour un maillage volumes finis

avec $u_{\max} \geq 0$. S'inspirant de la définition de solution entropique proposée par Bürger, Frid et Karlsen pour le problème hyperbolique avec une condition zéro flux dans l'article ([22], 2007), nous introduisons une nouvelle notion de solution entropique : Une solution entropique de (E_p), définie dans [9], est une fonction à valeurs dans $[0, u_{\max}]$ vérifiant pour tout $k \in [0, u_{\max}]$ et telle que $u \in C([0,T]; L^1(\Omega))$, $u(0) = u_0$.

$$\forall k \in [0, u_{max}] \;\; \partial_t|u-k| + \operatorname{div}\Big(sign(u-k)\Big(f(u)-f(k)-\nabla\phi(u)\Big)\Big) \leq |f(k).\eta|\, d\mathcal{H}^{\ell} \quad \text{in } \mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^{\ell}), \quad (20)$$

Dans le papier de Bürger, Frid et Karlsen [22] grâce à l'existence de trace forte γu de la solution u du problème hyperbolique (on pourra se référer aux deux papiers [74, 66]) et à la continuité de f et par la stabilité de l'opérateur trace forte par rapport à la continuité $f(\gamma u) = \gamma f(u)$. Les auteurs arrivent à prouver l'existence et l'unicité de solution du problème hyperbolique. Notre donnons une généralisation de leur définition pour le problème parabolique dégénéré sans tenir compte de la trace au bord. Nous prouvons l'existence de solution par la méthode de viscosité artificielle et au passage en utilisant un résultat de precompacité forte due à Panov ([66]). La difficulté principale dans notre cas est la preuve d'unicité . Bien qu'on arrive à prouver l'existence de trace forte pour le problème parabolique dégénéré (voir l'Annexe *A* de cette thèse et aussi dans [50]) il faudrait aussi l'existence d'une trace forte du flux total, or la présence du terme $\nabla\phi(u)$ dans la condition de bords rend inopérant la méthode adoptée par Bürger, Frid et Karlsen. La principale difficulté pour établir l'unicité d'une solution entropique réside dans le manque de régularité du flux total $(f(u) - \nabla\phi(u))$ sur le bord. L'existence de la trace L^1 forte (au sens [74, 65]) de la composante normale $(f(u) - \nabla\phi(u)).\eta$ semble être difficile à obtenir notamment lorsque $u_c \in (0, u_{\max})$. L'idée pour pallier à cette difficulté est d'exploiter la comparaison du type "fort-faible" entre une solution entropique générale u et une solution entropique $\hat{u}$ dite *à trace régulière* (cf. [7]). Or, la régularité est plus facile à appréhender pour le problème stationnaire ; par exemple, dans le cas $\ell = 1$ on a l'observation élémentaire $(f(u) - \nabla\phi(u) \in C(\overline{\Omega})$. Ainsi, on commence par l'étude du problème stationnaire. A l'issue de cette étude, grâce à la continuité du flux jusqu'au bord on peut définir un opérateur associé $A_{f,\phi}$, incorporant la trace-régularité dans la définition du domaine $D(A)$, et montrer sa m-accrétivité dans les cas décrits par le problème abstrait d'évolution (théorie des semi-groupes non-linéaires) . Ainsi on prouve que la solution entropique est la bonne solution (solution intégrale) qui est unique grâce au théorème de Crandall-Liggett. la première partie de ce chapitre est s'inspire d'un article ([9]) en collaboration avec mon Directeur de thèse Boris Andreianov publié dans la revue ZAMP (Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik) et traite de la condition flux nul au bord pour le problème (E_p) sous l'hypothèse $f(0) = f(u_{\max})$ pour un $u_{\max} \geq 0$ donné. Une généralisation de ce travail pour le problème de Robin non linéaire dans la dernière partie de ce chapitre à fait l'objet d'une présentation orale au " 14th International Conference on Hyperbolic Problems : Theory, Numerics, Applications. June 25-29, 2012 - University of Padua, Italy" et est publié dans les actes du congrès (voir [47]).

Dans le second chapitre, on s'intéressera à la résolution de (E_p) avec une condition de Dirichlet non homogène. On s'intéresse au cas où Ω est un intervalle de la droite réelle $\mathbb{R}$.
Malgré le fait que ce problème a été résolu notamment dans les travaux de Carrillo [28] et de Otto [63] (voir également les contributions [58, 59, 71]), nous réexaminons la définition d'une solution afin d'en donner une interprétation plus intuitive de la condition aux limites. En effet, nous décrivons explicitement le graphe maximal monotone qui relie les traces de u et du flux pariétal total $\mathcal{F}[u].\eta$ dans le cas

où les traces existent ; la connaissance de ce graphe permet toutefois de définir une solution aussi dans le cas où lesdites traces n'existent pas, par un jeu bien choisi des inégalités entropiques dans l'esprit de l'approche de Carrillo [28].
Dans ce chapitre, nous proposons des notions de solutions entropiques équivalentes en prenant en considérons que la preuve d'existence de solution ne nécessite pas l'existence de trace au bord. Par contre la notion de trace au bord facile à obtenir pour le problème stationnaire permettra obtenir l'unicité grâce à la comparaison "faible-fort" en passant par la théorie des semi groupes non linéaires. Une généralisation dans le cas d'un graphe maximal monotone quelconque pourra être envisagée notamment avec l'existence de trace forte établie dans l'Appendix *A* de cette thèse voir aussi [50]. Cette généralisation sera un travail en collaboration avec Boris Andreianov et Guy Vallet du Laboratoire de Mathématiques Appliqués, IPRA de l'université de Pau.

Dans le troisième chapitre, nous étudions la convergence vers une solution entropique du problème (E_p) avec flux nul au bord des solutions approchées par la méthode des volumes finis sur de maillage admissible. On introduit, un nouveau concept de solution appelé solution intégrale-processus, de nature purement technique, qui trouve son origine dans les difficultés rencontrées lors de l'étude de la convergence de notre schéma. Une suite de solutions approchées est obtenue en discrétisant le problème avec flux nul au bord par une méthode volumes finis implicite en temps, d'inspiration [42, 59] l'idée de solution intégrale-processus surgit alors en lien avec la compacité non-linéaire faible-* (voir, e.g., [42, 59]), en un sens proche des mesures de Young, de cette suite. Ce chapitre est un travail soumis pour publication et disponible sur le site Hal (Hyper Articles en Ligne).

Le dernier chapitre de cette première partie est consacré a l'analyse des résultats numériques obtenus et au rôle que joue certaines hypothèses énoncées dans les chapitres précédents.

0.2 Deuxième partie : Problème à frontière libre

La deuxième partie de la thèse concerne un cadre numérique d'étude de problème couplé d'équations paraboliques. Un problème à frontière libre non-linéaire est un système d'équations non-linéaires dont l'inconnu est le couple formé de la solution et du paramétrage de la frontière libre. Ces équations interviennent dans de nombreux modèles physiques. On peut citer par exemple la modélisation d'un phénomène de feux de brousse. L'interface (frontière libre) est décrit par le front de flamme qui se propage dans l'environnement considéré. Ces feux de brousse causent des millions de dégâts matérielles sans compter les victimes humaines chaque année à travers le monde et particulièrement en Afrique. Il convient de bien comprendre ce phénomène sur un plan scientifique en étant capable de prévoir la direction de propagation de la flamme. Ainsi, on pourra vite intervenir et ainsi sauver des vies.

0.2.1 Motivation physique

La motivation physique de ce travail est la combustion auto entretenue d'un milieu solide hétérogène formé de deux matériaux superposés horizontalement et de façon périodique. Le cas d'un milieu pério-

dique avec des striations verticales a été traité par Brauner, Namah et Schmidt-Lainé dans [20]. Dans cette thèse, nous allons considérer le problème dans le plan spatial (x, y) avec un domaine périodique de période un dans la direction y (voir Figure 2). On s'intéresse à l'existence des "solutions ondes", leurs propriétés physiques dans le temps et aussi du traitement numérique.
La plupart des études faites précédemment l'ont été pour un modèle faisant intervenir uniquement l'équation du front (voir e.g. [62], [60]). Bien que cette représentation géométrique peut s'avérer suffisante pour certains calculs, un modèle plus complet doit prendre en compte l'effet de la température sur la propagation. Dans ce cas, la propagation du front de flamme est alors représentée par le système couplé suivant formé par l'équation de propagation du front (H) couplée avec l'équation de la chaleur (P) :

$$(H)\begin{cases} \xi_t + rK(u_f)\sqrt{1+\xi_y^2} &= \epsilon\dfrac{\xi_{yy}}{1+\xi_y^2} \quad y \in]0,1[, \quad t>0 \\ \xi(t,1) &= \xi(t,0) \quad t>0, \\ \xi_y(t,1) &= \xi_y(t,0) \quad t>0, \\ \xi_{|_{t=0}} &= \xi_0(y) \quad y \in [0,1]. \end{cases}$$

$$(P)\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(\, d\, \nabla u) &= 0 \quad (x,y) \in \Omega_t, \quad t>0 \\ d\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(t,.,y) &= \theta\beta\mathcal{V}_n \quad (x,y) \in \Gamma_t, \quad t>0 \\ u(t,x,y) &= 0 \quad x \to -\infty \\ u(t,x,1) &= u(t,x,0) \\ u_y(t,x,1) &= u_y(t,x,0) \\ u_{|_{t=0}} &= u_0(x,y). \end{cases}$$

Le domaine spatial [4] repéré à chaque instant $t>0$ (voir la Figure 2) est donné par :

$$\begin{cases} \Omega_t = \{(x,y) \ \ / y \in]0,1[\text{ avec } x < \xi(t,y)\}, \\ \Gamma_t = \{(x,y) \ \ / x = \xi(t,y)\}, \\ \Gamma_0 = \partial\Omega_t \cap \{y=0\}, \\ \Gamma_1 = \partial\Omega_t \cap \{y=1\}. \end{cases}$$

Ici, l'inconnue $u = u(t,x,y)$ représente la température et l'hétérogénéité du milieu est caractérisée par le paramètre physique d qui représente la diffusivité thermique et le paramètre chimique r qui représente le taux de combustion. Ces deux paramètres dépendent uniquement de la variable d'espace y et sont périodiques. La fonction K est la fonction cinétique de type Arrhenius [5] et qui est généralement une fonction du type exponentielle. Les paramètres β et θ sont respectivement la quantité de chaleur dégagée et la fraction d'énergie produite qui sert à entretenir la combustion. Dans la suite, on normalise ces paramètres, en supposant que $\theta = \beta = 1$.
La dérivée normale au front est représentée par $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ et la vitesse normale au front par $\mathcal{V}_n$. Comme $\mathcal{V}_n$ est donnée par

$$\mathcal{V}_n = \frac{-\xi_t}{1+\xi_y^2},$$

4. Le domaine n'est pas fixe, car dépend du mouvement du front. C'est donc un problème à frontière libre.
5. En référence à la loi d'Arrhenius qui permet de décrire la variation de la vitesse d'une réaction chimique en fonction de la température en cinétique chimique.

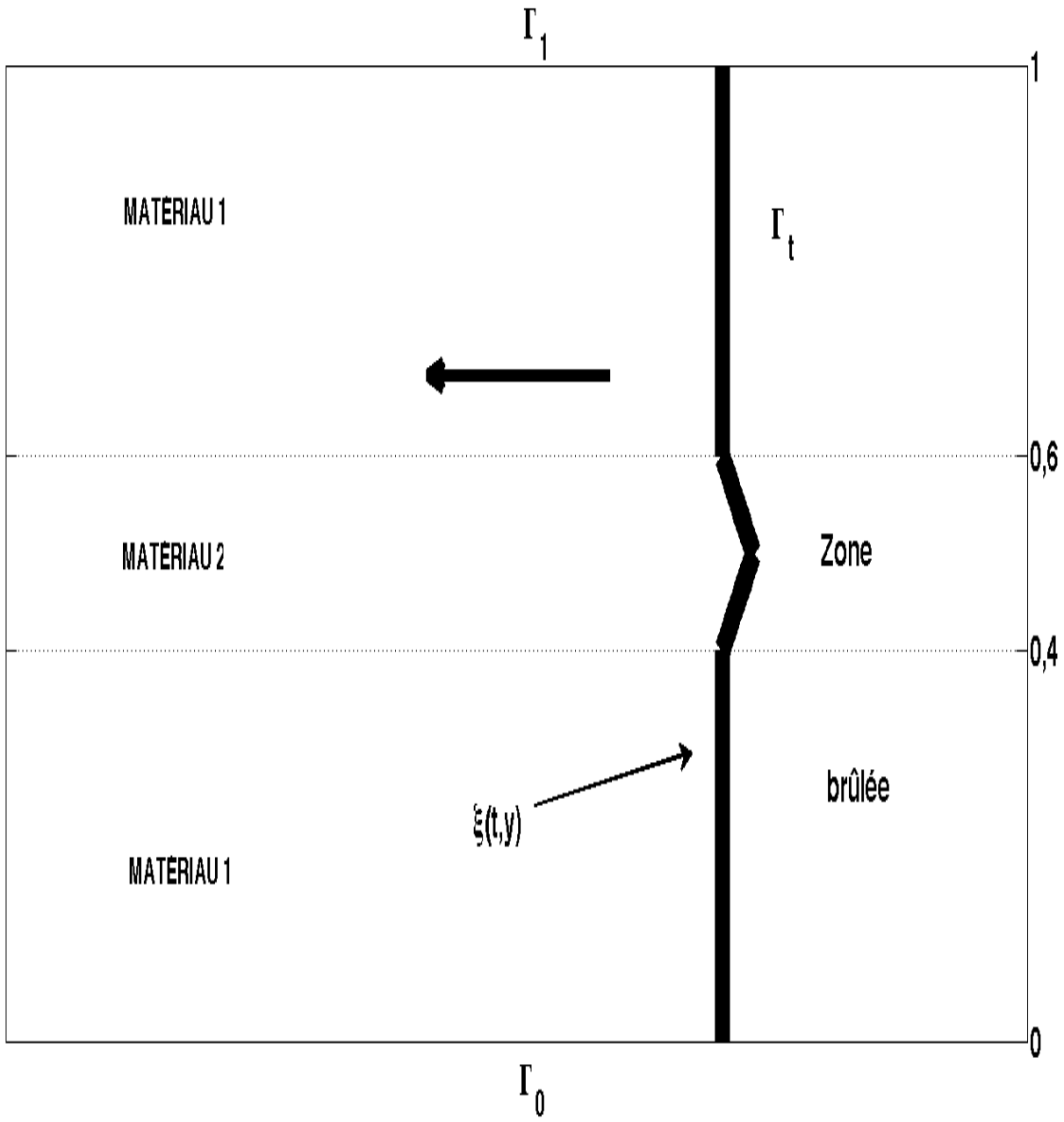

FIGURE 2 – Illustration de la propagation d'un front dans un matériau hétérogène.

l'équation du front peut s'écrire :

$$\mathcal{V}_n = rK(u) + \epsilon\mathcal{K},$$

où $\mathcal{K}$ est le terme de courbure (voir [62]). Cela signifie que le front se propage avec une vitesse normale qui dépend du taux de combustion du matériau via le paramètre r, de la température au front et de la courbure. Ceci semble être le cas le plus réaliste.
Dans un récent travail [2], N. Alibaud et G. Namah ont démontré que le système $(H-P)$ admet une solution onde ; c'est à dire un triplet (c, v, u) avec $c \in \mathbb{R}$, $v = v(y)$ et $u = u(x, y)$ tel que le front s'écrit sous la forme : $\xi(t, y) = -ct + v(y)$, la constante c étant la vitesse de propagation du front, v le profil établi du front et u la température stationnaire dans le domaine.
L'objectif principal de cette seconde partie de la thèse est la construction d'un schéma numérique pour la résolution du système $(H-P)$ et vérifier qu'en temps long, la solution numérique converge vers une solution onde telle que décrite plus haut.

0.2.2 Solution onde pour l'équation de Hamilton-Jacobi (H) dans le cas où $K(u) \equiv 1$

Nous passons en revue la notion de solution onde, ses propriétés et des résultats connus pour l'équation de Hamilton-Jacobi (H) avec $K(u) = 1$. Cette notion nous servira d'inspiration pour envisager l'étude du système $(H-P)$. On considérera dans un premier temps, une propagation sans courbure c'est à dire $\epsilon = 0$. Dans ce cas on a une équation de Hamilton-Jacobi d'ordre un. On sait que le problème (H) est bien posé dans la classe des solutions de viscosité (voir Crandall et Lions (cf [34]). En effet, pour tout $\xi_0 \in W^{1,\infty}([0,1])$ il existe une unique solution de viscosité $\xi \in W^{1,\infty}([0,1] \times [0,T])$ pour tout $T > 0$. On défini maintenant la notion de solution onde :

Définition 0.2.1. *Soit le paramètre physique r, périodique en y. On appelle solution onde du problème (H), le couple (c, v) où $c \in \mathbb{R}$ est la vitesse de propagation et $v = v(y)$ le profil du front de sorte que le front s'écrit sous la forme : $\xi(t, y) = -ct + v(y)$.*

Le théorème suivant donnera le comportement asymptotique de la solution de viscosité.

Théorème 0.2.2. (G. Namah, [60]) Supposons $\epsilon = 0$. Alors la solution de viscosité ξ converge quand $t \to +\infty$ vers une solution onde se propageant à la vitesse $r^\star = \sup_y(r(y))$.

Dans le cas d'un milieu homogène, la solution onde se propage avec la vitesse r représentant le taux de combustion. Si la propagation se fait dans un milieu hétérogène composé par exemple de deux matériaux (cas qui nous intéresse), la solution onde se propage avec la vitesse de propagation du milieu le plus conducteur. Ce résultat peut être observé sur un point de vue numérique. En partant d'un front initial droit, on constate qu'à partir d'un certain temps, le profil du front devient stationnaire et la vitesse de propagation est constante (voir Figure 3). Les calculs nous montrent bien qu'a partir du moment où le profil devient stationnaire, le front se propage avec la vitesse du milieu le plus conducteur (sur la Figure 3, on voit bien que le milieu le moins conducteur est compris entre $y = 0.4$ et $y = 0.6$). Ces mêmes

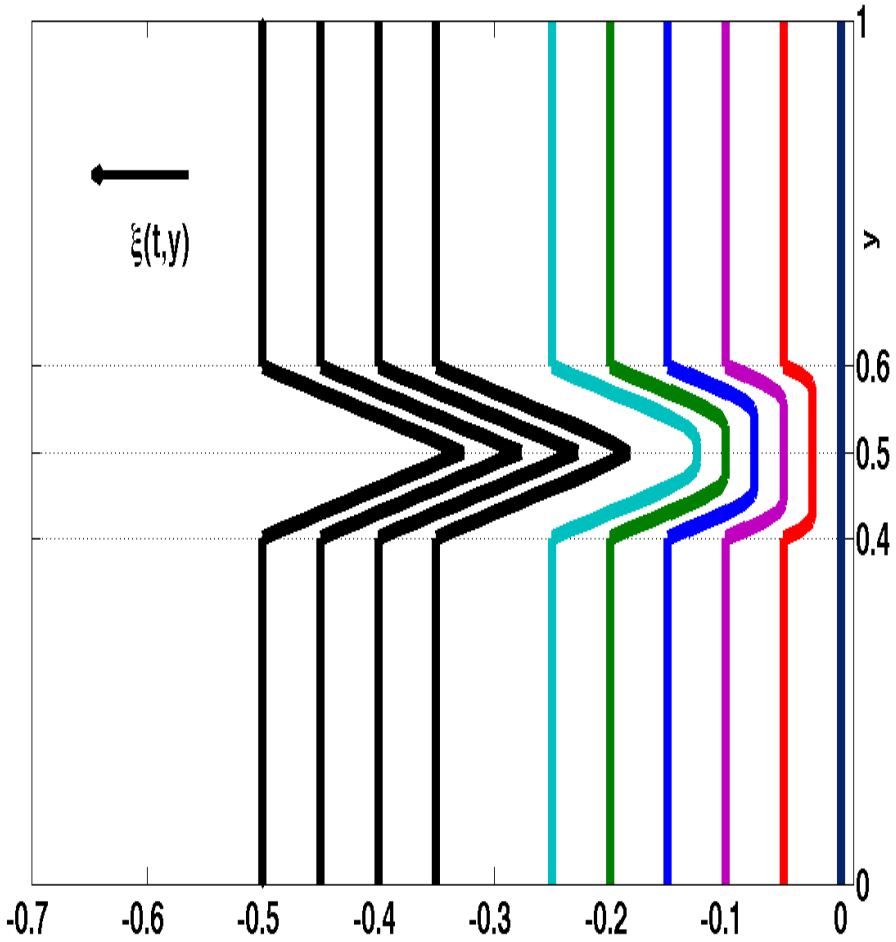

FIGURE 3 – Convergence vers une solution onde avec un front initial droit

observations sont aussi valables pour un front quelconque (voir la Figure 4 pour l'exemple d'un front initial sinusoïdal).

Notons aussi que dans le cas d'une propagation avec terme de courbure c'est à dire $\epsilon \neq 0$, une extension du théorème 0.2.2 existe (voir [33]). La solution onde se propage avec une vitesse $r_\epsilon^\star$ qui tend vers $r^\star$ lorsque ϵ tend vers zéro.

0.2.3 Résultats principaux de la deuxième partie

Cette partie de la thèse comporte également quatre chapitres. Donnons un résumé des principaux résultats obtenus.

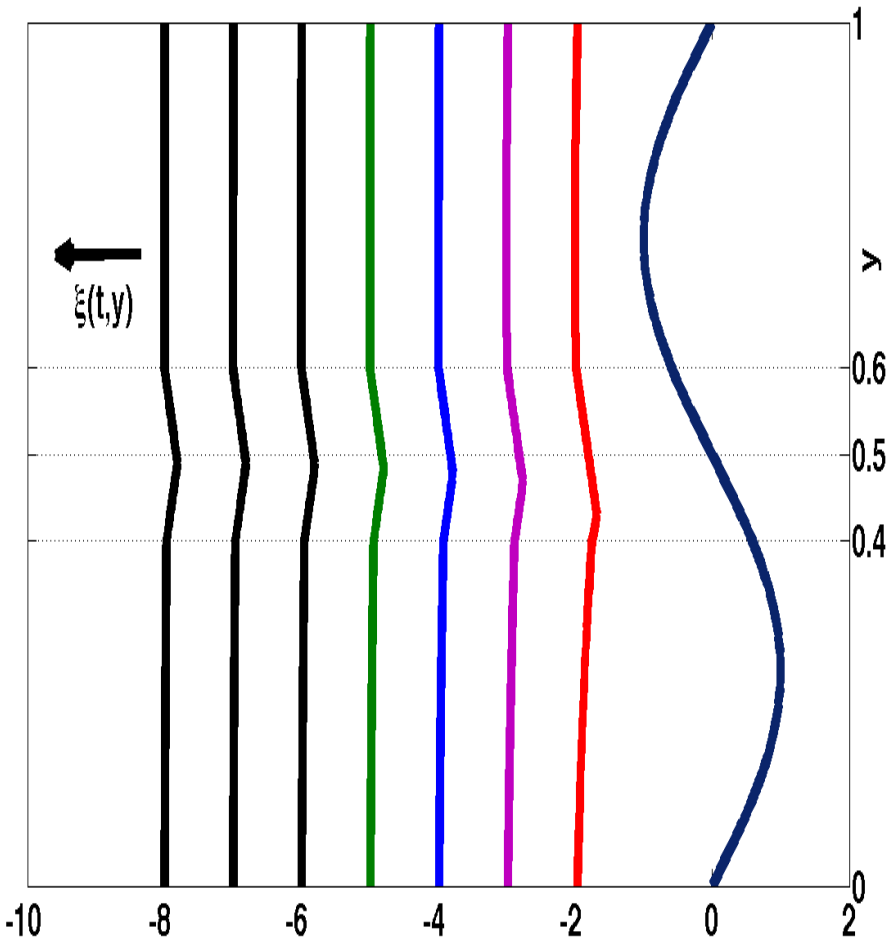

FIGURE 4 – Convergence vers une solution onde avec un front initial sinusoïdal

Dans le Chapitre 5, on étudie une propagation purement géométrique du front (en négligeant l'effet de la température). Différents cas de figures sont abordés pour mieux comprendre le rôle de certains paramètres, à savoir r et ϵ dans l'évolution du front.
Nous proposons une définition de propagation monotone dont l'intérêt réside dans la preuve de monotonie du schéma qui sera proposé pour le système $(H-P)$. Cette notion de propagation monotone suppose en résumé que le front se propage pour tout temps donné vers les x négatifs. Nous donnons une condition suffisante sur les paramètres r, d et la donnée initiale pour avoir une telle propagation. Ce résultat, nous permet de prouver la monotonie du schéma numérique que nous proposons pour le système $(H-P)$ au Chapitre 7.

Dans le Chapitre 6, on s'intéresse au cas unidimensionnel avec $K(u) \equiv 1$ et un front initial donné par une droite en milieu homogène :

$$(H_0)\begin{cases} \xi_t & = r, \quad t>0 \\ \xi(0) & = 0. \end{cases}$$

$$(P_0)\begin{cases} u_t - du_{xx} & = 0 & \text{dans } x<\xi(t),\ t>0 \\ du_x & = r & \text{sur } x=\xi(t),\ t>0 \\ u(t,x) & \to 0 & x\to-\infty\ ,\ t>0 \\ u(0,x) & = u_0(x) & \text{dans } x\le\xi(0). \end{cases}$$

L'étude de ce problème simplifié est très utile car elle nous permet de comprendre la "prise en compte " de la condition de Neumann au front. Ainsi, on propose un schéma numérique pour le système (H_0-P_0) en passant par une technique de changement d'inconnue pour la prise en compte de la température au front. Nous prouvons aussi de façon analytique la convergence vers une solution onde en un temps long (ici la solution onde sera un couple (r,u), r la vitesse de propagation du front et u la température stationnaire).

Le Chapitre 7 consacré à l'étude de notre système $(H-P)$ comporte plusieurs parties. En premier lieu, on procéde à un changement de variable, l'objectif de ce changement de variable est de se ramener à un domaine spatial fixe. L'inconvénient de cette transformation, est qu'on passe d'une équation simple (équation de la chaleur), à une équation plus complexe (une équation de convection-diffusion), mais avec pour avantage un domaine spatial fixe qui est plus facile pour une discrétisation numérique. Puis, nous proposons un schéma pour le système $(H-P)$. La discrétisation de la température au front se fera à travers une généralisation de la technique adoptée au Chapitre 6 dans le cas unidimensionnel. Enfin, on prouve la monotonie du schéma grâce à une hypothèse supplémentaire sur la propagation du front (la condition de propagation monotone vue au Chapitre 5).

Pour finir, dans le dernier chapitre de cette deuxième partie, on vérifie par des tests numériques que la solution numérique converge pour un temps long vers une solution onde. Plusieurs illustrations numériques sont proposées.

Rappels et Notations générales

L'objectif de cette partie est de rappeler l'essentiel des notions et résultats classiques qui seront utilisés tout au long de cette thèse. En premier lieu, on rappelle quelques définitions et résultats sur les espaces de Lebesgue, les espaces de Sobolev et les espaces de mesures. On présentera ensuite quelques résultats de compacité. La section 0.5 est consacrée à quelques fonctions et inégalités élémentaires. Dans la section 0.6, on donnera des résultats sur des solutions d'équations différentielles. Enfin, dans la section 0.7, on rappelle divers techniques utiles pour des résultats d'analyse numérique que nous utiliserons dans cette thèse.

0.3 Espaces de fonctions et de mesures

On suppose que Ω est un ouvert borné régulier (Lipschtzienne ou de classe C^1) de $\mathbb{R}^\ell$. L'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω est noté $\mathcal{D}(\Omega)$. Pour $1 \leq p < \infty$, on note L^p l'espace défini par

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable telle que } \int_\Omega |u|^p dx < +\infty\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

et pour $p = \infty$, on note

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable telle que } ess - \sup_\Omega |u| < +\infty\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty} = \text{ess} - \sup_\Omega |u|.$$

On suppose que X désigne un espace de Banach et $T > 0$. On désigne les espaces suivants :

$$C([0,T];X) = \{u : [0,T] \longrightarrow X \text{ continue }\}$$

$$L^p(0,T;X) = \{u : [0,T] \longrightarrow X \text{ mesurable telle que } \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < \infty\}, 1 \leq p < \infty$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

et

$$L^\infty(0,T;X) = \{u : [0,T] \longrightarrow X \text{ mesurable telle que : } \exists\, C > 0; \|u(t)\|_X < C p.p.t\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf\{C > 0; \|u(t)\|_X < C p.p.t\}.$$

Nous définissons ensuite les espaces de Sobolev $W^{1,p}$ qui s'interprètent comme des fonctions d'énergie finie en physique :

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \exists f_1, ..., f_\ell \in L^p(\Omega), \int_\Omega f_i \xi dx = -\int_\Omega u \frac{\partial \xi}{\partial x_i} dx, \forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

et pour $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{1,\infty}} = \left(\|u\|_{L^\infty} + \|\nabla u\|_{L^\infty}\right).$$

On désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. Le dual de $W_0^{1,p}$ est noté $W^{-1,p'}$ avec $p' = \frac{p}{p-1}$. Dans le cas où $p = 2$, on note par H^1 l'espace $W^{1,2}$. On désigne par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Le dual de $H_0^1(\Omega)$ est noté $H^{-1}(\Omega)$. On peut caractériser les éléments de $H^{-1}(\Omega)$ comme suit : $V \in H^{-1}(\Omega)$, alors il existe $v_0, ..., v_\ell \in L^2(\Omega)$ telles que

$$\langle V, \xi \rangle = \int_\Omega v_0 \xi + \sum_{i=1}^{\ell} V_i \frac{\partial \xi}{\partial x_i} dx$$

et $\|V\|_{H^{-1}} = \max_{1 \le i \le \ell} \|V_i\|_{L^2}$.
L'espace $H_0^1(\Omega)$ est constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$ puisque tel est le cas des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$.
En dimension $\ell \geq 2$, les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont pas continues. Comme pour toute fonction mesurable, on ne peut donc parler de la valeur ponctuelle d'une fonction $v \in H^1(\Omega)$ que 'presque partout' dans Ω. En particulier, il n'est pas clair de savoir si on peut définir la 'valeur au bord', ou 'trace' de v sur le bord $\partial\Omega$ car $\partial\Omega$ est un ensemble négligeable ou de mesure nulle. Fort heureusement pour les problèmes aux limites, il y a tout de même un moyen de définir la trace $v_{|\partial\Omega}$ d'une fonction de $H^1(\Omega)$. Ce résultat essentiel, appelé théorème de trace, est le suivant :

Théorème 0.3.1. *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^\ell$. On définit l'application trace*

$$\begin{aligned} \gamma : H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C(\overline{\partial\Omega}) \\ v &\longmapsto \gamma v = v_{|\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Cette application γ se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ notée encore γ. En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in H^1(\Omega)$ on a

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Grâce à ce théorème, on peut donc parler de la valeur d'une fonction de $H^1(\Omega)$ sur le bord $\partial\Omega$. Ce résultat est remarquable car il n'est pas vrai pour une fonction de $L^2(\Omega)$.
Le résultat suivant permet d'avoir une convergence pour une suite dans $L^2(]0,T[\times\Omega)$ au bord (au sens des traces) sous réserve d'une estimation a priori dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$.

Lemme 0.3.2. *Considérons $\Psi \in L^2(]0,T[\times\Omega)$ et soit $(\Psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant pour tout $j \in \mathbb{N}$:*

$$\|\Psi_j\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C \text{ et } \Psi_j \longrightarrow \Psi \text{ dans} L^2(Q).$$

Alors $\gamma\Psi_j \longrightarrow \gamma\Psi$ dans $L^2(\Sigma)$, avec γ l'opérateur trace.

Nous n'avons pas trouvé dans la littérature une preuve détaillée de ce théorème néanmoins nous proposons une preuve dans le Chapitre 1 (voir Lemme 1.5.8).
Un autre espace fonctionnel qu'on utilise dans cette thèse est l'espace des mesures. On désigne par $M(\Omega)$ ensemble des formes linéaires continues positives sur $C_c(\Omega)$. L'espace $C_c(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions continues à support compact sur Ω.
Un élément de $M(\Omega)$ est représenté comme suit :

$$\langle \mu, g\rangle = \int_\Omega g d\mu \quad \forall g \in C_c(\Omega). \tag{21}$$

A présent, on rappelle un résultat de convergence dans l'espace des mesures.

Lemme 0.3.3. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^\ell$ tel que $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Soit $\{\nu_k\} \subset M(\Omega)$ une suite bornée dans $M(\Omega)$. Alors pour $1 \leq q < \frac{d}{d-1}$ il existe $\nu \in W^{-1,q}(\Omega)$ et une sous suite $\left\{\nu_{k_j}\right\} \subset \{\nu_k\}$ telle que $\nu_{k_j} \to \nu$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$ quand $j \to +\infty$.*

Pour la preuve on renvois le lecteur au livre "Weak and Measure-Valued Solutions to Evolutionary PDEs" page 38.
On énonce le Théorème de Lusin

Théorème 0.3.4. *Pour un intervalle $[a,b]$, soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $E \subset [a,b]$ tel que la restriction à E de f est continue (pour la topologie induite sur E) et la mesure de Lebesgue du complémentaire de E est inférieure à ϵ.*

0.4 Résultat de compacité

Dans cette section, on rappelle quelques résultats classiques de compacité.

Définition 0.4.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^\ell$, $T > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de l'espace $L^\infty(]0,T[\times\Omega))$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens non linéaire faible étoile noté $\overset{nl-*}{\rightharpoonup}$ s'il existe une fonction $u \in L^\infty(]0,T[\times\Omega\times]0,1[)$ tel que :*

$$\forall h \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}),\quad h(u_n) \rightharpoonup \int_0^1 h(u(.,\alpha))d\alpha \text{ weakly } -* \text{ dans } L^\infty(]0,T[\times\Omega). \tag{22}$$

Cette forme de convergence permet de passer à la limite sur des schémas numériques volumes finis et de montrer l'existence d'une notion de solution appelée solution processus entropique introduite dans la thèse de Claire Chainais-Hillairet [30] (voir Chapitre 3 pour l'adaptation de cette notion pour le cas du problème que nous étudions).
On peut noter que la convergence non linéaire faible étoile correspond à la convergence vers une mesure de Young. Avec les notations de la Définition 0.4.1, la suite u_n converge vers la mesure de Young $(\mu_{t,x})_{(t,x)\in]0,T[\times\Omega}$ définie par

$$\langle \mu_{t,x}, h\rangle = \int_0^1 h(u(t,x,\alpha))d\alpha \quad \forall h \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ pour presque tout } (t,x) \in]0,T[\times\Omega. \tag{23}$$

Lemme 0.4.2. *Supposons que la suite $u_n(.) \overset{nl-*}{\rightharpoonup} \mu(.,\alpha)$ au sens de le convergence non linéaire faible étoile, et soit g une fonction continue et croissante telle que $g(u_n(.)) \longrightarrow \theta$ fortement dans $L^1(]0,T[\times\Omega)$. Alors, $\theta = g(\mu(.,\alpha)) = g(u)$ avec $u(t,x) = \displaystyle\int_0^1 \mu(t,x,\alpha)d\alpha$.*

Pour la preuve de ces résultats, on pourra se référer au Chapitre 3 (voir aussi [42]).

Théorème 0.4.3. ***injection de Sobolev***
Soit Ω un ouvert borné de R^ℓ de bord Lipschitzien. Les assertions suivantes sont vraies

1. *Si $p < \ell$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^\star}(\Omega)$, avec $p^\star = \frac{\ell p}{\ell - p}$, et l'injection est continue, c'est à dire qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\|u\|_{L^{p^\star}} \leq C\|u\|_{W^{1,p}}$: on note ceci*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^\star}(\Omega).$$

   On a en particulier

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{\ell}{\ell-1}}(\Omega) \text{ et } W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \text{ pour } \ell = 1.$$

2. *Si $p > \ell$, alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,1-\frac{\ell}{p}}(\Omega)$$

   où, pour $\alpha > 0$, $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions Höldériennes d'exposant α.

Théorème 0.4.4. ***Fréchet-Kolmogorov****(voir dans* H. Brézis [21])
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^\ell$ et $\omega \subset\subset \Omega$. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ avec $p \in [1,+\infty[$. On suppose que :

$$\forall \epsilon > 0; \exists \delta > 0; \delta < dist(\omega, \mathbb{R}^\ell\backslash\Omega) \text{ tel que}$$

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} \leq \epsilon \forall h \in \mathbb{R}^\ell \text{ avec } |h| < \delta \text{ et } \forall f \in \mathcal{F}$$

où $\tau_a f$ désigne la translatée de f par h, c'est à dire $\tau_h f(x) = f(x-h)$.
Alors $\mathcal{F}_{|_\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

Théorème 0.4.5. ***Dunford-Pettis****(voir dans* H. Brézis [21])
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^\ell$. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^1(\Omega)$.
Alors $\mathcal{F}$ est relativement compact pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$ si et seulement si il est équi-intégrable.

Définition 0.4.6. *Une partie $\mathcal{F}$ de $L^1(\Omega)$ est dite équi-intégrable si :*

$$\lim_{a\to+\infty}\Big[\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_{|f|\geq a}|f|dx\Big]=0.$$

0.5 Fonctions et inégalités élémentaires

Dans cette thèse, nous utiliserons les fonctions *sign* et leurs approximations :

$$sign^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad r \mapsto sign^+(r) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r > 0 \\ 0 & \text{si} \quad r \leq 0 \end{cases}$$

$$sign^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad r \mapsto sign^-(r) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r > 0 \\ -1 & \text{si} \quad r \leq 0 \end{cases}$$

$$sign : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad r \mapsto sign(r) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r > 0 \\ 0 & \text{si} \quad r = 0 \\ -1 & \text{si} \quad r < 0 \end{cases}$$

$$sign_\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad r \mapsto sign_\sigma(r) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r > \sigma \\ \frac{r}{\sigma} & \text{si} \quad |r| \leq \sigma \\ -1 & \text{si} \quad r < -\sigma \end{cases}$$

$$sign_\sigma^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad r \mapsto sign_\sigma^+(r) = \tfrac{1}{\sigma}\min(r^+, \sigma)$$

$$sign_\sigma^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad r \mapsto sign_\sigma^+ = \tfrac{1}{\sigma}\max(-r^-, -\sigma)$$

où $r^+ = \max(r, 0)$ et $r^- = \max(-r, 0)$.
Nous utiliserons aussi la fonction troncature définit comme :

$$T_{[a,b]} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad r \longmapsto T_{[a,b]}(r) = \begin{cases} a & \text{si} \quad r < a, \\ r & \text{si} \quad a \leq r \leq b, \\ b & \text{si} \quad r > b. \end{cases}$$

On rappelle le résultat suivant dont la preuve se trouve dans [41], et aussi dans le Chapitre 3.

Lemme 0.5.1. *Soit $G : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone Lipschitzienne, de constante de Lipschitz $L > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $c, d \in [a, b]$, on a*

$$\left|\int_c^d \Big(G(x) - G(c)\Big)dx\right| \geq \frac{1}{2L}\Big(G(d) - G(c)\Big)^2.$$

Passons maintenant aux opérateurs maximaux monotones. H désigne un espace prehilbertien dont le produit scalaire est noté $\langle ., . \rangle$ et la norme $\|.\|$.

Definition 0.5.1. *Soit $T : H \longrightarrow H$ une multifonction.*[6] *Dans la suite on identifiera l'opérateur par son graphe. On note par $G(T) = \{(x, y) \in H \times H : \quad y \in Tx\}$ le graphe de l'opérateur T. On dit que T est monotone si :*

$$\forall (x, y) \in G(T),\ \forall (x', y') \in G(T) \quad \langle y - y', x - ' \rangle \geq 0. \tag{24}$$

L'opérateur T est maximal monotone s'il est monotone et s'il n'existe pas d'opérateur monotone T_1 tel que le graphe $G(T)$ est strictement inclus dans le graphe $G(T_1)$ c'est à dire

$$\Big[\langle y - y', x - x' \rangle \geq 0,\ \ \forall (x, y) \in G(T)\Big] \ \Rightarrow\ (x', y') \in G(T). \tag{25}$$

Notons que H peut être remplacé par un espace de Banach réflexif. Voici quelques exemples de graphe maximal monotone :

$$\beta(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Le graphe "coin" définit comme suit :

$$\beta_c(x) = \begin{cases} -0 & \text{si } x < 0, \\ [0, +\infty[& \text{si } x = 0, \\ \emptyset & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Le graphe "réflexion" définit comme suit :

$$\beta_r(x) = -\beta_c(-x).$$

A cela il faut aussi noter les fonctions "sign" qui sont aussi des graphes maximaux monotones définit sur $\mathbb{R}$.

On rappelle aussi "le crochet" qui est un élément important dans la théorie des semi-groupes non linéaires largement utilisée dans cette thèse.

Pour tout $\lambda \neq 0$ et X un espace de Banach, on définit le crochet $[,]$ comme suit :

$$\begin{aligned} [,] : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\longmapsto [a, b] = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\|a + \lambda b\|_X - \|a\|_X}{\lambda} \end{aligned}$$

où $\|.\|_X$ désigne la norme de X. Rappelons quelques propriétés du crochet. Tout d'abord le crochet est upper-semi continue, soit $a, b, c \in X$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors :

$$\begin{aligned} &[\alpha a, \beta b] = |\beta|[a, b] \text{ si } \alpha\beta > 0 \\ &[a, \alpha a + b] = \alpha \|a\|_X + [a, b] \\ &[a, b] \geq 0, \text{ si et seulement si } \|a + \lambda b\| \geq \|a\| \text{ pour } \lambda \geq 0 \\ &[a, b] \geq -[a, -b] \\ &[a, b + c] = [a, b] + [a, c]. \end{aligned}$$

Notons que dans le cas où $X = L^1(\Omega)$ alors $[a, b]_{L^1(\Omega)} = \displaystyle\int_\Omega sign(a) b dx + \int_{\{a=0\}} |b| dx.$

6. C'est une application définie sur H à valeur dans les parties de H : si $x \in H$, $T(x) \equiv Tx$ est un sous ensemble éventuellement non vide de H.

0.6 Solution des équations différentielles

On énonce d'abord le théorème de Cauchy-Peano-Arzelà qui garantit qu'un problème de Cauchy possède toujours au moins une solution locale, sous réserve que la fonction définissant l'équation différentielle soit continue

Théorème 0.6.1. ***Cauchy-Peano-Arzelà***
Soient
• *f une fonction continue à valeur dans $\mathbb{R}^\ell$, définie sur un cylindre compact $K = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B(x_0, r)}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\ell$.*
• *M un majorant de la norme de f sur K.*
• $c = \min(a, \frac{r}{M})$.
Alors, il existe une solution

$$x : [t_0 - c, t_0 + c] \longrightarrow \overline{B(x_0, r)}$$

au problème de Cauchy

$$x(t_0) = x_0 \text{ et } x' = f(t, x).$$

Dans certaines méthodes d'approximation numérique, un outil pour trouver l'existence d'une solution discrète d'un schéma implicite en temps est basé sur les arguments de degré topologique. Considérons que l'équation suivante :

$$\mathcal{F}(x) = y, \tag{26}$$

avec $\mathcal{F} : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^\ell$. L'idée principale du degré est de suivre les solutions au fur et a mesure que l'on modifie $\mathcal{F}$. On commence par partir d'une fonction $\mathcal{F}_0$ assez simple, pour laquelle on sait dire qu'il existe des solutions à $\mathcal{F}_0(x) = y$, et on cherche à modifier continûment cette fonction pour arriver à $\mathcal{F}$ (en terme précis, on utilise une homotopie entre $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}$), tout en suivant le devenir des solutions de (26) au cours de cette modification pour espérer en conserver au moins une jusqu'au bout, qui sera donc solution de $\mathcal{F}(x) = y$. Ceci n'est bien sur pas faisable en général : les solutions que l'on suit peuvent sortir du domaine, ou bien disparaitre tout simplement (prendre une parabole sur $\mathbb{R}$ orientée vers le haut et ayant deux zéros, et la monter progressivement : à un moment donné, ses deux zéros se rejoignent, puis disparaissent). Dans notre construction du degré, il faudra donc éliminer ces deux situations. La première (fuite d'une solution par le bord du domaine concerné) sera évitée en ne regardant que des fonctions pour lesquelles les solutions éventuelles de $\mathcal{F}(x) = y$ restent éloignées du bord du domaine. La deuxième situation (disparition des solutions principalement parce qu'elles se rassemblent avant de s'évanouir) sera réglée en collant a chaque solution de $\mathcal{F}(x) = y$ une étiquette (un signe : qu'on appellera degrés) indiquant si elle est susceptible ou non de disparaître après s'être rassemblée avec une de ses consoeurs.

Definition 0.6.1. *Soit ε et E des espaces de Banach et A un fermé de ε. Une application $\mathcal{F} : A \longrightarrow E$ est dite compacte si elle est continue et si pour tout $R > 0$, $\mathcal{F} : (A \cap \overline{B}(0, R))$ est relativement compact dans E. Il est équivalent de dire que, pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ bornée dans A, on peut extraire de $(\mathcal{F}(x_n))_{n\geq 1}$ une suite qui converge dans E.*

Voici le résultat d'existence du degré topologique en même temps que ses propriétés principales.

Théorème 0.6.2. *(Leray, Schauder) Soit E un espace de Banach et $\mathcal{A}$ l'ensembles des triplets $(Id - \mathcal{F}, \Omega, y)$ où Ω est un ouvert borné de E, $y \in E$ et $\mathcal{F} : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ est compact et telle que $y \notin (Id - \mathcal{F})(\partial\Omega)$. Il existe une application degre : $\mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{Z}$ telle que*
• *Si $y \in \Omega$ alors $degre(Id, \Omega, y) = 1$.*
• *Si Ω_1 et Ω_2 sont des ouverts disjoints inclus dans Ω tels que $y \notin (Id - \mathcal{F})(\bar{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2))$ alors $degre(Id - \mathcal{F}, \Omega, y) = degre(Id, \Omega_1, y) + degre(Id, \Omega_2, y)$.*
• *Si $h : [0,1] \times \bar{\Omega} \longrightarrow E$ est compact, $y \in C([0,1]; E)$, et pour tout $t \in [0,1]$, $y(t) \notin (Id - h(t,.))(\partial\Omega)$, alors $degre(Id - h(0,.), \Omega, y(0)) = degre(Id - h(1,.)\Omega, y(1))$.*
L'application degre est appelée degré topologique de Leray-Schauder.

Un autre résultat qu'on utilisera dans cette thèse notamment au Chapitre 5 : le principe de maximum faible pour des équations paraboliques.
On considère l'équation parabolique suivant :

$$V_t + LV = f \text{ dans } Q =]0, T[\times\Omega$$

où L est un opérateur différentiel de la forme

$$LV = -\sum_{i,j=1}^{\ell} a^{i,j} V_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{\ell} b^i V_{x_i} + cV,$$

les coefficients $a^{i,j}$, b^i, c sont continues et bornés. On suppose qu'il existe $\theta > 0$ tel que :

$$\forall (t,x) \in]0, T[\times\Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^\ell; \quad \sum_{i,j=1}^{\ell} a^{i,j}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2,$$

qui est une condition d'uniforme parabolicité. On suppose de plus $a^{i,j} = a^{j,i}$ $(i, j = 1, ..., \ell)$. On énonce alors un résultat appelé principe de maximum faible.

Proposition 0.6.3. *Soit $V \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ et $c \geq 0$ dans Q.*
(i) Si $V_t + LV \leq 0$ dans Q.
Alors

$$\max_{(t,y)\in\overline{Q}} V \leq \max_{(t,y)\in\overline{Q}\backslash Q} V^+$$

(ii) Si $V_t + LV \geq 0$ dans Q.
Alors

$$\min_{(t,y)\in\overline{Q}} V \geq -\max_{(t,y)\in\overline{Q}\backslash Q} V^-.$$

En particulier, si $V_t + LV = 0$ à l'intérieur de Q, alors

$$\max_{(t,y)\in\overline{Q}} |V| = \max_{(t,y)\in\overline{Q}\backslash Q} |V|.$$

C'est à dire V atteint son maximum et son minimum sur le bord parabolique $\overline{Q}\backslash Q$.

0.7 Résultats techniques utilisés dans l'analyse numérique

En algèbre linéaire, une matrice carrée à coefficients réels ou complexes est dite à diagonale strictement dominante lorsque le module de chaque terme diagonal est strictement supérieur à la somme des modules des autres termes de sa ligne. On rappelle une propriété d'une telle matrice :

Lemme 0.7.1. *Si $M = (m_{i,j})_{i,j\in[0,1]}$ est une matrice à diagonale strictement dominante alors M est inversible.*

On énonce ensuite un résultat "géométrique" appelé la formule du centre.

Lemme 0.7.2. *(Formule du centre) Soit ϕ un polynôme de degré un et S une surface donnée. Alors*

$$\int_S \phi dS = |S|\phi(c). \tag{27}$$

Avec $|S|$ la mesure de la surface et c le point situé au centre de la surface.

Preuve. Ce résultat est basé sur des formules dites de quadrature, de type

$$\int_S \phi(x)dS \approx \sum_{k=1}^{K} w_k|S|\phi(c_k)$$

où les c_k sont des points choisis dans S et les w_k sont des coefficients positifs de pondération (indépendants de S), de sorte que pour tout $\phi \in \mathbb{P}_1$ on a :

$$\forall \phi \in \mathcal{P}_1 \quad \int_S \phi(x)dS = \sum_{k=1}^{K} w_k|S|\phi(c_k). \tag{28}$$

Donc (il faut prendre dans (28) :$\phi(x) = 1$)

$$w_1 + ... + w_K = 1.$$

La formule de centre s'obtient donc en prenant $K = 1$ et dans ce cas le point c_k sera le centre de gravité de la surface S. □

Un autre résultat dans le même ordre d'idée est le suivant :

Lemma 0.7.1. *(voir* J .Droniou [35]) Soit K un ouvert polygonal non vide de $\mathbb{R}^\ell$. Pour tout $\sigma \in \bar{\varepsilon}_K$, on désigne par x_σ le centre de gravité de σ et par $n_{K,\sigma}$ le vecteur normal extérieur à σ de K. Alors, pour tout vecteur $\vec{V} \in \mathbb{R}^\ell$ et pour tout point $x_K \in K$, on a :

$$m(K)\vec{V} = \sum_{\sigma\in\bar{\mathcal{E}}_K} m(\sigma)\vec{V}.n_{K,\sigma}(x_\sigma - x_K). \tag{29}$$

Maintenant, plaçons nous dans un maillage admissible O de $\Omega \subset \mathbb{R}^\ell$. Considérons la fonction constante par morceaux $u_{O,\delta t}(t,x)$ définie par :

$$u_{O,\delta t}(t,x) = u_K^{n+1} \text{ si } x \in K \text{ et } t \in]n\delta t, (n+1)\delta t], \text{ p.p.} \tag{30}$$

avec $K \subset \Omega$ un volume de contrôle donné, et $\delta t > 0$. En supposant que K et L sont deux volumes voisins, on définit le gradient discret comme suit :

$$\nabla_{\widehat{K|L}} u_O := \ell \frac{u_L^{n+1} - u_K^{n+1}}{d_{K,L}} \eta_{K,L} \tag{31}$$

où $K|L$ représente l'interface entre K et L, $\widehat{K|L}$ représentant le "diamant" construit a partir des volumes de contrôles K et L, $d_{K,L}$ est la distance entre le centre x_K du volume K et x_L de L et enfin $\eta_{K,L}$ le vecteur normal extérieur dirigé de K vers L (voir le Chapitre 3 pour plus de détails sur la compréhension du maillage). On donne le résultat de convergence discrète suivant :

Lemme 0.7.3. *Considérons la famille des fonctions $u_{O,\delta t}$ satisfaisant les estimations suivantes*

$$\sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K \in O} m(K)(u_K^{n+1})^2 \leq C; \quad \sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K|L} \tau_{K|L} (\nabla_{\widehat{K|L}} u_O)^2 \leq C. \tag{32}$$

Alors il existe $u \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$ et une sous suite extraite encore notée $u_{O,\delta t}$ tel que $u_{O,\delta t} \to u$ converge faiblement dans $L^2(]0,T[\times\Omega)$ et $\nabla_O u \rightharpoonup \nabla u$ dans $(L^2(]0,T[\times\Omega))^\ell$ faiblement.

Première partie

Degenerate hyperbolic-parabolic equation with boundary condition

Chapitre 1

Entropy formulation of degenerate parabolic equation with zero-flux and Robin boundary condition

1.1 Zero-flux boundary problem

Let Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^\ell$ with a Lipschitz boundary $\partial\Omega$ and η the unit normal to $\partial\Omega$ outward to Ω. We consider the zero-flux boundary problem :

$$(P_1)\begin{cases} u_t + \operatorname{div} f(u) - \Delta\phi(u) &= 0 & \text{in} \quad Q = (0,T)\times\Omega, \\ u(0,x) &= u_0(x) & \text{in} \quad \Omega, \\ (f(u) - \nabla\phi(u)).\eta &= 0 & \text{on} \quad \Sigma = (0,T)\times\partial\Omega. \end{cases}$$

We assume that the convection flux f is a Lipschitz-continuous function. Moreover, we require that

$$f(0) = 0, \quad f(u_{max}) = 0 \text{ for some } u_{\max} > 0. \tag{H1}$$

Accordingly, the initial datum is a measurable function taking values in the interval $[0, u_{\max}]$, which will be the invariant domain for the solutions of (P_1) under assumption (H1). With a slight abuse of terminology, we will say that f is compactly supported in order to refer to (H1) along with the choice of $[0, u_{max}]$-valued data. Further, the function ϕ is continuous non decreasing on $[0, u_{\max}]$. This assumption means that the problem (P_1) is of degenerate parabolic-hyperbolic type. For the sake of simplicity, we will treat the case where $\phi(.)$ is constant on $[0, u_c]$ with $0 \le u_c \le u_{\max}$ and $\phi(.)$ is strictly increasing on $[u_c, u_{\max}]$. The case of a general ϕ can be treated without additional difficulty (see Carrillo [28]).

The framework (E_p) includes hyperbolic conservation law as a particular case and it is well known that in general, global classical solutions may not exist ; and that weak solution in the sense of distributions may not be unique. The standard way to fix this problem is to work with the so-called entropy solution (see Kruzhkov [49] for the case of conservation laws, and Carrillo [28] for the adaptation of this notion to the case of degenerate elliptic-parabolic-hyperbolic equation). There exist many papers in

the literature dealing with Dirichlet boundary condition for (E_p). The main reference is the fundamental paper of Carrillo for homogenous Dirichlet boundary condition [28] which establishes the uniqueness technique. In [68], Rouvre and Gagneux prove also existence and uniqueness for homogenous Dirichlet condition under strong regularity requirement on the data. The general Dirichlet boundary condition received much attention, see Mascia and al [58], Michel and Vovelle [59], Vallet [71]. However, the Dirichlet boundary condition may not always provide the most natural setting for this kind of problem on bounded domains. Equation (E_p) occurs in several applications, for example it comes from the theory of porous media flow, phenomenological theory of sedimentation-consolidation processes, road traffic. In practice, it is often supplemented with the zero-flux (homogeneous Neumann boundary condition), at least on a part of the boundary (see [23]).

Let us describe in more detail one application. Problem (P_1) is of interest in describing pressure filtration of flocculated suspensions. The domain Ω is a filter medium, which lets only the liquid pass, by a piston which moves downwards due to an applied pressure. The material behavior of the suspension is described by two model functions, the flux density function or hindered settling factor f and the effective solid stress function ϕ, both functions only of the local solids concentration u. Here f is a nonpositive Lipschitz continuous function with compact support in $[0, u_{\max}]$, where $u_{\max} \leq 1$ is the maximum concentration and the function ϕ satisfies $\phi(u) = 0$ for $u \leq u_c$, with $0 \leq u_c \leq u_{\max}$, where u_c is a critical concentration value, and $\phi'(u) > 0$ for $u > u_c$. Notice that these assumptions are exactly those that we have taken in this paper. According to the phenomenological sedimentation-consolidation theory [23], the evolution of the concentration distribution is subject to Neumann boundary condition at least on a part of the boundary, and this is our motivation.

In [22] Bürger and al. consider the problem (P_1) with $\phi(u) \equiv 0$. They introduce a notion of entropy solution based on the existence of strong trace u^τ on $\partial\Omega$ under some assumption on the boundary (see [74]) and the flux f which satisfies (H1). They prove existence and uniqueness of entropy solution. The purpose of this chapter is to extend the result of Bürger and al. ([22]) to degenerate parabolic-hyperbolic equation. The extension is not trivial, and as a matter of fact, we are unable to prove uniqueness in dimension $\ell \geq 2$ although we believe that the notion of entropy solution we introduce in this paper is relevant for any dimension. Let us explain the difficulties and the techniques we use to overcome them. Since the total flux in (E_p) contains the diffusion flux term $\nabla\phi(u)$ which is only L^2, we cannot ensure the existence of a strong trace for this term. Therefore, we suppose that this boundary condition is satisfied in the weak sense only. We propose a new entropy formulation that incorporates a boundary term which does not contain any trace of u. Its main advantage over the definition of [22] is that the stability under the $L^1(Q)$ convergence of solutions is evident. Notice that we do not need existence of traces of entropy solutions u of (E_p), even if it could be ensured (see Appendix A of this thesis).

To prove existence of entropy solution, we use a classical vanishing viscosity approximation and get the a priori estimates useful for passing to the limit in the approximate problem. The main point for passing to the limit is based on a rather involved local compactness argument of Panov [66]. We manage to apply this result in our case and prove that the limit of entropy solutions of approximate problem is an entropy solution of (P_1).

Now, let us focus on the question of uniqueness of entropy solution for (P_1). For this aim, we prove a version of an important proposition due to Carrillo [28]. This proposition identifies the entropy dissipation term which is a key ingredient of the uniqueness technique. Then, it is easy to prove uniqueness of

solutions such that the boundary condition is satisfied in the sense of strong boundary trace of the normal component of the flux ($f(u) - \nabla\phi(u)$). Unfortunately, we are able to establish this additional solution regularity only for the stationary problem (S_1) associated to (P_1) (see section 1.4) and only in the case of one space dimension. Therefore, we adapt the hint from the paper [7] (see also [8]) and compare a general solution to (P_1) with a regular solution to (S_1). We conclude by a standard application of the notion of integral solution coming from the nonlinear semigroup theory [17]. Eventually, we prove the uniqueness result in space dimension one.

Let us stress that the problem of uniqueness is still open in multiple space dimensions. Uniqueness of regular solutions to (P_1) is trivially true, and the absence of regularity near the boundary makes the problem technically very delicate. The definition of strong traces of the solution with respect to the lateral boundary of the domain Ω is possible if for example the diffusion term $\phi(u)$ is such that $f(u) - \nabla\phi(u)$ is continuous up to the boundary $\partial\Omega$. If there existed « sufficiently many » solutions (in the sense of [7], [8]) having this regularity, uniqueness would follow, by comparison of a general solution with an *ad hoc* sequence of regular solutions. We leave the investigation of this regularity question to a future work. Another open question is how to define entropy solutions in the case where assumption (H1) does not hold. Indeed, as in [22], assumption (H1) ensures that the zero-flux boundary condition is satisfied literally. When this assumption is dropped, we expect that the boundary condition should be relaxed, as in the case of Dirichlet boundary condition (see [14]). One example for the zero-flux hyperbolic problem is given in [11].

The rest of this chapter is organized as follows. In section 1.2, we state our definition of entropy solution. Section 1.3 is devoted to existence of approximate solutions and passage to the limit to prove existence of an entropy solution of (P_1). In section 1.4 we study the abstract evolution equation associated with (P_1) and prove uniqueness of entropy solution in one space dimension. Finally, in section 1.5, we present the generalization of our method and result to nonlinear Robin boundary condition.

1.2 Definition of Entropy Solution of (P_1)

In this section, we give our entropy formulation for the problem (P_1).

Definition 1.2.1. *Let u_0 be a measurable $[0, u_{\max}]$-valued function. A measurable function u taking values on $[0, u_{\max}]$ is called weak solution of problem (P_1) if : $\phi(u) \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ and for all $\xi \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ such that $\xi_t \in L^1(Q)$ and $\xi(T,.) = 0$, one has*

$$\int_0^T\int_\Omega \Big\{u\xi_t + \Big(f(u) - \nabla\phi(u)\Big).\nabla\xi\Big\}\,dxdt + \int_\Omega u_0\xi(0,x)dx = 0. \tag{1.1}$$

Definition 1.2.2. *A measurable function u taking values on $[0, u_{\max}]$ is called an entropy solution of the initial-boundary value problem (P_1) if the function $\phi(u) \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ and $\forall k \in [0, u_{\max}]$, $\forall \xi \in C^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^\ell)$, with $\xi \geq 0$, the following inequality hold*

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega \Big\{|u-k|\xi_t + sign(u-k)\Big(f(u) - f(k) - \nabla\phi(u)\Big).\nabla\xi\Big\}\,dxdt\\ &+ \int_0^T\int_{\partial\Omega} |f(k).\eta(x)|\,\xi(t,x)d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)dt + \int_\Omega |u_0 - k|\xi(0,x)dx \geq 0.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Here $\mathcal{H}$ represents the $(\ell-1)-$ dimensional Hausdorff measure on $\partial\Omega$.
If we remplace (1.2) by one of the following inequalities

$$\int_0^T\int_\Omega \Big\{(u-k)^+\xi_t + sign^+(u-k)\Big(f(u)-f(k)-\nabla\phi(u)\Big).\nabla\xi\Big\}\,dxdt$$
$$+\int_0^T\int_{\partial\Omega}(f(k).\eta(x))^+\xi(t,x)d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)dt+\int_\Omega (u_0-k)^+\xi(0,x)dx\geq 0, \tag{1.3}$$

$$\int_0^T\int_\Omega \Big\{(u-k)^-\xi_t + sign^-(u-k)\Big(f(u)-f(k)-\nabla\phi(u)\Big).\nabla\xi\Big\}\,dxdt$$
$$+\int_0^T\int_{\partial\Omega}(f(k).\eta(x))^-\xi(t,x)d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)dt+\int_\Omega (u_0-k)^-\xi(0,x)dx\geq 0. \tag{1.4}$$

We obtain notions of entropy sub-solution and entropy super-solution respectively. Obviously, a function u is an entropy solution if and only if u is entropy sub-solution and entropy super-solution simultaneously.

Remark 1.2.3. *1. For the case $\phi=0$, solution of [22] is solution in our sense. The converse assertion is also true at least for $\ell=1$, this is the consequence of the uniqueness of a solution in the sense of Definition* 1.2.2.

2. *The entropy solution in the sense of Definition* 1.2.2 *is in particular a weak solution in the sense of Definition* 1.2.1. *Indeed, take in* (1.2) $k=0$ *and* $k=u_{\max}$ *and use* (H1) *; we find* (1.1).

3. *Let us stress that, in particular, the zero-flux boundary condition $(f(u)-\nabla\phi(u)).\eta=0$ is verified literally in the weak sense. This contrasts with the properties of the Dirichlet problem (see [14]) ; we expect that the boundary condition should be relaxed if assumption* (H1) *is dropped (see [11]).*

4. *The initial condition is satisfied as a limit in the following L^1 sense :*

$$ess\lim_{t\to 0}\int_\Omega |u(t,x)-u_0(x)|dx=0. \tag{1.5}$$

To show that (1.5) *is satisfied, we choose in* (1.2) *the test function $\xi(t,x)=\xi_1(t)\xi_2(x)$, where $\xi_1(t)\in C_0^\infty[0,T)$, $\xi_2(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, $\xi_1,\xi_2\geq 0$. Set*

$$A(t)=\int_0^t\int_\Omega sign(u-k)\Big[f(u)-f(k)-\nabla\phi(u)\Big].\nabla\xi_2 dxds, \tag{1.6}$$

A is an absolutely continuous function and

$$\begin{aligned}&\int_0^T\xi_1'\int_\Omega|u-k|\xi_2(x)dxdt+\int_0^T\xi_1A'(t)dt+\int_\Omega|u_0-k|\xi_2(x)dx\xi_1(0)\\ &=\int_0^T\xi_1'\left[\int_\Omega|u-k|\xi_2(x)dx-A(t)\right]dt+\int_\Omega|u_0-k|\xi_2(x)dx\xi_1(0)\\ &=\int_0^T\xi_1'\Psi(t)dt+\int_\Omega|u_0-k|\xi_2(x)dx\xi_1(0)\geq 0,\end{aligned} \tag{1.7}$$

where

$$\Psi(t)=\int_\Omega|u(t,.)-k|\xi_2(x)dx-A(t).$$

Then, Ψ is a non-increasing function.
Since it is bounded, the essential limit at $t = 0^+$ exists and as $A(0) = 0$, one has that

$$0 \leq \operatorname{ess}\lim_{t\to 0} \Psi(t) = \operatorname{ess}\lim_{t\to 0} \int_\Omega |u(t,.) - k|\xi_2(x)dx \leq \int_\Omega |u_0 - k|\xi_2(x)dx$$

for all $k \in [0, u_{\max}] \subset \mathbb{R}$. In particular, there exists a set Z of full-measure in $]0,T[$ such that for all $k \in \mathbb{Q}$,

$$\lim_{\substack{t\to 0 \\ t\in Z}} \int_\Omega |u(t,.) - k|\xi_2(x)dx \leq \int_\Omega |u_0 - k|\xi_2(x)dx.$$

For any positive $\delta > 0$, there exist $w_n = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{1}_{A_i}$ a simple function with values in $\mathbb{Q}$, bounded by $\|u\|_\infty$, such that

$$\|u_0 - w_n\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{\delta}{2}$$

and, for any $i = 1, .., n$, $\xi_i \in C_0^\infty(\Omega)$, $\xi_i \geq 0$, such that

$$\|\mathbf{1}_{A_i} - \xi_i\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{\delta}{4n \max(\|u\|_\infty, 1)}.$$

Thus, since

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(t,.) - u_0|dx &= \Big| \int_\Omega |u(t,.) - u_0|dx - \int_\Omega |u(t,.) - w_n|dx \Big| + \int_\Omega |u(t,.) - w_n|dx \\
&\leq \int_\Omega |u_0 - w_n|dx + \int_\Omega |u(t,.) - w_n|dx \\
&\leq \int_\Omega |u_0 - w_n|dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |u(t,.) - k_i|\mathbf{1}_{A_i}dx,
\end{aligned}$$

one gets that

$$\int_\Omega |u(t,.) - u_0|dx \leq \frac{\delta}{2} + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |u(t,.) - k_i|\xi_i dx + 2\|u\|_\infty \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\mathbf{1}_{A_i} - \xi_i|dx,$$

and

$$\limsup_{\substack{t\to 0 \\ t\in Z}} \int_\Omega |u(t,.) - u_0|dx \leq \delta.$$

Since δ is arbitrary chosen, (1.5) is proved.

1.3 Existence of Entropy Solutions of (P_1)

To apply a strong precompactness result needed for the proof of the existence of entropy solution, we assume that the couple $(f(.), \phi(.))$ is non-degenerate in the sense of the following definition.

Definition 1.3.1. *(*Panov [66]). Let ϕ be zero on $[0, u_c]$, strictly increasing on $[u_c, u_{\max}]$ and a vector $f = (f_1, ..., f_\ell)$. A couple $(f(.), \phi(.))$ is said to be non-degenerate if, for all $\xi \in \mathbb{R}^\ell \backslash \{0\}$, the functions $\lambda \longmapsto \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i f_i(\lambda)$ are not « affine » on the non-degenerate sub intervals of $[0, u_c]$.

The main result of this section is the following theorem :

Theorem 1.3.2. *Assume that* (H1) *holds and* (f, ϕ) *is non-degenerate in the sense of Definition* 1.3.1. *Then there exists an entropy solution u for the problem* (P_1).

1.3.1 Viscosity Regularized Problem

To show the existence of entropy solution, we approximate $\phi(u)$ by $\phi_\epsilon(u^\epsilon) = \phi(u^\epsilon) + \epsilon Id(u^\epsilon)$ for each $\epsilon > 0$. We obtain the following regularized problem (P_1^ϵ) :

$$(P_1^\epsilon) \begin{cases} u_t^\epsilon + \operatorname{div} f(u^\epsilon) - \Delta \phi_\epsilon(u^\epsilon) &= 0 \quad \text{in} \quad Q = (0,T) \times \Omega, \\ u^\epsilon(0,x) &= u_0^\epsilon(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \\ (f(u^\epsilon) - \nabla \phi_\epsilon(u^\epsilon)).\eta &= 0 \quad \text{on} \quad \Sigma = (0,T) \times \partial\Omega, \end{cases}$$

where $(u_0^\epsilon)_\epsilon$ is a sequence of smooth functions that converges to u_0 a.e and respects the minimum/maximum values of u_0.

Definition 1.3.3. *A function* $u^\epsilon \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$ *is called weak solution of the initial-boundary value problem* (P_1^ϵ) *if for all* $\xi \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$ *such that* $\xi_t \in L^1(Q)$ *and* $\xi(T,.) = 0$, *one has*

$$\int_0^T \int_\Omega \left\{ u^\epsilon \xi_t + \Big(f(u^\epsilon) - \nabla \phi_\epsilon(u^\epsilon) \Big).\nabla \xi \right\} dxdt + \int_\Omega u_0^\epsilon \xi(0,x) dx = 0. \tag{1.8}$$

Definition 1.3.4. *A measurable function* $u^\epsilon \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$ *taking values in* $[0, u_{\max}]$ *is called an entropy solution of* (P_1^ϵ) *if* $\forall k \in [0, u_{\max}]$, $\forall \xi \in C^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^\ell)$, $\xi \geq 0$, *the following inequality hold*

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \left\{ |u^\epsilon - k| \xi_t + sign(u^\epsilon - k) \Big(f(u^\epsilon) - f(k) - \nabla \phi_\epsilon(u^\epsilon) \Big).\nabla \xi \right\} dxdt \\ &+ \int_0^T \int_{\partial\Omega} |f(k).\eta(x)| \, \xi(t,x) d\mathcal{H}^{\ell-1}(x) dt + \int_\Omega |u_0^\epsilon - k| \xi(0,x) dx \geq 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Theorem 1.3.5. *Assume that* $u_0 \in [0, u_{\max}]$ *and* (H1) *holds. Then the problem* (P_1^ϵ) *admits a weak solution* u^ϵ *which is also an entropy solution. In particular, we have* $0 \leq u^\epsilon \leq u_{\max}$. *In addition, there exists C independent on* ϵ *such that*

$$\| \sqrt{\epsilon} \nabla u^\epsilon \|_{L^2(Q)} \leq C; \tag{1.10}$$

$$\| \phi_\epsilon(u_\epsilon) \|_{L^2(0,T; H^1(\Omega))} \leq C. \tag{1.11}$$

Proof. For the sake of completeness, we give a full proof of Theorem 1.3.5. We denote by C a generic constant independent of the approximation parameters ϵ and m. Otherwise, the dependence of C is made explicit in the notation. We need four steps for this proof.

First step : By Faedo-Galerkin method (see e.g., [54]), we construct a sequence of approximate solutions. We choose $V_m = \langle e_1(x), ..., e_m(x)\rangle$ with $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ a regular Hilbert basis of $H^1(\Omega)$ and formulate our problem in terms of the new unknown $w^\epsilon = \phi_\epsilon(u^\epsilon)$. We seek $w_m^\epsilon(t) = \sum_{i=1}^{m} c_{im}(t)e_i(x)$, then

$$\mathrm{Proj}_{V_m}\Big(\phi_\epsilon^{-1}(w_m^\epsilon)_t + \mathrm{div}\, f(\phi_\epsilon^{-1}(w_m^\epsilon)) - \Delta w_m^\epsilon\Big) = 0. \tag{1.12}$$

Here Proj_{V_m} is the orthogonal projection, in $L^2(\Omega)$, on the subspace V_m. The function ϕ_ϵ^{-1} is Lipschitz continuous, and $(\phi_\epsilon^{-1})' \leq \frac{1}{\epsilon}$. To start with, we assume that ϕ is Lipschitz continuous ; then $(\phi_\epsilon^{-1})' \geq \alpha > 0$. The equation 1.12 is rewrites as

$$\mathrm{Proj}_{V_m}\left((\phi_\epsilon^{-1})'(w_m^\epsilon)\sum_{i=1}^{m} c_{im}' e_i(x) + \mathrm{div}\,\tilde{f}(w_m^\epsilon) - \sum_{i=1}^{m} c_{im}(t)\Delta e_i(x)\right) = 0;$$

where $\tilde{f} = f \circ \phi_\epsilon^{-1}$. To determine the family $\{c_{im}\}_i \subset C^1([0,T])$, we write the weak formulation of the above equation in Ω with e_j as test function, we get

$$\sum_{i=1}^{m} c_{im}'(t)\int_\Omega (\phi_\epsilon^{-1})'(w_m^\epsilon)e_i.e_j dx - \int_\Omega\left(\tilde{f}(w_m^\epsilon) - \sum_{i=1}^{m} c_{im}\nabla e_i(x)\right).\nabla e_j dx = 0;$$

$1 \leq j \leq m$. Recall that w_m^ϵ depends on x and $(c_{im})_i$. Notice that the matrix

$$M(c_{i1}, ..., c_{im}) = \left(\int_\Omega (\phi_\epsilon^{-1})'(w_m^\epsilon)e_i.e_j dx\right)_{i,j}$$

is invertible due to the fact that for all $b = (b_1, ..., b_m) \in \mathbb{R}^m$,

$$\Big(Mb, b\Big) = \int_\Omega (\phi_\epsilon^{-1})'(w_m^\epsilon)|\sum_{i=1}^{m} b_i e_i|^2 \geq \mathrm{const}(m)\alpha\|b\|^2.$$

We obtain a system of non-linear differential equations, which is completed with initial condition $w_m^\epsilon(0) = w_{0m}^\epsilon$; $w_{0m}^\epsilon = \sum_{i=1}^{m}\beta_{im}e_i$ where β_{im} are chosen to ensure that $w_{0m}^\epsilon \longrightarrow \phi_\epsilon(u_0^\epsilon)$ in $L^2(\Omega)$.

By the Cauchy-Peano theorem of the classical ODE theory, we have existence of solution $w_m^\epsilon(t)$ in some interval $[0, t_m]$, $t_m > 0$. Note that existence of u_m^ϵ is ensured by the fact that ϕ_ϵ is bijective, moreover, $w_m^\epsilon = \phi_\epsilon(u_\epsilon^m)$ and u_m^ϵ is in $C^1(0, t_m; V_m)$.

Now, we have to prove that $t_m = T$.

Second step : a priori estimates.

We can take w_m^ϵ as a test function and integrate over $[0, t]$; we get

$$\int_\Omega\int_0^t \theta_\epsilon(w_m^\epsilon)_s ds dx - \int_0^t\int_\Omega f(u_m^\epsilon).\nabla w_m^\epsilon dx ds + \|\nabla w_m^\epsilon\|^2_{L^2(0,t;\Omega)} = 0. \tag{1.13}$$

Here $\theta_\epsilon(w_m^\epsilon) = \int_0^{w_m^\epsilon} r d\phi_\epsilon^{-1}(r)$ and we have used the chain rule for C^1 functions of variable t. It is also possible to rewrite the function $\theta_\epsilon(w_m^\epsilon)$ as

$$\psi_\epsilon(u_m^\epsilon) = \int_0^{u_m^\epsilon} \phi_\epsilon(r)dr.$$

Since f has its support in $[0, u_{\max}]$, the second integral of (1.13) can be upper bounded as follows

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t\int_\Omega \operatorname{div}\left(\int_0^{u_m^\epsilon} f(r)d\phi_\epsilon(r)\right)dxds\right| &= \left|\int_0^t\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^{u_m^\epsilon} f(r)d\phi_\epsilon(r)\right).\eta d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)ds\right| \\ &\le d\phi_\epsilon([0,u_{\max}])\|f\|_{L^\infty}|\partial\Omega|T \\ &\le (\phi(u_{\max})+1)\|f\|_{L^\infty}|\partial\Omega|T. \\ &\le C = C(T,\partial\Omega,\|f\|_{L^\infty}),\end{aligned}$$

with $d\phi_\epsilon([0,u_{\max}])$ the measure of $[0,u_{\max}]$ with respect to the Stieltjes measure $d\phi_\epsilon$. Hence,

$$\int_\Omega \theta_\epsilon(w_m^\epsilon)(t)dx + \|\nabla w_m^\epsilon\|^2_{L^2(0,t;\Omega)} \le C + \int_\Omega \theta_\epsilon(w_m^\epsilon)(0)dx. \tag{1.14}$$

The last term in the right-hand side of inequality (1.14) is bounded uniformly in m by $\frac{1}{\epsilon}\sup_m \|w_{0m}^\epsilon\|^2_{L^2}$. In fact,

$$\int_\Omega \theta_\epsilon(w_m^\epsilon)(0)dx = \int_\Omega\int_0^{w_m^\epsilon(0)} r(\phi_\epsilon^{-1})'(\sigma)drdx \le \frac{1}{2}\|(\phi_\epsilon^{-1})'\|_\infty\|w_m^\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \le \frac{1}{\epsilon}\sup_m\|w_{0m}^\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Then ∇w_m^ϵ is bounded in $L^2(\Omega)$ uniformly in m.
Without loss of restriction, we can assume $\phi \equiv 0$ on $(-\infty, 0]$ and $\phi \equiv \phi(u_{\max})$ on $[u_{\max}, +\infty)$. (Indeed, we show in the last step that u takes values in $[0, u_{\max}]$, therefore the values of ϕ outside $[0, u_{\max}]$ do not matter.) Then $\phi_\epsilon' = \epsilon$ outside $[0, u_{\max}]$. Hence, for $w \notin [0, \phi(u_{\max}) + 1]$, we have $(\phi_\epsilon^{-1})'(w) = \frac{1}{\epsilon}$. Therefore

$$|w_m^\epsilon|^2 \le C(\epsilon)(1 + \theta_\epsilon(w_m^\epsilon)). \tag{1.15}$$

This means that $t_m = T$ and w_m^ϵ is bounded in $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ uniformly in m.
Now, fix δ and consider t such that $[t, t+\delta] \subset [0, T]$. We integrate over $s \in [t, t+\delta t]$. Next, we take (by approximation) $(w_m^\epsilon(t+\delta t, .) - w_m^\epsilon(t, .))\mathbf{1}_{[0,T-\delta t]}$ as test function

$$\begin{aligned}&\int_0^{T-\delta t}\int_t^{t+\delta t}\int_\Omega (u_m^\epsilon(s,.))'\Big(w_m^\epsilon(t+\delta t,.) - w_m^\epsilon(t,.)\Big)dxdtds \\ &- \int_0^{T-\delta t}\int_t^{t+\delta t}\int_\Omega f(u_m^\epsilon).\nabla\Big(w_m^\epsilon(t+\delta t,.) - w_m^\epsilon(t,.)\Big)dxdsdt \\ &+ \int_0^{T-\delta t}\int_t^{t+\delta t}\int_\Omega \nabla w_m^\epsilon(s,x).\nabla\Big(w_m^\epsilon(t+\delta t,.) - w_m^\epsilon(t,.)\Big)dxdtds = 0.\end{aligned} \tag{1.16}$$

Denote the three terms in the left-hand side of (1.16) by A, B and D respectively. We calculate

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{T-\delta t}\int_t^{t+\delta t}\int_\Omega (u_m^\epsilon(s,.))'\Big(w_m^\epsilon(t+\delta t,.) - w_m^\epsilon(t,.)\Big)dxdtds \\ &= \int_0^{T-\delta t}\int_\Omega \Big(w_m^\epsilon(t+\delta t,.) - w_m^\epsilon(t,.)\Big)\int_t^{t+\delta t}(u_m^\epsilon(s,.))'dsdxdt \\ &= \int_0^{T-\delta t}\int_\Omega \Big(w_m^\epsilon(t+\delta t,.) - w_m^\epsilon(t,.)\Big)\Big(u_m^\epsilon(t+\delta t,.) - u_m^\epsilon(t,.)\Big)dxdt;\end{aligned} \tag{1.17}$$

$$
\begin{aligned}
|B| &= \left| - \int_0^{T-\delta t} \int_t^{t+\delta t} \int_\Omega f(u_m^\epsilon(s,.)).\nabla\Big(w_m^\epsilon(t+\delta t,.) - w_m^\epsilon(t,.)\Big) dx dt ds \right| \\
&\leq \left| \int_0^{T-\delta t} \int_t^{t+\delta t} \int_\Omega f(u_m^\epsilon(s,.)).\nabla\Big(w_m^\epsilon(t+\delta t,.) - w_m^\epsilon(t,.)\Big) dx dt ds \right| \\
&\leq C(\epsilon)\delta t \left[\int_0^{T-\delta t} \int_\Omega |\nabla w_m^\epsilon(t+\delta t,.)| + \int_0^{T-\delta t} \int_\Omega |\nabla w_m^\epsilon(t,.)| \right].
\end{aligned}
$$

By a change of variable in the first integral ($\tau = t + \delta t$), using Cauchy-Schwarz inequality we obtain

$$
|B| \leq 2C(\epsilon)\delta t \|\nabla w_m^\epsilon\|_{L^2(Q)} \|1_Q\|_{L^2(Q)} \leq C(\epsilon)\delta t. \tag{1.18}
$$

The last integral of (1.16) is treated similarly :

$$
\begin{aligned}
|D| &\leq \left| \int_0^{T-\delta t} \int_t^{t+\delta t} \int_\Omega \nabla w_m^\epsilon(s,.).\nabla\Big(w_m^\epsilon(t+\delta t,.) - w_m^\epsilon(t,.)\Big) \right| \\
&\leq 2 \int_\Omega \int_0^{T-\delta t} |\nabla w_m^\epsilon(\tau,.).| \left(\int_t^{t+\delta t} |\nabla w_m^\epsilon(s,.)| ds \right) d\tau dx \\
&\leq 2\|\nabla w_m^\epsilon\|_{L^2(Q)} \left(\int_\Omega \int_0^{T-\delta t} \left(\int_t^{t+\delta t} |\nabla w_m^\epsilon(s,.)| ds \right)^2 d\tau dx \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Using Jensen's Inequality,

$$
\left(\int_t^{t+\delta t} |\nabla(w_m^\epsilon(s,.))| ds \right)^2 \leq \int_t^{t+\delta t} |\nabla(w_m^\epsilon(s,.))|^2 ds,
$$

hence we obtain

$$
|D| \leq 2\|\nabla w_m^\epsilon\|_{L^2(Q)} \sqrt{\int_\Omega \int_0^T \int_t^{t+\delta t} |\nabla w_m^\epsilon(s,.)|^2} \leq C(\epsilon)\sqrt{\delta t}. \tag{1.19}
$$

The sum of (1.17), (1.18) and (1.19) gives

$$
\int_0^{T-\delta t} \int_\Omega \left| \Big(w_m^\epsilon(t+\delta t,.) - w_m^\epsilon(t,.)\Big)\Big(u_m^\epsilon(t+\delta t,.) - u_m^\epsilon(t,.)\Big) \right| \leq C(\epsilon)(\delta t + \sqrt{\delta t}).
$$

Now, using the fact ϕ_ϵ^{-1} is Lipschitz, there exist another constant $C(\epsilon)$ such that

$$
\|u_m^\epsilon(t+\delta t,.) - u_m^\epsilon(t,.)\|_{L^2(0,T-\delta t;\Omega)} \leq C(\epsilon)(\sqrt{\delta t} + \delta t). \tag{1.20}
$$

By the characterization theorem for $H^1(\Omega)$ (see [21]), since $V_m \subset H^1(\Omega)$, and $\|\nabla w_m^\epsilon\|_{L^2(Q)} \leq C$, we have for all open subset $\omega \subset\subset \Omega$

$$
\|u_m^\epsilon(t, x+\delta x) - u_m^\epsilon(t,x)\|_{L^2(0,T;\omega)} \leq C(\epsilon)\delta x. \tag{1.21}
$$

Finally, we obtain

$$
\|u_m^\epsilon(t+\delta t, x+\delta x) - u_m^\epsilon(t,x)\|_{L^2(0,T-\delta t;\omega)} \leq C(\epsilon)(\sqrt{\delta t} + \delta t + \delta x). \tag{1.22}
$$

Third step : Passage to the limit ($m \longrightarrow +\infty$).
By the estimate $\|w_m^\epsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C(\epsilon)$, by (1.22) and Fréchet-Kolmogorov compactness criterion, $(u_m^\epsilon)_m$ is relatively compact in the space $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ weakly and in $L^1_{\text{Loc}}((0,T)\times\Omega)$ strongly. Moreover, $\|u_m^\epsilon\|_{L^2(Q)} \leq C(\epsilon)$, then u_m^ϵ is relatively compact in $L^1(Q)$ strongly.
We can take $\xi(t)e_i(x)$ as test function in the weak formulation where $\xi \in \mathcal{D}[0,T)$, for $m \geq 0$, we have

$$\int_0^T\int_\Omega u_m^\epsilon \xi' e_i dxdt + \int_0^T\int_\Omega \Big(f(u_m^\epsilon) - \nabla w_m^\epsilon\Big).\nabla e_i \xi dxdt + \int_\Omega u_{0m}^\epsilon \xi(0) e_i dx = 0.$$

We can extract a subsequence w_m^ϵ such that $\nabla w_m^\epsilon \rightharpoonup \nabla w^\epsilon$ in $L^2(Q)$ and $u_m^\epsilon \to u^\epsilon$ in $L^1(Q)$ and a.e.. The Lebesgue theorem, continuity and boundedness of f permit at last to pass to the limit. Finally we conclude that (1.2.1) holds, this means that u^ϵ is a weak solution of (P_1^ϵ) by the density of the linear span of $\mathcal{D}(0,T)\times\mathcal{D}(\Omega)$ in $\mathcal{D}([0,T)\times\Omega)$.
At this point, we can also drop the Lipschitz continuity assumption on ϕ. Indeed, approximating ϕ with a sequence of Lipschitz continuous functions ϕ_α, one can have uniform estimates in α (1.22). Then one can pass to the limit as α goes to zero in the equation corresponding to $\phi = \phi_\alpha$, with the same argument as above.
Its remains to prove that u^ϵ is an entropy solution.
Fourth step : Now, we prove that weak solution of (P_1^ϵ) is also an entropy sub-solution and entropy super-solution.
Since u^ϵ is a weak solution of (P_1^ϵ), then $u^\epsilon - k$ is a weak solution of the following problem

$$(P_1^{k,\epsilon})\begin{cases} (u^\epsilon - k)_t + \operatorname{div}\Big(f(u^\epsilon) - \nabla\phi_\epsilon(u^\epsilon) - f(k)\Big) &= 0 \quad \text{in } Q,\\ u^\epsilon(0,x) - k &= u_0^\epsilon(x) - k \quad \text{in } \Omega,\\ \Big(f(u^\epsilon) - \nabla\phi_\epsilon(u^\epsilon) - f(k)\Big).\eta &= -f(k).\eta \quad \text{on } \Sigma. \end{cases}$$

Take $sign_\sigma^+(u^\epsilon - k)\xi$ in the weak formulation of this problem with $\xi \in C^\infty([0,T[\times\mathbb{R}^\ell)$, $\xi \geq 0$.
We get (see [3] and [44] for the use of $H^1(\Omega)^* - H^1(\Omega)$ duality)

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle (u^\epsilon - k)_t, sign_\sigma^+(u^\epsilon - k)\xi\rangle_{H^1(\Omega)^*, H^1(\Omega)} - \int_0^T\int_{\partial\Omega} sign_\sigma^+(u^\epsilon - k) f(k).\eta\xi \\ &- \int_0^T\int_\Omega \Big(f(u^\epsilon) - \nabla\phi_\epsilon(u^\epsilon) - f(k)\Big)\xi\nabla sign_\sigma^+(u^\epsilon - k) \\ &- \int_0^T\int_\Omega sign_\sigma^+(u^\epsilon - k)\Big(f(u^\epsilon) - \nabla\phi_\epsilon(u^\epsilon) - f(k)\Big).\nabla\xi = 0. \end{aligned} \tag{1.23}$$

The first integral of 1.23 gives (see [3] and [44] for the use of Chain rule)

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle (u^\epsilon - k)_t, sign_\sigma^+(u^\epsilon - k)\xi\rangle = &- \int_0^T\int_\Omega \left\{\int_k^{u^\epsilon} sign_\sigma^+(r-k)dr\right\}\xi_t dxdt \\ &- \int_\Omega \left\{\int_k^{u_0^\epsilon} sign_\sigma^+(r-k)dr\right\}\xi(0,x)dx. \end{aligned}$$

Passing to the limit as σ goes to 0, we obtain :

$$\begin{aligned} &\int_0^T\int_\Omega \left\{\int_k^{u^\epsilon} sign_\sigma^+(r-k)dr\right\}\xi_t dxdt \longrightarrow \int_0^T\int_\Omega (u^\epsilon - k)^+\xi_t dxdt, \\ &\int_\Omega \left\{\int_k^{u_0^\epsilon} sign_\sigma^+(r-k)dr\right\}\xi(0,x)dx \longrightarrow \int_\Omega (u_0^\epsilon - k)^+\xi(0,x)dx. \end{aligned}$$

The limit of the second integral of (1.23) can be upper bounded as follows :

$$\lim_{\sigma\to 0}\int_0^T\int_{\partial\Omega} sign_\sigma^+(u^\epsilon-k)f(k).\eta\xi \le \int_0^T\int_{\partial\Omega}(f(k).\eta(x))^+\,\xi.$$

The third integral of (1.23) can be written as

$$-\iint_\Omega \xi\nabla\phi_\epsilon(u^\epsilon).\nabla sign_\sigma^+(u^\epsilon-k)+\iint_\Omega \xi\left(f(u^\epsilon)-f(k)\right).\nabla sign_\sigma^+(u^\epsilon-k).$$

Here, the first integral is non-positive. Moreover, the second one tends to zero as $\sigma\to 0$. In fact, we set $F_\sigma(r)=\int_{k-\sigma}^r(f(s)-f(k))sign_\sigma^{+'}(s-k)ds$. We have $|F_\sigma(r)|\le 2\sup_{|k-s|<\sigma}|f(s)-f(k)|$. Using the Green-Gauss formula, we find

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega sign_\sigma^{+'}(u^\epsilon-k)\nabla u^\epsilon.(f(u^\epsilon)-f(k))\xi\right| = \left|\int_\Omega div(F_\sigma(u^\epsilon))\xi\right|\\ &\le 2\sup_{|k-s|<\sigma}|f(s)-f(k)|\left(\int_\Omega|\nabla\xi|+\int_{\partial\Omega}|\xi|\right)\to 0 \text{ as } \sigma\to 0.\end{aligned}$$

Finally, we obtain

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega\left\{(u^\epsilon-k)^+\xi_t+sign^+(u^\epsilon-k)\Big(f(u^\epsilon)-\nabla\phi_\epsilon(u^\epsilon)-f(k)\Big).\nabla\xi\right\}dxdt\\ &+\int_\Omega(u_0^\epsilon-k)^+\xi(0,x)dx+\int_0^T\int_{\partial\Omega}(f(k).\eta(x))^+\,\xi d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)dt\ge 0.\end{aligned}$$

Therefore u^ϵ is entropy sub-solution of (P_1^ϵ). In the same way, we prove that u^ϵ is entropy super-solution of (P_1^ϵ).

Now we prove that u^ϵ is bounded. To this aim take $\xi=\xi(t)$, (i.e., $\nabla\xi=0$), take $k=0$ in (1.3), and use (H1) and the fact that $u_0^\epsilon\in[0,u_{\max}]$. We get

$$\int_\Omega(u^\epsilon)^-(0,.)\xi(0,.)+\int_0^T\int_\Omega(u^\epsilon)^-(t,x)\xi_t=\int_0^T\left(\int_\Omega\Big((u^\epsilon)^-(t,x)-(u_0^\epsilon)^-(x)\Big)\right)\xi_t\ge 0.$$

Let us introduce the function

$$G(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_\Omega\Big((u^\epsilon)^-(t,x)-(u_0^\epsilon)^-(x)\Big)dx & \text{for } t\in(0,T),\\ 0 & \text{for } t\in(-T,0).\end{cases}$$

We have $\dfrac{dG}{dt}\le 0$ in $\mathcal{D}'(-T,T)$ and therefore, since G(t) vanishes for $t<0$, we deduce that

$$\int_\Omega(u^\epsilon)^-(t,x)dx\le\int_\Omega(u_0^\epsilon)^-(x)dx=0,\ \text{i.e., } u^\epsilon(t,x)\ge 0.$$

In the same way, we prove that $u^\epsilon(t,x)\le u_{\max}$.

Now, we go back to the technique used to get (1.14), recall that we can rewrite $\theta_\epsilon(w^\epsilon)$ as $\psi(u^\epsilon)$. We find

$$\int_\Omega\psi_\epsilon(u^\epsilon)(t)+\|\nabla w^\epsilon\|^2_{L^2(0,t;\Omega)}\le C+\int_\Omega\psi_\epsilon(u^\epsilon)(0). \tag{1.24}$$

The last term is now bounded uniformly in ϵ, due to the L^∞ bound on u^ϵ. Therefore,

$$\|w^\epsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C, \tag{1.25}$$

with C that is now $\epsilon-$independent.
Finally, if we take u^ϵ as test function in (1.8), we find

$$\frac{1}{2}\|u^\epsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\sqrt{\epsilon}\nabla u^\epsilon\|^2_{L^2(Q)} \leq C + \frac{1}{2}\|u_0^\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Then

$$\|\sqrt{\epsilon}\nabla u^\epsilon\|^2_{L^2(Q)} \leq C. \tag{1.26}$$

This concludes the proof of the Theorem. □

1.3.2 Strong pre-compactness result and passage to the limit in ϵ

Theorem 1.3.6. (Panov [66]). Assume that (f, ϕ) is non degenerate in the sense of Definition 1.3.1. Suppose u^ϵ, $\epsilon > 0$, is a sequence such that

$$\exists d > 1, \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ with } a < b$$
$$T_{[a,b]}(u^\epsilon)_t + \operatorname{div}\Big(f(T_{[a,b]}(u^\epsilon)) - \nabla\phi(T_{[a,b]}(u^\epsilon))\Big) \text{ is pre-compact in } W^{-1,d}_{\text{Loc}}(Q).$$

Moreover, suppose u^ϵ, $f(u^\epsilon)$, $\phi_\epsilon(u^\epsilon)$ are equi-integrable locally on Q. Then, there exists a subsequence $(T_{[a,b]}(u^\epsilon))_\epsilon$ that converges in $L^1_{\text{Loc}}(Q)$.

To prove Theorem 1.3.6, we need the following result.

Lemma 1.3.7. *Suppose (f, ϕ) is non degenerate and let $u^\epsilon = u^\epsilon(t, x)$ be an entropy solution of (P^ϵ_1). Then for all $a, b \in \mathbb{R}$ such that $0 \leq a < b \leq u_{\max}$,*

$$T_{[a,b]}(u^\epsilon)_t + \operatorname{div}\Big(f(T_{[a,b]}(u^\epsilon)) - \nabla\phi_\epsilon(T_{[a,b]}(u^\epsilon))\Big) = \kappa^\epsilon_{a,b} \text{ in } \mathcal{D}'(Q)$$

with $\kappa^\epsilon_{a,b} \in M(Q)$. Here $M(Q)$ represents the set of all Radon measures on Q. Moreover, for each compact set $K \subset Q$, we have $Var\kappa^\epsilon_{a,b}(K) \leq C(K, a, b)$, uniformly in $\epsilon \in (0, 1)$.

Proof. By the well known representation property for non-negative distributions, we derive from (1.9) that for each $k \in [0, u_{\max}]$

$$|u^\epsilon - k|_t + \operatorname{div}\Big(sign(u^\epsilon - k)(f(u^\epsilon) - f(k)) - \nabla|\phi_\epsilon(u^\epsilon) - \phi_\epsilon(k)|\Big) = -\kappa^\epsilon_k \text{ in } \mathcal{D}'(Q)$$

where $\kappa^\epsilon_k \in M_b(Q)$, $\kappa^\epsilon_k \geq 0$. Further, for a compact set $K \subset Q$ we choose a non-negative function $\xi = \xi_K(t, x) \in C^\infty_0(Q)$, which equals 1 on K. Then, we have the estimate

$$\begin{aligned}
\kappa^\epsilon_k(K) &\leq \int_0^T \int_\Omega \xi(t, x) d\kappa^\epsilon_k(t, x) \\
&= \int_Q \Big\{|u^\epsilon - k|\xi_t + \Big(sign(u^\epsilon - k)(f(u^\epsilon) - f(k)) - \nabla\Big|\phi_\epsilon(u^\epsilon) - \phi_\epsilon(k)\Big|\Big).\nabla\xi\Big\} \\
&\leq \int_Q (J^\epsilon_1 + J_2) \max\left(|\xi_t|, |\nabla\xi|, |\Delta\xi|\right) dxdt =: A(K, k, J^\epsilon_1),
\end{aligned} \tag{1.27}$$

where $J_1^\epsilon(t,x) = |u^\epsilon| + |f(u^\epsilon)| + |\phi_\epsilon(u^\epsilon)|$ and $J_2 = |k| + |f(k)| + |\phi_\epsilon(k)|$ are bounded in L^1 due to the fact that u^ϵ, $f(u^\epsilon)$, $\phi_\epsilon(u^\epsilon)$ are bounded in L^∞, uniformly on ϵ (see Theorem 1.3.5). Therefore $\kappa_k^\epsilon(K)$ can be upper bounded by some quantity $A(K,k)$. Further, notice that for each $a, b \in \mathbb{R}$ and for any function g

$$g(T_{[a,b]}(r)) = \frac{1}{2}\Big(sign(r-a)(g(r)-g(a)) - sign(r-b)(g(r)-g(b))\Big) + \frac{1}{2}\left(g(a)+g(b)\right).$$

From (1.27), we have with $g = Id$, $g = f$ and $g = \phi_\epsilon$

$$T_{[a,b]}(u^\epsilon)_t + \operatorname{div}\Big(f(T_{[a,b]}(u^\epsilon)) - \nabla\phi_\epsilon(T_{[a,b]}(u^\epsilon))\Big) = \kappa_{a,b}^\epsilon \text{ in } \mathcal{D}'(Q), \tag{1.28}$$

with $\kappa_{a,b}^\epsilon = \frac{1}{2}(\kappa_b - \kappa_a)$. Moreover, we have

$$\mathrm{Var}\kappa_{a,b}^\epsilon(K) \le \frac{1}{2}\Big(A(K,a) + A(K,b)\Big) =: C(K,a,b).$$

This concludes the proof. □

Notice that for all $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, we have $T_{[a,b]}(T_{[0,u_{\max}]}) = T_{\tilde{a},\tilde{b}}$ with $\tilde{a} = \max(a,0)$ and $\tilde{b} = \min(b, u_{\max})$. In order to justify the passage to the limit, we need the following easy lemma :

Lemma 1.3.8. *Suppose that for all compact set $K \subset Q$, the sequence Ψ_n is bounded in $L^\infty(K)$, and converges a.e. to Ψ. Assume that the sequence (Φ_n) converges weakly in $L^2(K)$ to Φ. Then $\Psi_n\Phi_n$ converges to $\Psi\Phi$ weakly in $L^2(K)$.*

Now, we are able to prove Theorem 1.3.2.

Proof of Theorem 1.3.2. Take some countable set of values $\epsilon \to 0$. We derive from Lemma 1.3.7 and the above remark, that for all $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

$$T_{[a,b]}(u^\epsilon)_t + \operatorname{div}\Big(f(T_{[a,b]}(u^\epsilon)) - \nabla\phi(T_{[a,b]}(u^\epsilon))\Big) = \kappa_{a,b}^\epsilon + \epsilon\Delta T_{[a,b]}(u^\epsilon) \text{ in } \mathcal{D}'(Q);$$

here $(\kappa_{a,b}^\epsilon)_\epsilon$ is a bounded sequence in $M_b(K)$ for each compact set $K \subset Q$. Moreover, due to (1.10), we have that $\epsilon\Delta T_{[a,b]}(u^\epsilon)$ tends to zero in $H^{-1}(Q)$. By Sobolev embedding we have $H^{-1}(Q) = W^{-1,2}(Q) \subset W^{-1,d}(Q)$, $d \le 2$, therefore $\epsilon\Delta T_{[a,b]}(u^\epsilon)$ tends to zero in $W^{-1,d}(Q)$. Since $M_b(K)$ is compactly embedded in $W^{-1,d}(K)$ for each $d \in [1, \frac{\ell+1}{\ell})$, we see that $T_{[a,b]}(u^\epsilon)_t + \operatorname{div}\Big(f(T_{[a,b]}(u^\epsilon)) - \nabla\phi(T_{[a,b]}(u^\epsilon))\Big)$ is pre-compact in $W^{-1,d}(K)$. Since (f,ϕ) is assumed to be non-degenerate, then applying Theorem 1.3.6 we find $T_{[0,u_{\max}]}(u^\epsilon) \longrightarrow T_{[0,u_{\max}]}(u)$ as $\epsilon \to 0$ in $L^1(K)$, for a subsequence. Covering Q by a countable of compact subsets K and using the Cantor diagonal extraction argument, we get $u^\epsilon \to u$ in $L^1_{\mathrm{Loc}}(Q)$ (and actually in $L^1(Q)$, because u^ϵ take their values in $[0, u_{\max}]$). Extracting a further subsequence if necessary, we can assume that $u^\epsilon \longrightarrow u$ a.e. in Q as $\epsilon \to 0$.
It remains to derive the entropy formulation (1.2) for u. Passing to the limit in inequality (1.9), we claim that the limit function $u = u(t,x)$ satisfies the inequality (1.2) for all $k \in [0, u_{\max}]$ such that the level set $u^{-1}(k)$ has zero measure. Indeed, by the continuity of f, we have $sign(u^\epsilon - k)(f(u^\epsilon) - f(k)) \longrightarrow sign(u-k)(f(u) - f(k))$ as $\epsilon \to 0$ a.e. in Q. Further, since $\phi_\epsilon(u_\epsilon)$ is bounded in $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ and converges a.e to the limit that is readily identified with $\phi(u)$, we deduce by Lemma 1.3.8 that $sign(u^\epsilon - k)\nabla\phi_\epsilon(u^\epsilon) \rightharpoonup$

$sign(u-k)\nabla\phi(u)$ in $L^2(Q)$ for k such that $u^{-1}(k)$ has zero measure. Notice that the set of such values of k is dense in $[0, u_{\max}]$. It is easy to see that the left-hand side of (1.2) is continuous with respect to k, because $\nabla\phi(u) = 0$ a.e. on the set $[u = k]$ (see Lemma 1.4.4 below). Therefore, by density we inherit (1.2) for all $k \in [0, u_{\max}]$. We conclude that $u(t,x)$ is an entropy solution of (P_1). □

1.4 Uniqueness result for entropy solutions of (P_1) in one space dimension

The main result of this section is the following theorem :

Theorem 1.4.1. *Suppose that $\Omega = (a,b)$ is a bounded interval of $\mathbb{R}$, then (P_1) admits a unique entropy solution.*

Let us first recall an essential property of entropy solutions, based on the idea of J. Carrillo [28].

Proposition 1.4.2. *Let $\xi \in C^\infty([0,T[\times\mathbb{R}^\ell)$, $\xi \geq 0$. Then for all $k \in [u_c, u_{\max}]$, for all $D \in \mathbb{R}^\ell$ and for all entropy solution u of (P_1), we have*

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega \Big\{|u-k|\xi_t + sign(u-k)\Big(f(u)-f(k)-\nabla\phi(u)+D\Big).\nabla\xi\Big\}\,dxdt \\
&+ \int_\Omega |u_0-k|\xi(0,x)dx + \int_0^T\int_{\partial\Omega} |(f(k)-D).\eta(x)|\,\xi d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)dt \\
&\geq \overline{\lim_{\sigma\to 0}}\,\frac{1}{\sigma}\int\int_{Q\cap\{-\sigma<\phi(u)-\phi(k)<\sigma\}} \nabla\phi(u).(\nabla\phi(u)-D)\xi. \qquad (1.29)
\end{aligned}$$

Remark 1.4.3. *Notice that this proposition makes explicit the information on the dissipation. Let us stress that in* (1.2)*, $D = 0$ and $k \in [0, u_{\max}]$ while in* (1.29) *$D \in \mathbb{R}^\ell$ but $k \in [u_c, u_{\max}]$.*

Proposition 1.4.2 is a key ingredient of the uniqueness technique. To prove this proposition, we need the following remarks. Firstly, for all $u \in [0, u_{\max}]$ and for all $k \in [u_c, u_{\max}]$, one has $sign(u-k) = sign(\phi(u)-\phi(k))$. Secondly, recall

Lemma 1.4.4. *For all entropy solution u of (P_1), one has :*
$\nabla\phi(u) = 0$ a.e. on the set $\{(t,x) \in Q$ such that $u(t,x) \in [0,u_c]\}$.

Proof. This result comes from Marcus and Mizel lemma (cf. [57]) which states that for $p \in (1,\infty)$ and F in $W^{1,p}$, $\nabla F = 0$ a.e on $F^{-1}(\mathcal{N})$, where $\mathcal{N}$ is a set of zero measure on $\mathbb{R}$. Applying this for a.e. $t \in (0,T)$, for $u \in [0,u_c]$, we have $\nabla\phi(u) = 0$ on $[\phi(u)]^{-1}\{0\}$ with $\phi(u) \in H^1(\Omega)$. Let $E_{N+1} = \{(t,x)$ such that $u(t,x) \in [0,u_c]\}$ and $E_N(t) = \{x$ such that $u(t,x) \in [0,u_c]\}$. Then, by Fubini theorem,

$$|E_{N+1}| = \int_0^T |E_N(t)|dt = 0.$$

□

Proof of Theorem 1.4.2. Since u is a weak solution of (P_1), then for all $k \in [u_c, u_{\max}]$ and all $D \in \mathbb{R}^\ell$, u is a weak solution of the following problem :

$$(P_k)\begin{cases} (u-k)_t + \operatorname{div}\Big((f(u)-\nabla\phi(u)) - (f(k)-D)\Big) &= 0 & \text{in } Q,\\ u(0,x)-k &= u_0(x)-k & \text{on } \Omega,\\ \Big((f(u)-\nabla\phi(u)) - (f(k)-D)\Big).\eta &= -(f(k)-D).\eta & \text{on } \Sigma. \end{cases}$$

Take the test function $sign_\sigma(\phi(u)-\phi(k))\xi$ in the weak formulation of this problem with $\xi \in C^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^\ell)$. Using the formalism of [3], we have

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle (u-k)_t, sign_\sigma(\phi(u)-\phi(k))\xi\rangle_{H^1(\Omega)^*,H^1(\Omega)}\,dt\\ &-\int_0^T\!\!\int_\Omega sign_\sigma(\phi(u)-\phi(k))\Big((f(u)-\nabla\phi(u)) - (f(k)-D)\Big).\nabla\xi\\ &-\int_0^T\!\!\int_\Omega \xi\Big((f(u)-\nabla\phi(u)) - (f(k)-D)\Big).\nabla sign_\sigma(\phi(u)-\phi(k))\\ &-\int_0^T\!\!\int_{\partial\Omega} sign_\sigma(\phi(u)-\phi(k))(f(k)-D).\eta\xi = 0. \end{aligned} \tag{1.30}$$

By the chain rule (see [3], [44]) the first integral of (1.30) gives :

$$-\int\!\!\int_Q \int_k^u sign_\sigma(\phi(r)-\phi(k))dr\xi_t - \int_\Omega \int_k^{u_0} sign_\sigma(\phi(r)-\phi(k))dr\xi(0,x).$$

Using the fact that $k \in [u_c, u_{\max}]$ and passing to the limit as σ goes to 0, we obtain :

$$\begin{aligned} &\int_0^T\!\!\int_\Omega \left\{\int_k^u sign_\sigma(\phi(r)-\phi(k))dr\right\}\xi_t dxdt \longrightarrow \int_0^T\!\!\int_\Omega |u-k|\xi_t dxdt,\\ &\int_\Omega \left\{\int_k^{u_0} sign_\sigma(\phi(r)-\phi(k))dr\right\}\xi(0,x)dx \longrightarrow \int_\Omega |u_0-k|\xi(0,x)dx. \end{aligned}$$

After passing to the limit as σ goes to 0 in the second integral of (1.30), and using the fact that $k \in [u_c, u_{\max}]$, we obtain the expression

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega sign(u-k)\Big((f(u)-\nabla\phi(u)) - (f(k)-D)\Big).\nabla\xi.$$

The third integral of (1.30) can be written as

$$\iint_Q \xi(f(u)-f(k)).\nabla sign_\sigma(u-k) - \iint_Q \xi(\nabla\phi(u)-D).\nabla sign_\sigma(\phi(u)-\phi(k)).$$

By passing to the limit, the integral in the first term goes to 0, and the second term becomes

$$\begin{aligned} &\overline{\lim_{\sigma\to 0}} \int_0^T\!\!\int_\Omega \xi\left(\nabla\phi(u)-D\right).\nabla sign_\sigma(\phi(u)-\phi(k))\\ &= \overline{\lim_{\sigma\to 0}} \int_0^T\!\!\int_\Omega \xi\left(\nabla\phi(u)-D\right) sign_\sigma'(\phi(u)-\phi(k)).\nabla\phi(u)\\ &= \overline{\lim_{\sigma\to 0}} \frac{1}{\sigma}\int_{Q\cap\{-\sigma<\phi(u)-\phi(k)<\sigma\}} \nabla\phi(u).(\nabla\phi(u)-D)\xi. \end{aligned}$$

The limit of last integral of (1.30) can be upper bounded as follow :

$$\lim_{\sigma\to 0}\int_0^T\int_{\partial\Omega} sign_\sigma(\phi(u)-\phi(k))(f(k)-D).\eta\xi \le \int_0^T\int_{\partial\Omega} |(f(k)-D).\eta(x)|\,\xi.$$

Then, we obtain the required inequality (1.29). □

Now, we consider the stationary problem associated to problem (P_1) :

$$(S_1)\begin{cases} u+\operatorname{div}(f(u)-\nabla\phi(u)) &= g \ \text{ in } \ \Omega,\\ (f(u)-\nabla\phi(u)).\eta &= 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega.\end{cases}$$

Remark 1.4.5. *If $u(x)$ independent of t is solution of (S_1) then $u(t,x)=u(x)$ is solution of (P_1) with the source term $g-u$. Then, we can deduce from Definition* 1.2.2 *and Proposition* 1.4.2 *their equivalent form for the stationary problem.*

Definition 1.4.6. *Let g a measurable function taking values in $[0,u_{\max}]$. A measurable function u taking values in $[0,u_{\max}]$ is an entropy solution of (S_1), if $\phi(u)\in H^1(\Omega)$ and for all $\xi\in C^\infty(\mathbb{R}^\ell)^+$, $\forall k\in[0,u_{\max}]$,*

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega sign(u-k)\,u\,\xi dy+\int_\Omega sign(u-k)\Big(f(u)-f(k)-\nabla\phi(u)\Big).\nabla\xi dy\\ &+\int_{\partial\Omega}|f(k).\eta(y)|\,\xi d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)+\int_\Omega sign(u-k)g\xi dy\ge 0.\end{aligned}\tag{1.31}$$

Proposition 1.4.7. *Let $\xi\in C^\infty(\mathbb{R}^\ell)$; then for all $k\in[u_c,u_{\max}]$, for all $D\in\mathbb{R}^\ell$, for all entropy solution u of (S_1), we have :*

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega sign(u-k)\,u\,\xi dy+\int_\Omega sign(u-k)\Big(f(u)-f(k)-\nabla\phi(u)+D\Big).\nabla\xi dy\\ &+\int_{\partial\Omega}|(f(k)-D).\eta(y)|\,\xi d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)+\int_\Omega sign(u-k)\,g\,\xi dy\\ &\ge\overline{\lim_{\sigma\to 0}}\,\frac{1}{\sigma}\int_{\Omega\cap\{-\sigma<\phi(u)-\phi(k)<\sigma\}}\nabla\phi(u)(\nabla\phi(u)-D)\xi.\end{aligned}\tag{1.32}$$

From now on, we will suppose that $\Omega=(a,b)$ is a bounded interval of $\mathbb{R}$.

Proposition 1.4.8. *For all measurable function g taking values in $[0,u_{\max}]$ the problem (S_1) admits a solution u such that $(f(u)-\phi(u)_y)$ is continuous up the boundary, i.e., $(f(u)-\phi(u)_y)\in C([a,b])$. Moreover, $f(u)-\phi(u)_y$ is zero at $y=a$ and $y=b$.*

Proof. For existence of entropy solution, we can refer to [54, Chap 2], using Galerkin approximations, in a way similar to Theorem 1.3.5 and 1.3.2.
Since u is a weak solution of (S_1), this means that $(f(u)-\phi(u)_y)_y=g-u$ in $\mathcal{D}'$. Then $(f(u)-\phi(u)_y)_y\in L^\infty([a,b])$, which implies that $(f(u)-\phi(u)_y)\in W^{1,\infty}([a,b])\subset C([a,b])$.
Now, as in Remarks 1.2.3, item 3, from (1.31) we deduce that $(f(u)-\phi(u)_y)_{|\partial\Omega}=0$ in the weak sense. Therefore $f(u)-\phi(u)_y\in C_0([a,b])$. □

To continue, we will recast problem (P_1) under the abstract form of an evolution equation governed by an accretive operator, in order to apply classical results of the nonlinear semigroup theory (see, e.g., [17]). Let us define the (possibly multivalued) operator $A_{f,\phi}$ by it resolvent

$$(u,z)\in A_{f,\phi} = \Big\{ u \text{ such that } u \text{ is an entropy solution of } (S_1), \text{ with } g = u + z \Big\}.$$

For an operator $A : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$, denote by $R(A)$ its range, by $D(A)$ its domain and by $\overline{R(A)}$, $\overline{D(A)}$ their closures in $L^1(\Omega)$ respectively.
Let us stress that for $u\in D(A)$, $f(u) - \phi(u)_y \in C_0([a,b])$ due to Proposition 1.4.8.
Recall (cf. [17]) that an operator A is accretive if $\Big[\beta-\hat\beta, \alpha-\hat\alpha\Big]_{L^1(\Omega)} \geq 0$ for all $(\beta,\alpha),(\hat\beta,\hat\alpha) \in A$, where for $\beta,\alpha \in L^1(\Omega)$ the bracket $[.,.]_{L^1(\Omega)}$ is defined by $[\beta,\alpha]_{L^1(\Omega)} = \displaystyle\int_\Omega sign(\beta)\alpha + \int_{[\beta=0]} |\alpha|$. If A is accretive and $R(I+\lambda A) = L^1(\Omega)$ for some $\lambda > 0$, then A is m-accretive.

Proposition 1.4.9. *Let $(u,z) \in A_{f,\phi}$, $(\hat u,\hat z) \in A_{f,\phi}$. Then for $\xi \in C^\infty(\overline{\Omega})^+$*

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |u-\hat u|\xi dy + \int_\Omega sign(u-\hat u)\Big(f(u)-f(\hat u)-\phi(u)_y+\phi(\hat u)_y\Big).\xi_y dy\\ &\leq \int_\Omega sign(u-\hat u)(g-\hat g)\xi dy + \int_{[u=\hat u]} |g-\hat g|\xi dy = \Big[u-\hat u, g-\hat g\Big]_{L^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Proof. (Sketched) The proof of Proposition 1.33 is actually contained in the proof of Theorem 1.4.13 below, due to Remark 1.2.3. Actually a simpler argument applies, because both $f(\hat u) - \phi(\hat u)_y$ and $f(u) - \phi(u)_y$ have strong trace in the context of the stationary problem (S_1). □

Somewhat abusively, we will write $L^1(\Omega;[0,u_{\max}])$ for the set of all measurable functions from $[a,b]$ to $[0,u_{\max}]$.

Proposition 1.4.10. *The following properties hold true.*

1. *$A_{f,\phi}$ is accretive in $L^1(\Omega)$.*
2. *For all λ sufficiently small, $R(I+\lambda A_{f,\phi})$ contains $L^1(\Omega;[0,u_{\max}])$.*
3. *$\overline{D(A_{f,\phi})} = L^1(\Omega;[0,u_{\max}])$.*

Proof. 1. Let $(u,z) \in A_{f,\phi}$, $(\hat u,\hat z) \in A_{f,\phi}$. Applying Proposition 1.4.9 with $\xi = 1$ in (1.33) and the standard properties of the bracket (see [17]), we get

$$\begin{aligned}\|u-\hat u\|_{L^1(\Omega)} &\leq [u-\hat u, g-\hat g]_{L^1(\Omega)}\\ &\leq [u-\hat u, u-\hat u+z-\hat z]_{L^1(\Omega)}\\ &\leq \|u-\hat u\|_{L^1(\Omega)} + [u-\hat u, z-\hat z]_{L^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

We deduce that $[u-\hat u, z-\hat z]_{L^1(\Omega)} \geq 0$, so that $A_{f,\phi}$ is accretive.
2. For $\lambda > 0$, consider the problem

$$(S_\lambda)\begin{cases} u_\lambda + \lambda(f(u_\lambda) - (\phi(u_\lambda))_y)_y &= g \ \text{ in } \ \Omega,\\ \lambda(f(u_\lambda) - \phi(u_\lambda)_y).\eta(y) &= 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Notice that the notion of solution for (S_λ) is like the Definition 1.4.6. Let $g \in L^1(\Omega;[0,u_{\max}])$, and $\lambda > 0$ then, there exists u_λ entropy solution of (S_λ) (see Proposition 1.4.8) such that $(u_\lambda, \frac{g-u_\lambda}{\lambda}) \in A_{f,\phi}$. Hence $g \in R(I+\lambda A_{f,\phi})$ and therefore $R(I+\lambda A_{f,\phi}) \supset L^1(\Omega;[0,u_{\max}])$, which was to be shown.
3. Let $PC([a,b];[0,u_{\max}])$ be the set of piecewise constant functions from $[a,b]$ to $[0,u_{\max}]$. Then $PC([a,b];[0,u_{\max}])$ is dense in $L^1([a,b];[0,u_{\max}])$. Take $g \in PC([a,b];[0,u_{\max}])$, $g = \sum_i c_i \mathbf{1}_{(a_i,b_i)}$ where the (a_i,b_i) are disjoint intervals. There exists $u_n \in L^\infty(a,b)$ entropy solution of $(S_{\frac{1}{n}})$, i.e, we have $(u_n, n(g-u_n)) \in A_{f,\phi}$. For $k \in [0,u_{\max}]$, for all $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ we get

$$\frac{1}{n}\int_a^b sign(u_n-k)\Big(f(u_n)-f(k)-\partial_y\phi(u_n)\Big).\partial_y\xi dy + \int_a^b sign(u_n-k)(g-u_n)\xi dy + \frac{1}{n}\int_{[a,b]} |f(k).\eta(y)|\,\xi d\sigma \geq 0. \tag{1.34}$$

For every i, one can construct ξ_i^n such that $\xi_i^n \to \mathbf{1}_{(a_i,b_i)}$, as $n\to\infty$, $\text{supp}\xi_i^n \subset (a_i,b_i)$, $\|\partial_y\xi_i^n\|_{L^\infty} \leq 2\sqrt[3]{n}$ and $\xi_i^n \equiv 1$ in $(a_i+\delta_n^i, b_i-\delta_n^i)$ with $\delta_n^i = \frac{b_i-a_i}{2\sqrt[3]{n}}$.
Take $k=c_i$ and $\xi=\xi_i^n$ in (1.34).

$$\begin{aligned}\int_{a_i+\delta_n^i}^{b_i-\delta_n^i} |u_n-c_i|dy &\leq \frac{1}{n}\int_{a_i+\delta_n^i}^{b_i-\delta_n^i} sign(u_n-c_i)(f(u_n)-f(c_i)-\partial_y\phi(u_n)))\partial_y\xi_i^n dy \\ &\leq \frac{2}{n}|b-a|\,\|f\|_{L^\infty}|.|\partial_y\xi_i^n\|_{L^1} + \|\frac{1}{\sqrt{n}}\partial_y\phi(u_n)\|_{L^2}.\|\partial_y\xi_i^n\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Then, for all $\delta > \delta_n^i$, $u_n \to g$ a.e on $\cup_i(a_i+\delta, b_i-\delta)$. We conclude by the Lebesgue theorem that $u_n \to g$ in $L^1([a,b])$.
In conclusion, $D(A_{f,\phi})$ is dense in $PC([a,b];[0,u_{\max}])$ and therefore, it is also dense in $L^1(\Omega;[0,u_{\max}])$.
□

Now, we can exploit the notion of integral solution (see, e.g., [17, 18]).

Definition 1.4.11. *Suppose that $h \in L^1(Q)$ and $u_0 \in L^1(\Omega)$. A function $v \in C([0,T];L^1([a,b];[0,u_{\max}]))$ is an integral solution of the problem*

$$v_t + A_{f,\phi}(v) \ni h, \quad v(t=0) = u_0, \tag{1.35}$$

if $v(0,.) = u_0(.)$ and for all $(u,z) \in A_{f,\phi}$

$$\frac{d}{dt}\|v(t)-u\|_{L^1(\Omega)} \leq [v(t)-u, h(t)-z]_{L^1(\Omega)} \text{ in } \mathcal{D}'(0,T).$$

By Proposition 1.4.10, the operator $A_{f,\phi}$ is m-accretive [1] densely defined in $L^1(\Omega;[0,u_{\max}])$, by the general theory of non-linear semigroups (cf. [17, 18, 19]), we have the following result.

1. Rigorously speaking, this statement is false because $L^1(\Omega;[0,u_{\max}])$ is not a Banach space, but its convex subset. Nonetheless, this subset is invariant for the stationary problem (S_1), therefore the nonlinear semigroups theory applies without change in our case.

Corollary 1.4.12. *Let $\Omega = (a, b)$, $u_0, \hat{u}_0 \in L^1(\Omega)$ and $h, \hat{h} \in L^1(Q)$. Let $v, \hat{v}$ be integral solutions of* (1.35) *associated with the data (u_0, h) and $(\hat{u}_0, \hat{h})$, respectively. Then for a.e. $t \in [0, T)$.*

$$\|v(t) - \hat{v}(t)\|_{L^1} \leq \|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^1} + \int_0^t \|h(\tau) - \hat{h}(\tau)\|_{L^1} dt.$$

In particular, the integral solution is unique.

Theorem 1.4.13. *Let $\Omega = [a, b]$. Let v be an entropy solution of (P_1) and u be an entropy solution of (S_1). Then*

$$\frac{d}{dt}\|v(t) - u\|_{L^1(\Omega)} \leq \int_\Omega sign(v - u)(u - g)dx \text{ in } \mathcal{D}'(0, T). \tag{1.36}$$

In particular, v is an integral solution of (1.35) *with $h = 0$.*

First, note the following auxiliary result.

Lemma 1.4.14. ([7]) Let δ be a positive function with support in $[-1, 1]$ and $\|\delta\|_{L^1}$=1. Assume that for all $z \in [-1, 1]$, $w_n(., z) \to w(.)$ and $h_n(., z) \to h(.)$ in $L^1(\mathbb{R})$ as $n \to \infty$. If in addition $\|h_n(., z)\|_{L^1(\mathbb{R})}$ is bounded uniformly in n and z, then the below limit exists and the following equality holds :

$$\limsup_{n\to\infty} \iint sign w_n(x, z)h_n(x, z)\delta(z) \leq [w, h]. \tag{1.37}$$

Moreover, if for all $n \in \mathbb{N}$ and a.e. $z \in [-1, 1]$, $h_n(., z) = 0$ a.e. on $\{w_n(., z) = 0\}$ and if $h = 0$ a.e. on $\{w = 0\}$, then there exists

$$\lim_{n\to\infty} \iint sign w_n(x, z)h_n(x, z)\delta(z) = \int sign(w)h. \tag{1.38}$$

Proof. The claim of Inequality (1.37) follows from the definition and the upper semicontinuity of the bracket, the definition of δ and the Fatou lemma. Inequality (1.38) follows by applying the first one to w_n, h_n and to $-w_n$, h_n. □

Proof of Theorem 1.4.13. To start with, note that by the result of [26] an entropy solution v of (P_1) is automatically time-continuous with values in $L^1(\Omega; [0, u_{\max}])$.
Now, we apply the doubling of variables [49] in the way of [7]. We consider $v = v(t, x)$ an entropy solution of (P_1) and $u = u(y)$ an entropy solution of (S_1). Consider nonnegative function $\xi = \xi(t, x, y)$ having the property that $\xi(., ., y) \in C^\infty([0, T) \times \overline{\Omega})$ for each $y \in \overline{\Omega}$, $\xi(t, x, .) \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ for each $(t, x) \in [0, T) \times \overline{\Omega}$.
We denote $\Omega_x = \{x \in \Omega; v(t, x) \in [0, u_c]\}$; $\Omega_y = \{y \in \Omega; u(y) \in [0, u_c]\}$ and Ω_x^c, Ω_y^c their complementaries in Ω. In (1.29), take $\xi = \xi(t, x, y)$, $k = u(y)$, $D = \phi(u)_y$ and integrate over Ω_y^c. We get

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_y^c} \int_0^T \int_{x\in\Omega} \Big\{|v - u|\xi_t + sign(v - u)\Big(f(v) - \phi(v)_x - f(u) + \phi(u)_y\Big).\xi_y\Big\} \\
&+ \int_{\Omega_y^c} \int_0^T \int_{x\in\partial\Omega} \Big|(f(u) - \phi(u)_y).\eta(x)\Big| \xi d\sigma dt dy + \int_{\Omega_y^c} \int_{x\in\Omega} |v_0 - u|\xi(0, x, y) \\
&\geq \overline{\lim_{\sigma\to 0}} \frac{1}{\sigma} \int_{\Omega_y^c} \int_0^T \int_{x\in\Omega\cap\{-\sigma<\phi(v)-\phi(u)<\sigma\}} \phi(v)_x(\phi(v)_x - \phi(u)_y)\xi.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

In the same way, in (1.2) take $\xi = \xi(t,x,y)$, $k = u(y)$, integrate over Ω_y, and use the fact that $\phi(u)_y = 0$ in Ω_y. We get

$$\int_{\Omega_y}\int_0^T\int_{x\in\Omega}\Big\{|v-u|\xi_t + sign(v-u)\Big(f(v)-\phi(v)_x - f(u)+\phi(u)_y\Big).\xi_y\Big\}$$
$$+\int_{\Omega_y}\int_0^T\int_{x\in\partial\Omega}\Big|(f(u)-\phi(u)_y).\eta(x)\Big|\,\xi + \int_{\Omega_y}\int_{x\in\Omega}|v_0-u|\xi(0,x,y)\geq 0. \tag{1.40}$$

Since $\Omega = \Omega_x \cup \Omega_x^c$, by adding (1.39) to (1.40) we obtain :

$$\int_{\Omega}\int_0^T\int_{\Omega}\Big\{|v-u|\xi_t + sign(v-u)\Big(f(v)-\phi(v)_x - f(u)+\phi(u)_y\Big).\xi_x\Big\}$$
$$+\int_{\Omega}\int_0^T\int_{x\in\partial\Omega}\Big|(f(u)-\phi(u)_y).\eta(x)\Big|\,\xi + \int_{\Omega}\int_{\Omega}|v_0-u|\xi(0,x,y)$$
$$\geq \overline{\lim_{\sigma\to 0}}\frac{1}{\sigma}\int_{\Omega_y^c}\int_0^T\int_{x\in\Omega\cap\{-\sigma<\phi(v)-\phi(u)<\sigma\}}\phi(v)_x(\phi(v)_x-\phi(u)_y)\xi. \tag{1.41}$$

In (1.32), take $\xi = \xi(t,x,y)$, $k = v(t,x)$, $D = \phi(v)_x$ and integrate over $(0,T)\times\Omega_x^c$

$$\int_0^T\int_{\Omega_x^c}\int_{y\in\Omega} sign(w-u)\Big(f(v)-\phi(v)_x - f(u)+\phi(u)_y\Big).\xi_y$$
$$+\int_0^T\int_{\Omega_x^c}\int_{y\in\partial\Omega}|(f(v)-\phi(v)_x).\eta(y)|\,\xi d\sigma dxdt$$
$$+\int_0^T\int_{\Omega_x^c}\int_{y\in\Omega} sign(v-u)(u-g(y))\xi dxdtdy$$
$$\geq \overline{\lim_{\sigma\to 0}}\frac{1}{\sigma}\int_{\Omega_x^c}\int_0^T\int_{y\in\cap\{-\sigma<\phi(u)-\phi(v)<\sigma\}}\phi(u)_y(\phi(u)_y-\phi(v)_x)\xi. \tag{1.42}$$

Since $u(y)$ is entropy solution, then take in (1.31) $\xi = \xi(t,x,y)$, $k = v(t,x)$, integrate over $(0,T)\times\Omega_x$ and use the fact that $\phi(v)_x = 0$ in $(0,T)\times\Omega_x$.

$$\int_0^T\int_{\Omega_x}\int_{y\in\Omega} sign(v-u)\Big(f(v)-\phi(v)_x - f(u)+\phi(u)_y\Big).\xi_y dydxdt$$
$$+\int_0^T\int_{\Omega_x}\int_{y\in\partial\Omega}|(f(v)-\phi(v)_x).\eta(y)|\,\xi d\sigma dxdt$$
$$+\int_0^T\int_{\Omega_x}\int_{y\in\Omega} sign(v-u)(u-g(y))\xi dxdtdy \geq 0. \tag{1.43}$$

By adding (1.42) to (1.43), we obtain

$$\int_0^T\int_{\Omega}\int_{\Omega} sign(v-u)\Big(f(v)-\phi(v)_x - f(u)+\phi(u)_y\Big).\xi_y dydxdt$$
$$+\int_0^T\int_{\Omega}\int_{y\in\partial\Omega}|(f(v)-\phi(v)_x).\eta(y)|\,\xi d\sigma dxdt$$
$$+\int_0^T\int_{\Omega}\int_{\Omega} sign(v-u)(u-g(y))\xi dxdtdy$$
$$\geq \overline{\lim_{\sigma\to 0}}\frac{1}{\sigma}\int_{\Omega_x^c}\int_0^T\int_{y\in\cap\{-\sigma<\phi(u)-\phi(v)<\sigma\}}\phi(u)_y(\phi(u)_y-\phi(v)_x)\xi. \tag{1.44}$$

Now, sum (1.41) and (1.44) to obtain

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega\int_\Omega |v-u|\xi_t dydxdt + \int_\Omega\int_\Omega |v_0-u|\xi(0,x,y)dxdy\\
&+\int_0^T\int_\Omega\int_\Omega sign(v-u)\Big((f(v)-\phi(v)_x)-(f(u)+\phi(u)_y)\Big).(\xi_x+\xi_y)\\
&+\int_0^T\int_{x\in\partial\Omega}\int_\Omega \Big|(f(u)-\phi(u)_y).\eta(x)\Big|\,\xi d\sigma dtdy\\
&+\int_0^T\int_\Omega\int_{y\in\partial\Omega} |(f(v)-\phi(v)_x).\eta(y)|\,\xi dyd\sigma dt\\
&+\int_0^T\int_\Omega\int_\Omega sign(v-u)(u-g(y))\xi\\
&\geq \overline{\lim_{\sigma\to 0}}\frac{1}{\sigma}\int_0^T\iint_{\Omega_x^c\times\Omega_y^c\cap\{-\sigma<\phi(v)-\phi(u)<\sigma\}} |\phi(v)_x-\phi(u)_y|^2\xi dydxdt \geq 0. \qquad (1.45)
\end{aligned}$$

Next, following the idea of [7] we consider the test function $\xi(t,x,y)=\theta(t)\rho_n(x,y)$, where $\theta\in C_0^\infty(0,T)$, $\theta\geq 0$, $\rho_n(x,y)=\delta_n(\Delta)$ and $\Delta=(1-\frac{1}{n(b-a)})x-y+\frac{a+b}{2n(b-a)}$. Then, $\rho_n\in\mathcal{D}(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$ and $\rho_{n_{|\Omega\times\partial\Omega}}(x,y)=0$. Due to this choice

$$\int_0^T\int_{x\in\Omega}\int_{y\in\partial\Omega}|(f(v)-\phi(v)_x).\eta(y)|\,\rho_n\theta dyd\sigma dt = 0.$$

By Proposition 1.4.8, $(f(u)-\phi(u)_y)\in C_0([a,b])$. Therefore we have $\Big|(f(u)-\phi(u)_y).\eta(x)\Big|\longrightarrow 0$ when $x\to y$, i.e, as $n\longrightarrow\infty$. We conclude that

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\int_{x\in\partial\Omega}\int_{y\in\Omega}\Big|(f(u)-\phi(u)_y).\eta(x)\Big|\,\rho_n\theta dyd\sigma dt = 0.$$

It remains to study the limit, as $n\to\infty$

$$I_n=\int_0^T\int_\Omega\int_\Omega \theta sign(v-u)\Big((f(v)-\phi(v)_x)-(f(u)-\phi(u)_y)\Big).((\rho_n)_x+(\rho_n)_y)dydxdt.$$

We use the change of variable $(x,y)\mapsto(x,z)$ with $z=n(x-y)-\frac{1}{b-a}x+\frac{a+b}{b-a}$,

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{2}{b-a}\int_{-1}^1\int_0^T\int_\Omega sign(v-u)\Big((f(v)-\phi(v)_x)-(f(u)-\phi(u)_y)\Big).\delta_n'(z)\theta\\
&= \frac{2}{b-a}\int_{-1}^1\int_0^T\int_a^b sign(v(t,x)-u_n(x,z))\Big(p(t,x)-q_n(x,z)\Big)\delta_n'(z)\theta(t),
\end{aligned}$$

where $u_n(x,z):=u(y)$, $p(t,x):=f(v)-\phi(v)_x$ and $q_n:=f(u)-\phi(u)_y$. For z given, $u_n(.,z)$ converges to $u(.)$ in L^1 and $q_n(.,z)$ converges to $q(.):=f(u)-\phi(u)_x$ in L^1. From Lemma 1.4.14, we deduce that for all $z\in[-1,1]$

$$K_n(z):=\int_Q sign(v_n(t,x,z))h_n(t,x,z)dxdt\longrightarrow_{n\to\infty}\int_Q sign(v)hdxdt =: K = \text{const},$$

where $v_n:=v-u_n$, $h_n:=p-q_n$ and $h:=p-q$. Then $K_n(.)$ converges to K independently of z. Moreover, from the definition of K_n one finds easily the uniform L^∞ bound $|K_n|\leq 2(\|p\|_{L^1(Q)}+T\|q\|_{L^1(\Omega)})$, for n large enough. Hence by the Lebesgue theorem,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1 K_n(z)\delta'(z) = K\int_{-1}^1\delta'(z) = 0.$$

We have shown that the limit of I_n equals zero. The passage to the limit in other terms in (1.45) is straightforward. Finally (1.45) gives for $n \longrightarrow \infty$

$$\int_0^T \int_\Omega |v(t,x) - u(y)|\theta'(t)dxdt + \int_0^T \int_\Omega sign(v-u)(u-g)\theta \geq 0.$$

Hence

$$\frac{d}{dt}\|v(t) - u\|_{L^1(\Omega)} \leq \int_\Omega sign(v-u)(u-g)dx \text{ in } \mathcal{D}'(0,T).$$

Thus, v is an integral solution of (1.35). □

Now, the claim of Theorem 1.4.1 is a direct consequence of the fact that the entropy solution is also an integral solution, and of Corollary 1.4.12.
From now, we are able to generalize the result of zero-flux boundary condition in the case of nonlinear Robin boundary problem for degenerate parabolic equation.

1.5 Nonlinear Robin boundary problem

In this section, we investigate about well-posedness of the following initial boundary value problem

$$(P_2)\begin{cases} u_t + \operatorname{div} f(u) - \Delta\phi(u) & = 0 & \text{in} \quad Q =]0,T[\times\Omega, \\ u(0,x) & = u_0(x) & \text{in} \quad \Omega, \\ b(u) - (f(u) - \nabla\phi(u)).\eta & = 0 & \text{on} \quad \Sigma =]0,T[\times\partial\Omega. \end{cases}$$

This problem corresponds to the zero-flux boundary problem when $b \equiv 0$.
We suppose the same hypotheses as for the zero-flux boundary condition on the data u_0 and the function ϕ. Moreover, we assume that the function b is a continuous non-decreasing function on Σ. In some situation, b may be a maximal monotone graph on $\mathbb{R}$ (see [12] and the next chapter also). Here, we assume also that b satisfies the following hypotheses :

$$b = \beta \circ \phi \text{ where } \beta \text{ is a non-decreasing Lipschitz continuous function.} \tag{H2}$$

$$b(u_{\max}) \geq |f(u_{\max}).\eta|. \tag{H3}$$

Further, the function f is a Lipschitz continuous function. Moreover, we require that

$$f(0) = 0 \text{ and } b(0) = 0. \tag{H4}$$

Let us remark that the hypotheses (H3) and (H4) are a generalization of hypothesis (H1).

We propose an adequate entropy formulation for problem (P_2) which incorporates two boundary integrals. In contrast to the entropy formulation of Definition 1.2.2, where the passage to the limit in the only boundary integral is straightforward, for our entropy inequality, we need the assumption (H2), which permits to give a sense to the boundary integral with the term $b(u)$ see Definition 1.5.1. Indeed, we can deduce that $b(u)$ has a trace on the boundary as a function in Sobolev space $H^1(\Omega)$.

As in the section 1.3, the proof of existence of our entropy solution employs a vanishing viscosity approximation. We pass to limit in the interior of the domain Q, by using the local compactness result of

Panov [66] as in the zero-flux case, for this we suppose some relation between f and ϕ (see Definition 1.3.1). We pay particular attention to to the boundary term (here (H2) is needed).

For the uniqueness result, we use again nonlinear semigroup techniques (see, e.g., [17]) and Kruzhkov doubling of variables methods. At the present stage, we can deduce uniqueness in the case where Ω is a bounded open interval of $\mathbb{R}$. Notice that, for the same reasons as for the zero-flux boundary condition, the problem of uniqueness is still open in multiple space dimensions.

1.5.1 Notion of Entropy Solution of (P_2)

Consider the following notion.

Definition 1.5.1. *A measurable function u taking values on* $[0, u_{\max}]$ *is called entropy solution of problem* (P_2) *if* $\phi(u) \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, $b(u) \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ *and the following conditions hold :*
$\forall k \in [0, u_{\max}]$, $\forall \xi \in C_0^\infty([0,T[\times\mathbb{R}^\ell)$, *with* $\xi \geq 0$ *:*

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \Big\{ |u-k|\xi_t + sign(u-k)\Big(f(u)-f(k)-\nabla\phi(u)\Big).\nabla\xi \Big\}\, dxdt \\
&+ \int_\Omega |u_0-k|\xi(0,x)dx + \int_0^T \int_{\partial\Omega} |f(k).\eta(x) - b(k)|\, \xi(t,x) d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)dt \\
&- \int_0^T \int_{\partial\Omega} |b(u)-b(k)|\xi(t,x) d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)dt \geq 0. \qquad (1.46)
\end{aligned}$$

Remark 1.5.2.
1. *The entropy solution in the sense of Definition* 1.5.1 *is in particular a weak solution. Indeed, first take in inequality* (1.46) $k = 0$ *use* $b(0) = 0$ *and* (H4). *Next take* $k = u_{\max}$ *and use* (H3).
2. *Let us stress that, in particular, the boundary condition* $(f(u) - \nabla\phi(u)).\eta = b(u)$ *is verified literally in the weak sense as in the case of zero-flux boundary condition (see [9]). This contrasts with the properties of the Dirichlet problem (see [14]) ; we expect that the boundary condition should be relaxed if assumption* (H3) *is dropped (see [12, 11]) and numerical tests of chapter* 4.
3. *The integral in the boundary term is well defined due to the hypothesis* (H2). *We can use the fact that the trace of* $\theta(t,.) \in H^1(\Omega)$ *on* $\partial\Omega$ *is well defined in* $L^2(\partial\Omega)$ *for* $t \in (0,T)$ *a.e.*

As in the section 1.4 and according to the idea of J. Carrillo (cf [28]), we give an additional property of entropy solutions, useful for the uniqueness techniques.

Proposition 1.5.3. *Let* $\xi \in C^\infty([0,T[\times\mathbb{R}^\ell)$ *; then for all* $k \in [\phi_c, u_{\max}]$ *; for all* $D \in \mathbb{R}^\ell$ *and for all entropy solution u of* (P_2), *we have :*

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \Big\{ |u-k|\xi_t + sign(u-k)\Big(f(u)-f(k)-\nabla\phi(u)+D\Big).\nabla\xi \Big\}\, dxdt \\
&+ \int_\Omega |u_0-k|\xi(0,x)dx - \int_0^T \int_{\partial\Omega} |b(u)-b(k)|\, \xi(t,x) d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)dt \\
&+ \int_0^T \int_{\partial\Omega} |b(k) - (f(k)-D).\eta(x)|\, \xi(t,x) d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)dt \\
&\geq \overline{\lim_{\sigma\to 0}} \frac{1}{\sigma} \int \int_{Q\cap\{-\sigma<\phi(u)-\phi(k)<\sigma\}} \nabla\phi(u).(\nabla\phi(u)-D)\xi(t,x). \qquad (1.47)
\end{aligned}$$

As for the zero-flux boundary condition, we will see that entropy and integral solution coincide in the case $\Omega = (a, b)$ an interval of $\mathbb{R}$.

1.5.2 Existence of Entropy solution of (P_2)

Following the method of section 1.3 and exploiting (H2) which is used to handle the additional boundary term in (1.46) which was not present in (1.2) we give the following result :

Theorem 1.5.4. *Let $\ell \geq 1$. Assume that* (H4)*,* (H2) *and* (H3) *holds. Suppose that (f, ϕ) is non-degenerate (in the sense of Definition* 1.3.1*). Then, there exists an entropy solution u for the problem (P_2).*

To show the existence of entropy solutions, we approximate $\phi(u)$ by $\phi_\epsilon(u^\epsilon) = \phi(u^\epsilon) + \epsilon Id(u^\epsilon)$ for each $\epsilon > 0$. We construct a sequence of increasing continuous functions β_n such that $\beta_n \longrightarrow \beta$ uniformly on the compacts of $\mathbb{R}$ and set $b^n_\epsilon(u^\epsilon_n) = \beta_n \circ \phi_\epsilon(u_\epsilon)$. We obtain the following regularized strictly parabolic problem (P^n_ϵ) with unknown u^ϵ_n (for reasons of simplicity, we write u^ϵ instead of u^ϵ_n) :

$$(P^n_\epsilon)\begin{cases} u^\epsilon_t + \operatorname{div} f(u^\epsilon) - \Delta\phi_\epsilon(u^\epsilon) & = 0 \qquad \text{in} \quad Q =]0, T[\times\Omega, \\ u^\epsilon(0, x) & = u^\epsilon_0(x) \qquad \text{in} \quad \Omega, \\ b^n_\epsilon(u^\epsilon) - (f(u^\epsilon) - \nabla\phi(u^\epsilon)).\eta & = 0 \qquad \text{on} \quad \Sigma =]0, T[\times\partial\Omega, \end{cases}$$

where $(u^\epsilon_0)_\epsilon$ is a sequence of smooth functions that converges to u_0 a.e and respects the minimum/maximum values of u_0.

Definition 1.5.5. *A measurable function u^ϵ taking values on $[0, u_{\max}]$ is called an entropy solution of the initial-boundary value problem (P^n_ϵ) if the following conditions hold :*
$\forall k \in 0, u_{\max}]$, $\forall \xi \in C^\infty_0([0, T[\times\mathbb{R}^\ell)$, with $\xi \geq 0$:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \left\{ |u^\epsilon - k|\xi_t + sign(u^\epsilon - k)\Big(f(u^\epsilon) - f(k) - \nabla\phi(u^\epsilon)\Big).\nabla\xi \right\} dxdt \\ &+ \int_\Omega |u^\epsilon_0 - k|\xi(0, x)dx + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \Big| f(k).\eta(x) - b^n_\epsilon(k) \Big| \xi(t, x)d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)dt \\ &- \int_0^T \int_{\partial\Omega} |b^n_\epsilon(u^\epsilon) - b^n_\epsilon(k)|\xi(t, x)d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)dt \geq 0. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Definition 1.5.6. *Let u_0 be a measurable $[0, u_{\max}]$-valued function. A measurable function u^ϵ taking values on $[0, u_{\max}]$ is called weak solution of problem (P^n_ϵ) if : $\forall \theta \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ such that $\theta_t \in L^2(Q)$ and $\theta(T, .) = 0$, one has*

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \{u^\epsilon\theta_t + (f(u^\epsilon) - \nabla\phi_\epsilon(u^\epsilon)).\nabla\theta\} dxdt + \int_\Omega u^\epsilon_0\theta(0, x)dx \\ &- \int_0^T \int_{\partial\Omega} b_\epsilon(u^\epsilon)\xi d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)dt = 0. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Theorem 1.5.7. *For $u_0 \in [0, u_{\max}]$, assume* (H4)*,* (H2) *and* (H3) *hold. Problem (P^n_ϵ) admits a weak solution u^ϵ which is also an entropy solution. In particular, we have $0 \leq u^\epsilon \leq u_{\max}$. In addition, there exists C independent on ϵ such that*

$$\| \sqrt{\epsilon}\nabla u^\epsilon\|_{L^2(Q)} \leq C;$$

$$\|\phi_\epsilon(u_\epsilon)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C;$$

$$\|b_\epsilon^n(u_\epsilon)\|_{L^1(\Sigma)} \leq C \text{ and } \int_\Sigma u_\epsilon b_\epsilon^n(u_\epsilon) \leq C. \tag{1.50}$$

This result can be proved, e.g., using Galerkin method as in the first part of this chapter (see section 1.3).

Lemma 1.5.8. *Assume that the sequence $(\Psi_h)_h$ is such that : $\|\Psi_h\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C$ and $\Psi_h \longrightarrow \Psi$ in $L^2(Q)$. Then $\gamma\Psi_h \longrightarrow \gamma\Psi$ in $L^2(\Sigma)$, where γ is the trace operator.*

The proof uses localization to a small neighborhood of Σ.

Proof. Since $\partial\Omega$ is C^1, for any point $a \in \partial\Omega$, we are able to choose a neighborhood $\Omega_h = \{b \in \Omega \mid \ dist(a,b) < h\}$. More precisely, making rotation and a shift of coordinate axes if necessary, we can assume that $a = (0, y)$ and we consider $b = (x_1, y) \in \Omega_h$ where $x_1 < h$.
For all $y \in \mathbb{R}^{\ell-1}$ and x_1 given,

$$\int_0^T |\Psi(t,a)|^2 dt = \int_0^T |\Psi(t,0,y)|^2 dt \leq \int_0^T |\Psi(t,x_1,y)|^2 dt + \int_0^T \Big| \int_0^{x_1} \partial_1\Psi(t,s,y) ds \Big|^2 dt$$

$$\int_y \int_0^T |\Psi(t,0,y)|^2 dt dy \leq \int_y \int_0^T |\Psi(t,x_1,y)|^2 dt dy + \int_y \int_0^T \int_0^{x_1} \Big|\partial_1\Psi(t,s,y)\Big|^2 ds dt dy$$

Now, we average on x_1 and set :

$$B = \int_0^T \int_y |\Psi(t,0,y)|^2 dy dt.$$

Then

$$\begin{aligned}
B &\leq \frac{1}{h}\int_0^h \int_y \int_0^T |\Psi(t,x_1,y)|^2 dt dy dx_1 + \frac{1}{h}\int_0^h \int_y \int_0^T \int_0^{x_1} \Big|\partial_1\Psi(t,s,y)\Big|^2 ds dt dy dx_1 \\
&\leq \frac{1}{h}\int_0^h \int_y \int_0^T |\Psi(t,x_1,y)|^2 dt dy dx_1 + \frac{1}{h}\int_0^h \int_y \int_0^T \int_0^{h} \Big|\partial_1\Psi(t,s,y)\Big|^2 ds dt dy dx_1 \\
&\leq \frac{1}{h}\int_0^h \int_y \int_0^T |\Psi(t,x_1,y)|^2 dt dy dx_1 + \int_0^h \frac{1}{h} dx_1 \int_y \int_0^T \int_0^{h} \Big|\partial_1\Psi(t,s,y)\Big|^2 ds dt dy \\
&\leq C\|\Psi\|^2_{L^2(Q_h)} + C\|\nabla\Psi\|^2_{L^2(Q_h)}.
\end{aligned}$$

Then, we prove this lemma by using the linearity of the trace operator, the strong convergence of $\Psi_h - \Psi$, the boundedness of $\|\nabla(\Psi_h - \Psi)\|$ in L^2, and letting h to zero. □

Then Theorem 1.5.4 follows using techniques of section 1.3 and using Theorem 1.3.6 to justify the passage to the limit in Q and Lemma 1.5.8 for boundary integral.

1.5.3 Uniqueness result of Entropy Solution of (P_2) in one space dimension

As a generalization of Theorem 1.4.1 we have

Theorem 1.5.9. *Suppose that $\Omega = (a, b)$ is a bounded interval of $\mathbb{R}$, then (P_2) admits a unique entropy solution.*

In order to study uniqueness in the framework of nonlinear semigroup theory, we consider for all bounded function g, the stationary problem associated to problem (P_2) :

$$(S_2)\begin{cases} u + \operatorname{div}(f(u) - \nabla\phi(u)) &= g \text{ in } \Omega, \\ b(u) - (f(u) - \nabla\phi(u)).\eta &= \text{ on } \partial\Omega. \end{cases}$$

The notion of entropy solution of (S_2) corresponds to the time-independent entropy solution of (P_2) with source term $g - u$. In the case where $\Omega = (a, b)$ is a bounded interval of $\mathbb{R}$, we have an important result, which states that, the total flux is regular at the points a and b. This kind of regularity seem hard to obtain in multiple space dimensions for (S_2), and even in dimension $\ell = 1$ for (P_2).

Proposition 1.5.10. *For all measurable function g taking values in $[0, u_{\max}]$ the problem (S_2) admits a solution u such that $(f(u)-\phi(u)_y)$ is continuous up the boundary, i.e., $(f(u)-\phi(u)_y) \in C([a, b])$. Moreover, $b(u) - (f(u) - \phi(u)_y).\eta(y)$ is zero at $y = a$ and $y = b$. (Here $\eta(a) = -1$ and $\eta(b) = +1$).*

From now, let's define the operator $A_{f,\phi,b}$ on L^1 associated with « regular » solutions of (S_2) by its graph :

$$(u, z) \in A_{f,\phi,b} = \Big\{ u \text{ such that } u \text{ is an entropy solution of } (S_2), \text{ with } g = u + z \Big\}.$$

Proposition 1.5.11.
1. *$A_{f,\phi,b}$ is accretive in $L^1(\Omega)$.*
2. *For all λ sufficiently small, $R(I+ \lambda A_{f,\phi,b})$ contains $L^1(\Omega; [0, u_{\max}])$.*
3. *$\overline{D(A_{f,\phi,b})} = L^1(\Omega; [0, u_{\max}])$.*

According to the general results of [17], it follows existence and uniqueness of integral solution in the sense of Definition 1.5.1 :

Corollary 1.5.12. *Let $\Omega = (a, b)$, $u_0, \hat{u}_0 \in L^1(\Omega)$ and $h, \hat{h} \in L^1(Q)$. Let $v, \hat{v}$ be integral solutions of* (1.35) *(with operator $A_{f,\phi,b}$) associated with the data (u_0, h) and $(\hat{u}_0, \hat{h})$, respectively. Then for a.e. $t \in [0, T)$.*

$$\|v(t) - \hat{v}(t)\|_{L^1} \leq \|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^1} + \int_0^t \|h(\tau) - \hat{h}(\tau)\|_{L^1} dt.$$

Adapted to our case, we have the following result

Theorem 1.5.13. *Let $\Omega = (a, b)$. Let v be an entropy solution of (P_2) and u be an entropy solution of (S_2). Then*

$$\frac{d}{dt}\|v(t) - u\|_{L^1(\Omega)} \leq \int_\Omega sign(v - u)(u - g)dx \text{ in } \mathcal{D}'(0, T). \tag{1.51}$$

In particular, v is an integral solution of (1.35) *with $h = 0$.*

We follow the arguments of the proof of Theorem 1.4.13, focusing on the additional boundary term in Definition 1.5.1 and Proposition 1.5.3.

Proof of Theorem 1.5.13 *and Theorem* 1.5.9. We consider $v = v(t,x)$ an entropy solution of (P_2) and $u = u(y)$ an entropy solution of (S_2). Consider nonnegative function $\xi = \xi(t,x,y)$ having the property that $\xi(.,.,y) \in C^\infty([0,T)\times\overline{\Omega})$ for each $y \in \overline{\Omega}$, $\xi(t,x,.) \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ for each $(t,x) \in [0,T)\times\overline{\Omega}$. Apply the doubling of variables [49] in the spirit of [9], we obtain this following inequality

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega\int_\Omega |v-u|\xi_t dydxdt + \int_\Omega\int_\Omega |v_0-u|\xi(0,x,y)dxdy\\
&+\int_0^T\int_\Omega\int_\Omega sign(v-u)\Big((f(v)-\phi(v)_x)-(f(u)+\phi(u)_y)\Big).(\xi_x+\xi_y)\\
&+\int_0^T\int_{x\in\partial\Omega}\int_\Omega \Big|b(u)-(f(u)-\phi(u)_y).\eta(x)\Big|\,\xi dyd\sigma dt\\
&+\int_0^T\int_\Omega\int_{y\in\partial\Omega} |b(v)-(f(v)-\phi(v)_x).\eta(y)|\,\xi d\sigma dxdt\\
&+\int_0^T\int_\Omega\int_\Omega sign(v-u)(u-g(y))\xi dydxdt\\
&\geq \int_0^T\int_{x\in\Omega}\int_{y\in\partial\Omega} |b(u)-b(v)|\,\xi d\sigma dxdt + \int_0^T\int_{y\in\Omega}\int_{x\in\partial\Omega} |b(u)-b(v)|\,\xi d\sigma dydt\\
&+\varlimsup_{\sigma\to 0}\frac{1}{\sigma}\int_0^T\iint_{\Omega_x^c\times\Omega_y^c\cap\{-\sigma<\phi(v)-\phi(u)<\sigma\}} |\phi(v)_x-\phi(u)_y|^2\xi dydxdt \geq 0. \qquad (1.52)
\end{aligned}
$$

Next, following the idea of [7], we take the test function $\xi(t,x,y)=\theta(t)\rho_n(x,y)$, where $\theta\in C_0^\infty(0,T)$, $\theta\geq 0$, $\rho_n(x,y)=\delta_n(\Delta)$ and $\Delta=(1-\frac{1}{n(b-a)})x-y+\frac{a+b}{2n(b-a)}$. Then, $\rho_n\in\mathcal{D}(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$ and $\rho_{n_{|\Omega\times\partial\Omega}}(x,y)=0$. Due to this choice,

$$\int_0^T\int_{x\in\Omega}\int_{y\in\partial\Omega} |b(v)-(f(v)-\phi(v)_x).\eta(y)|\,\rho_n\theta dyd\sigma dt = 0.$$

By Proposition 1.5.10, $b(u)-(f(u)-\phi(u)_y).\eta(y)\in C_0([a,b])$. Therefore we have $\Big|b(u)-(f(u)-\phi(u)_y).\eta(x)\Big| \longrightarrow 0$ when $x\to y$, i.e, as $n\longrightarrow\infty$. We conclude that

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\int_{x\in\partial\Omega}\int_{y\in\Omega}\Big|b(u)-(f(u)-\phi(u)_y).\eta(x)\Big|\,\rho_n\theta dyd\sigma dt = 0.$$

with the calculation detailed in the proof of theorem 1.4.13, we deduce that

$$\int_0^T\int_\Omega\int_\Omega \theta sign(v-u)\Big((f(v)-\phi(v)_x)-(f(u)-\phi(u)_y)\Big).((\rho_n)_x+(\rho_n)_y)dydxdt\to 0.$$

The passage to the limit in other terms of (1.52) is straightforward. Finally (1.52) gives for $n\longrightarrow\infty$

$$\int_0^T\int_\Omega |v(t,x)-u(y)|\theta'(t)dxdt + \int_0^T\int_\Omega sign(v-u)(u-g)\theta\geq 0.$$

Hence, we get (1.51) by passing to the limit in (1.52) with the above choice of ξ.

$$\frac{d}{dt}\|v(t)-u\|_{L^1(\Omega)} \leq \int_\Omega sign(v-u)(u-g)dx \text{ in } \mathcal{D}'(0,T).$$

Thus, the entropy solution v of the problem (P_2) is an integral solution of (1.35). This proves that v is a unique entropy solution due to Corollary 1.5.12. □

Chapitre 2

Strong boundary conditions for entropy solutions of the Dirichlet problem for parabolic-hyperbolic balance law

2.1 Introduction

Let $\Omega = (a, b)$ be an open interval of $\mathbb{R}$. In this context, the boundary of Ω is reduced to the points a and b. To simplify, we work with one point on the boundary, the treatment of another point is similar, then in the sequel of this chapter, we will work with $\Omega = (-\infty, 0)$ with the initial datum u_0 compactly supported in $(-\infty, 0]$. We consider the non homogenous Dirichlet boundary problem :

$$(P_3)\begin{cases} u_t + (f(u) - \phi(u)_x)_x &= 0 \ \text{ in } \ Q = (0,T)\times\Omega, \\ u(0,x) &= u_0 \ \text{ in } \ \Omega, \\ u(t,x) &= u^D(x) \ \text{ on } \ \Sigma = (0,T)\times\partial\Omega. \end{cases}$$

We assume that the convection flux f is a Lipschitz-continuous function and here the hypothesis (H1) of Chapter 1 can be dropped, indeed we can ensure the L^∞ bound on solution with respect to the maximum/minimum values between u_0 and u^D. Further, the function ϕ is Lipschitz-continuous and non decreasing on $\mathbb{R}$. This assumption means that the problem (P_3) is of degenerate parabolic-hyperbolic type. For the sake of simplicity, we will treat the case where $\phi = 0$ on $(-\infty, u_c]$ with $u_c \geq 0$ and ϕ is increasing on $[u_c, +\infty)$. We suppose also that the couple (f, ϕ) is non degenerate in the sense of Definition 1.3.1 (see Chapter 1) ; this helps to prove compactness of sequence of approximate solutions constructed by vanishing viscosity method.

To study well-posedness for parabolic-hyperbolic equations the standard way is to work with the so-called entropy solutions (see Kruzhkov [49], for the case of conservation laws, and Carrillo [28] for the adaptation of this notion to the case of degenerate elliptic-parabolic-hyperbolic equation). Moreover, as (P_3) includes first order conservation laws, it is well known that another major difficulty dealing with hyperbolic equation is to make precise the meaning of the boundary condition which may generally not be assumed pointwise in some part of the boundary. In the BV-framework, Bardos, Leroux and Nédélec

(see [14]) propose a boundary formulation involving strong trace of BV-solution. Vasseur in [74] generalized the Bardos-LeRoux-Nédélec approach to merely L^∞ data by proving the existence of strong boundary traces in this setting, under a non-degeneracy assumption (see also Panov [65]).
Another approach to the entropy formulation in the merely L^∞ setting was initiated by Otto in [63]. This approach has been extended to the degenerate parabolic case with inhomogeneous Dirichlet boundary condition. This problem received much attention, in the framework of divergence-measure fields and using Otto weak trace technique with some regularity limitation for u^D see Mascia, Porretta, Terracina [58], Michel and Vovelle [59], Vallet [71].
Under strong BV assumption on the data, Rouvre and Gagneux in [68] prove also existence and uniqueness of strong entropy solution for homogenous Dirichlet condition that provides an explicit non formal interpretation in terms of the boundary flux. Our goal is similar to the goal of [68] but we use a quite different way to formulate strong boundary condition. Our approach uses the idea of "effective boundary condition graph" (Andreianov and Sbihi see [12]) developed for the pure hyperbolic case.

While there exist several papers in the literature dealing with Dirichlet boundary condition for degenerate parabolic-hyperbolic equation, our starting point is the fundamental paper of Carrillo for homogenous Dirichlet boundary condition $u^D = 0$ (see [28]) which establishes an ingenious uniqueness technique. Entropy solution in the sense of Carrillo is a bounded measurable function u such that $\phi(u) \in L^2(0,T;H_0^1(-\infty,0))$, and the following inequalities are satisfied :

— $\forall k \geq 0$, $\forall \xi \in C^\infty([0,T)\times\mathbb{R})$, $\xi \geq 0$ and $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall \xi \in C_0^\infty([0,T)\times(-\infty,0))$, $\xi \geq 0$

$$\int_0^T \int_{-\infty}^0 \Big\{(u-k)^+\xi_t + sign^+(u-k)\Big(f(u)-f(k)-\phi(u)_x\Big).\xi_x\Big\}\,dxdt + \int_{-\infty}^0 (u_0-k)^+\xi(0,x)dx \geq 0. \tag{2.1}$$

— $\forall k \leq 0$, $\forall \xi \in C^\infty([0,T)\times\mathbb{R})$, $\xi \geq 0$ and $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall \xi \in C_0^\infty([0,T)\times(-\infty,0))$, $\xi \geq 0$

$$\int_0^T \int_{-\infty}^0 \Big\{(u-k)^-\xi_t + sign^-(u-k)\Big(f(u)-f(k)-\phi(u)_x\Big).\xi_x\Big\}\,dxdt + \int_{-\infty}^0 (u_0-k)^-\xi(0,x)dx \geq 0. \tag{2.2}$$

With the above choice of k and ξ, inequalities (2.1)-(2.2) implicitly contain a relaxed version of boundary condition "$u(t,0^-) \equiv 0$". Indeed, we have the following situation.

— The trace $u(t,0^-)$ can be given a rigorous meaning. This is the case in the setting of [68] at a price of additional assumptions on u_0. This is also the case for a wide class of initial-boundary problems for equation $u_t + \mathrm{div}(f(u) - \nabla\phi(u)) = 0$, but the existence of boundary trace of u becomes a difficult result based on very technical arguments (see [50], [1] and also the Appendix A of this manuscript).

— In general, the strong trace $u(t,0^-)$ of solution of (P_3) in the sense of [28] does not verify $u(t,0^-) \equiv 0$, which can be seen already in the Bardos, Leroux, Nédélec hyperbolic setting. We refer to [68] for examples in the degenerate parabolic setting. Therefore, one can say that "$u = 0$ on Σ" is the formal homogenous Dirichlet boundary condition.

Our goal, as in [68], is to find an explicit meaning of this formal boundary condition. To this end, we choose the framework of general dissipative boundary conditions in the spirit of [12]. Indeed for the purely hyperbolic problem we have the following observations :

— The condition "$u = u^D$" on Σ can be expressed under the form $(u(t,0^-), \mathcal{F}[u](t,0^-)) \in \beta$ where $\mathcal{F}[u] = f(u)$ is the normal flux and β is the maximal monotone graph on $\mathbb{R}$ given by $\beta = \{u^D\} \times \mathbb{R}$. This expresses a formal boundary condition which should be understood in the relaxed Bardos-Leroux-Nédélec sense (see (2.3) below).

— As it was first observed by Dubois and LeFloch in [37], the equivalent form of the BLN condition is $(u(t,0^-), \mathcal{F}[u](t,0^-)) \in \widetilde{\mathcal{B}}$ where $\widetilde{\mathcal{B}}$ is another maximal monotone graph on $\mathbb{R}$ and $\mathcal{F}[u] = f(u)$ is the flux of the pure hyperbolic conservation law. Following [12] we will say that $\widetilde{\mathcal{B}}$ encodes the effective boundary condition.

— It is possible to extend this terminology to a wide class of maximal monotone graphs β prescribing among others Dirichlet, Neumann, Robin and obstacle conditions. In [12], the projection operation that brings β to $\widetilde{\mathcal{B}}$ was described and well-posedness and stability results were established.

So, in this chapter we are intended to recast the formal boundary condition

$$(u(t,0^-), \mathcal{F}[u](t,0^-)) \in \beta = \{u^D\} \times \mathbb{R}$$

into the effective boundary condition

$$(u(t,0^-), \mathcal{F}[u](t,0^-)) \in \widetilde{\mathcal{B}}$$

where $\mathcal{F}[u] = f(u) - \phi(u)_x$ in the degenerate parabolic case.The main point of our work is the description of the effective boundary condition graph $\widetilde{\mathcal{B}}$ in terms of f, ϕ and $\beta = \{u^D\} \times \mathbb{R}$.We postpone to further work the generalization of this approach to different graphs β, including the zero-flux graph $\beta = \mathbb{R} \times \{0\}$ (see Section 4.2 for a preliminary discussion of this condition in the case where the theory of Chapter 1 does not apply).
Further, in this chapter we are also inspired by the general guidelines of Chapter 1 (see also the classical work of Bénilan-Touré [18]) so that we study first the stationary problem

$$(S_3)\begin{cases} u + (f(u) - \phi(u)_x)_x = g \ \text{ in } \ (-\infty, 0), \\ u = u^D \ \text{ on } \ \{x = 0\}. \end{cases}$$

Notice that in this setting, the problem was solved by Carrillo [28]. Here, we hope that we can give a simpler well-posedness argument. We derive also existence and uniqueness for the abstract evolution problem. Discussion of entropy formulation in terms of $\widetilde{\mathcal{B}}$ for the evolution problem (P_3) is initiated. We propose equivalent definitions of solutions to problem (P_3) based on an explicit interpretation of the Dirichlet boundary conditions by requiring the couple $(U(t), F(t))$ to belong to an explicitly defined maximal monotone graph. This graph combines a part which corresponds to the Bardos-Leroux-Nédélec condition in the region of the hyperbolic degeneracy and an obstacle-type part that is due to the non-degenerate parabolic part. Here $t \mapsto U(t)$ and $t \mapsto F(t)$ represent the traces in a precise sense of the solution u and of the total flux $\mathcal{F}[u] = f(u) - \phi(u)_x$ on the boundary $x = 0$. Unfortunately, the different

formulations (including the already classical Carrillo [28] formulation) are equivalent if one restricts the framework of entropy solution by assuming more regularity on the parietal flux. This regularity is always fulfilled for the one-dimensional stationary problem, and we easily prove existence and uniqueness in this case. Then, for the evolution problem, we rephrase this new definition as in the stationary case in three different definitions. This leads us to define a new concept of solution called "weakly trace-regular entropy solution" ; the three definitions are equivalent under the weak trace-regularity assumption. Then uniqueness is obtained by comparing a solution which can be called "strongly trace-regular entropy solution" to the stationary problem with a weakly trace-regular entropy solution of (P_3). Thus we are exploiting again the uniqueness framework offered by integral solutions. To sum up, in this Chapter we find a more explicit expression of the boundary condition and a much simpler uniqueness proof, compared to the classical work of Carrillo (see [28]) ; but we impose the additional weak trace-regularity assumption on the solution.

This chapter is organized as follows. In Section 2.2 we give properties of the effective graph $\widetilde{\mathcal{B}}$ corresponding to the Dirichlet boundary condition. In section 2.3 we study the stationary problem, we propose three equivalent definitions of entropy solutions and give well-posedness result. In section 2.4, we deduce existence and uniqueness of the integral solution, which is characterized by a family of inequalities reminiscent of the entropy formulation. Finally in the section 2.5, we study our new notion of solution for (P_3) called weakly trace-regular entropy solution.

2.2 Characterization of the graph prescribing the effective boundary condition

According to the discussion in section 2.1, in problem (P_3), the Dirichlet boundary values condition $u = u^D$ on $(0,T)\times\{0\}$ can be prescribed formally in terms of the maximal monotone graph $\beta = \{u^D\}\times\mathbb{R}$. This means that at the boundary, the couple $(u, \mathcal{F}[u].\eta)$ is supposed to belong to β, where η the unit normal to $\partial\Omega$ outward to Ω (here $\Omega = (-\infty, 0)$, $\partial\Omega = \{0\}$ and $\eta = 1$). This is indeed the case at the level of approximate solutions obtained by the vanishing viscosity approximation of (P_3) or by a finite volume scheme (see [59], cf. Chapter 3 below). But at the limit, the graph β in the above statement should be replaced by an appropriately projected graph that we denote by $\widetilde{\mathcal{B}}$. Our purpose is to define entropy solution and to establish well-posedness through convergence of natural viscosity procedure argument. To attract the reader's attention, let us first recall the same problem in the case $\phi(u) \equiv 0$ i.e hyperbolic conservation laws and after we can generalize it to the case where ϕ is non decreasing.

2.2.1 Case of the hyperbolic problem

Consider the following approximate problem

$$(P_3^\epsilon)\begin{cases} u_t^\epsilon + (f(u^\epsilon) + \epsilon u_x^\epsilon)_x &= 0 \ \text{ in } \ Q = (0,T)\times(-\infty,0), \\ u^\epsilon(0,x) &= u_0 \ \text{ in } \ (-\infty,0), \\ \left(u^\epsilon, (f(u^\epsilon) - \epsilon u_x^\epsilon)\right) \in \beta &= \{u^D\}\times\mathbb{R} \ \text{ on } \ \Sigma = (0,T)\times\{0\}. \end{cases}$$

which is a natural vanishing viscosity approximate of the problem (P_3). In this case, we expect that (P_3) is a formal limit of (P_3^ϵ). If we compare two solutions of (P_3^ϵ) with same boundary condition u^D and different initial condition, we are led to L^1 contraction. If one has enough compactness properties on sequence (u^ϵ), one can pass to the limit into the local weak and entropy formulation of (P_3) (cf Chapter 1), moreover one might hope that when passing to the limit $\epsilon \to 0$, the boundary condition is satisfied as limit in epsilon of $\left(u^\epsilon, (f(u^\epsilon) - \epsilon u_x^\epsilon)\right) \in \beta$. But this is not the case, because $L^1((0,T)\times(-\infty,0))$ compactness is the strongest property we can prove, and it gives no information on the convergence of u^ϵ on the boundary. In fact, the term ϵu_x becomes singular as $\epsilon \to 0$. This explains that boundary layers can appear in u^ϵ as $\epsilon \to 0$. As matter of fact, in general the boundary condition $u = u^D$ is not the correct limit obtained from u^ϵ as ϵ tends to zero. In [14], Bardos, Leroux and Nédélec state that the Dirichlet boundary condition should be seen as a formal condition and that is must interpreted by stating that the trace $\gamma u(t) = u(t, 0^-)$ of u at the point $x = 0$ belongs to the subset $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ defined in terms of u^D as

$$\mathcal{I} = \Big\{ v \in \mathbb{R} \text{ such that } sign(v - u^D)(f(v) - f(k)) \geq 0 \quad \forall k \in [\min(u^D, \gamma u), \max(u^D, \gamma u)]. \Big\}$$

Then the effective boundary condition reads :

$$\text{for a.e. } t \in (0,T) \quad \gamma u(t) \in \mathcal{I}. \tag{2.3}$$

This is the celebrated BLN 'Bardos-Leroux-Nedelec' formula. This effective boundary condition can be interpreted in term of effective maximal monotone graph $\widetilde{\mathcal{B}}$ as explained in section 2.1, see [37, 12] for details. To be specific, we have

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \left\{ (k, \mathcal{K}) \in \mathbb{R}^2 \text{ such that if } k \in (-\infty, u^D) \text{ then } \mathcal{K} = \min_{[k,u^D]} f, \text{ else } \mathcal{K} = \max_{[u^D,k]} f \right\}. \tag{2.4}$$

2.2.2 Case of the non-degenerate parabolic problem

In the non-degenerate parabolic situation, due to Lemma 1.5.8 of Chapter 1 the passage to the limit $(\epsilon \to 0)$ gives the exact boundary condition $u(0) = u^D$. Then, in this case $\widetilde{\mathcal{B}} = \beta$.

2.2.3 Case of the degenerate parabolic problem

Our aim is to adapt formula (2.4) to degenerate parabolic equation ; not surprisingly, the maximal monotone graph $\widetilde{\mathcal{B}}$ which expresses the effective boundary condition. Remark that in the degenerate parabolic case, if $u^D > u_c$, the passage to the limit $(\epsilon \to 0)$ still gives the exact boundary condition $u(0) = u^D$. On the other side, the case $u^D \leq u_c$ is more delicate. In this Chapter, we claim that, the maximal monotone graph $\widetilde{\mathcal{B}}$ is constructed from the formal graph $\beta = \{u^D\} \times \mathbb{R}$ as follows :

$$\widetilde{\mathcal{B}}^{Par} = \left| \begin{array}{rl} \{u^D\} \times \mathbb{R} & \text{if } u^D > u_c; \\ \{u_c\} \times [\max_{[u^D,u_c]} f, +\infty) & \text{if } u^D \leq u_c; \end{array} \right.$$

$$\widetilde{\mathcal{B}}^{Hyp} = \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset & \text{if } u^D > u_c; \\ (k,\mathcal{K}) \subset (-\infty, u_c] \times \mathbb{R}; & \text{if } u^D \le u_c, \text{ with } \left\{ \begin{array}{ll} \text{if } k \in (-\infty, u^D] & \text{then } \mathcal{K} = \min\limits_{[k,u^D]} f \\ \text{if } k \in [u^D, u_c] & \text{then } \mathcal{K} = \max\limits_{[u^D,k]} f \end{array} \right\} \end{array} \right\}.$$

Then, we say that

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \widetilde{\mathcal{B}}^{Par} \cup \widetilde{\mathcal{B}}^{Hyp} \tag{2.5}$$

is our effective maximal monotone graph. The part $\widetilde{\mathcal{B}}^{Hyp}$ of $\widetilde{\mathcal{B}}$ is a projection of β on the graph of $f(u)$ restricted to $(-\infty, u_c]$, cf [37] and (2.4) for the case $u_c = +\infty$. The part $\widetilde{\mathcal{B}}^{Par}$ expresses the obstacle condition induced by the fact that $\phi(u)_{|\Sigma} = \phi(u^D)$.

Remark 2.2.1. *Let us stress that according to the definition of $\widetilde{\mathcal{B}}^{Hyp}$ is the graph of a monotone continuous function on the open domain $(-\infty, u_c)$.*

Here, we give an essential property of the graph $\widetilde{\mathcal{B}}$.

Lemma 2.2.2. *The effective graph $\widetilde{\mathcal{B}}$ defined by* (2.5) *is maximal monotone.*

Proof. If $u^D > u_c$, $\widetilde{\mathcal{B}} = \widetilde{\mathcal{B}}^{par} = \beta$ and the claim is evident. So we assume $u^D \le u_c$. Let $(l, \mathcal{L})$ such that $\widetilde{\beta} \cup (l, \mathcal{L})$ is monotone.
Consider any point $k \in (-\infty, u_c)$, then according to the Remark 2.2.1, there exists a unique $\mathcal{K}(k)$ such that $(k, \mathcal{K}(k)) \in \widetilde{\mathcal{B}}^{Hyp}$ and $\mathcal{K}(k)$ depends continuously on $k \in (-\infty, u_c)$ because f is continuous.
Now, we have $\mathcal{L} = \mathcal{K}(l)$ if $l < u_c$.
Indeed, if $k > l$ then

$$\mathcal{L} \le \mathcal{K}(k) \underset{k \downarrow l}{\longrightarrow} \mathcal{K}(l),$$

and if $k < l$ then

$$\mathcal{L} \ge \mathcal{K}(k) \underset{k \uparrow l}{\longrightarrow} \mathcal{K}(l).$$

Finally, if $l = u_c$, then using only $k \uparrow l$ we find $\mathcal{L} \ge \lim\limits_{k \uparrow u_c} \mathcal{K}(k) = \max\limits_{[u^D, u_c]} f$. In this case $(l, \mathcal{L}) \in \widetilde{\mathcal{B}}^{Par} \subset \widetilde{\mathcal{B}}$.
This proves that $\widetilde{\mathcal{B}}$ is maximal monotone graph. □

2.3 Entropy solution of stationary problem

In this section, we consider the stationary problem associated to problem (P_3) :

$$(S_3) \left\{ \begin{array}{rl} u + (f(u) - \phi(u)_x)_x & = g \text{ in } (-\infty, 0), \\ u & = u^D \text{ on } \{x = 0\}. \end{array} \right.$$

We define the space $L_c^\infty((-\infty, 0))$ as the space of bounded measurable function compactly supported in Ω and we suppose here that $g \in L_c^\infty((-\infty, 0])$.

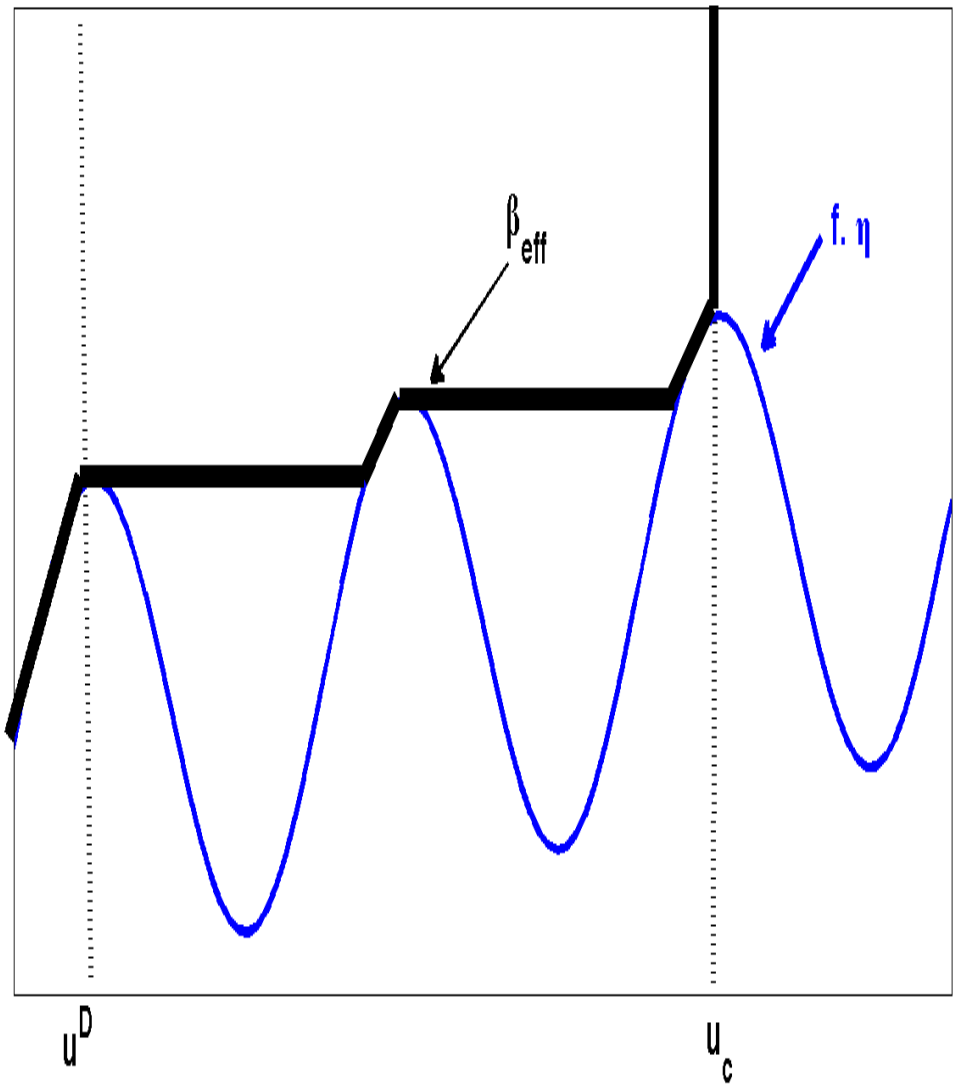

FIGURE 2.1 – Construction of the graph $\widetilde{\mathcal{B}}$

2.3.1 Definitions of entropy solution of (S_3)

Here, we propose several equivalent definitions of entropy solution for (S_3). But before, we give the usual notion of entropy solution of Cauchy problem called local entropy solution.

Definition 2.3.1. *A bounded measurable function u is called a local entropy solution of* (S_3) *inside of* Ω *if* $\phi(u) \in H^1(-\infty, 0)$ *and the following inequality is satisfied :*
for all $k \in \mathbb{R}$, $\xi \in C_0^\infty((-\infty, 0))$, $\xi \geq 0$ *:*

$$\int_{-\infty}^{0} \Big\{ sign(u-k)(g-u)\xi + sign(u-k)\Big(f(u) - f(k) - \phi(u)_x\Big).\xi_x \Big\}\, dx \geq 0. \tag{2.6}$$

Remark that $\phi(u) \in C((-\infty, 0])$ for every local entropy solution. In the sequel, we will show stronger continuity properties for local entropy solution.
The following definition is an interpretation of the definition of Carrillo entropy solution for Dirichlet boundary condition "$u = u^D$ on $\partial\Omega$" and it will be used for proving existence of entropy solution.

Definition 2.3.2. *A bounded measurable function u is called an entropy solution of* (S_3) *if*

1. *The measurable function u is a local entropy solution*
2. *The following inequalities are satisfied :*
   - $\forall k \in [u^D, +\infty)$, $\forall \xi \in C_0^\infty((-\infty, 0])$

$$\int_{-\infty}^{0} \Big\{ sign^+(u-k)(g-u)\xi + sign^+(u-k)\Big(f(u) - f(k) - \phi(u)_x\Big).\xi_x \Big\}\, dx \geq 0, \tag{2.7}$$

   - $\forall k \in (-\infty, u^D]$, $\forall \xi \in C_0^\infty((-\infty, 0])$,

$$\int_{-\infty}^{0} \Big\{ sign^-(u-k)(g-u)\xi + sign^-(u-k)\Big(f(u) - f(k) - \phi(u)_x\Big).\xi_x \Big\}\, dx \geq 0. \tag{2.8}$$

3. *Moreover,*

$$\phi(u)(0) = \phi(u^D). \tag{2.9}$$

Remark that in the case $u^D = 0$, then Definition 2.3.2 coincides with the definition proposed by Carrillo [28].

Proposition 2.3.3. *Suppose that* (2.9) *holds. Then the local entropy solution u is entropy solution in the sense of Definition* 2.3.2 *if and only if*

$$\forall k \geq u^D \quad \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{h} \int_{-h}^{0} sign^+(u-k)(\mathcal{F}[u] - f(k))dx \geq 0\ , \tag{2.10}$$

$$\forall k \leq u^D \quad \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{h} \int_{-h}^{0} sign^-(u-k)(\mathcal{F}[u] - f(k))dx \geq 0\ , \tag{2.11}$$

Proof. For the proof, taking $\xi_h = \min\{1, -\frac{x}{h}\}$ as a test function in (2.7), (2.8) and passing to the limit in h goes to zero one gets (2.10), (2.11). Reciprocally, combining (2.10), (2.11) with local entropy inequalities of Definition 2.3.1 written for the test function $(1 - \xi_h(x))\xi(x)$, one finds (2.7), (2.8). □

Now, we can reformulate this notion using the graph $\widetilde{\mathcal{B}}$ defined in the last section.

Definition 2.3.4. *A bounded measurable function u is called entropy solution of* (S_3) *if the following conditions are satisfied :*

1. *The function u is a local entropy solution.*
2. *The relation* (2.9) *holds. Moreover if* $u^D \leq u_c$ *then*

$$\forall (k, \mathcal{K}) \in \widetilde{\mathcal{B}}^{Hyp}, \ \ \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{h} \int_{-h}^{0} sign(u-k)\Big(\mathcal{F}[u] - \mathcal{K}\Big)dx \geq 0\ , \tag{2.12}$$

where $\mathcal{F}[u] = f(u) - \phi(u)_x$.

Remark 2.3.5. *Notice that in the case* $u^D > u_c$*, condition* (2.12) *does not contain any restriction because* $\widetilde{\mathcal{B}}^{Hyp} = \emptyset$*. But in the case* $u^D \leq u_c$*, this condition expresses, in the degenerate parabolic setting, the relaxed form of the Dirichlet condition similar to the "BLN" condition* (2.3) *known in the hyperbolic setting.*

Finally, we give the third definition which will almost readily lead to uniqueness : one only has to distinguish the case where two solutions coincide at the boundary point $x = 0$ and the case where they are different at the boundary point. The definition uses the graph $\widetilde{\mathcal{B}}$ in a direct way.

Definition 2.3.6. *A bounded measurable function u is called entropy solution of* (S_3) *if the following conditions are satisfied :*

1. *The function u is a local entropy solution and* (2.9) *holds.*
2. *There exists* $u(0) := \lim_{x\to 0^-} u(x)$.
3. *The total flux* $\mathcal{F}[u]$ *belongs to* $C((-\infty, 0])$*, in particular, there exists* $\mathcal{F}[u](0) = \lim_{x\to 0} \mathcal{F}[u](x)$.
4. *The couple* $(u(0), \mathcal{F}[u](0))$ *belongs to* $\widetilde{\mathcal{B}}$.

Lemma 2.3.7. *Properties 2. and 3. of Definition* 2.3.6 *are not restrictive. More precisely,*

(i) The item 3. *of Definition* 2.3.6 *is automatically fulfilled for every local weak solution of the equation* $u + (f(u) - \phi(u)_x)_x = g$*, i.e, solution in the sense* $\mathcal{D}'((-\infty, 0))$.

(ii) Assume that the couple (f, ϕ) *is non degenerate in the sense of Definition* 1.3.1. *Then the item* 2. *of Definition* 2.3.6 *is automatically fulfilled for every local entropy solution of the equation* $u + (f(u) - \phi(u)_x)_x = g$.

Proof. For the proof of (i) we refer to the paper [50] (see also the Appendix *A* of this thesis for another approach). Also the approach of the recent paper [1] is relevant to the item (i).
For (ii), see Proposition 1.4.8 of Chapter 1. □

2.3.2 Equivalence of the three definitions of entropy solution of (S_3)

Here we prove equivalence of the three definitions proposed in the last section.

Theorem 2.3.8. *Assume that the couple* (f, ϕ) *is non degenerate in the sense of Definition* 1.3.1. *Given a function u, the following assertions are equivalent*

1. *The function u is an entropy solution in the sense of Definition* 2.3.2.
2. *The function u is an entropy solution in the sense of Definition* 2.3.4.
3. *The function u is an entropy solution in the sense of Definition* 2.3.6.

Proof. The proof is based on Lemma 2.3.7. We know that there exist $U := u(0)$ and $F := \mathcal{F}[u](0)$. This permits to compute the limits in (2.12) for all $k \neq U$. Then Definition 2.3.2 (via Proposition 2.3.3) implies, also in the case $U = k$, the properties

$$\begin{cases} \text{if } k \geq u^D \text{ then } sign^+(U-k)(F-f(k)) \geq 0 \\ \text{if } k \leq u^D \text{ then } sign^-(U-k)(F-f(k)) \geq 0 \\ \qquad\qquad \text{and in all cases, } \phi(U) = \phi(u^D). \end{cases} \tag{2.13}$$

Reciprocally, if (2.13) holds and $U \neq k$ then we readily get (2.10) and (2.11). The restriction $U \neq k$ can be dropped using approximation of the value $k = U$ by $k_n \to U \pm 0$ and using the continuity of f along with the strong convergence of $\mathcal{F}[u]$ to F.
Similarly, Definition 2.3.4 reads :

$$\begin{cases} \phi(U) = \phi(u^D) \text{ and} \\ \forall (k, \mathcal{K}) \in \widetilde{\mathcal{B}}^{Hyp} \quad sign(U-k)(F-\mathcal{K}) \geq 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Observe that, in order to get (2.12) from (2.14) in the delicate case where $U = k$, it is important to recall that $\widetilde{\mathcal{B}}^{Hyp}$ is the graph of a continuous function (see Remark 2.2.1), so that we have $\mathcal{K} = \mathcal{K}(k)$ with $\mathcal{K}(k_n) \to \mathcal{K}(U)$ as $k_n \to U \pm 0$.
Finally, Definition 2.3.6 simply reads

$$(U, F) \in \widetilde{\mathcal{B}}. \tag{2.15}$$

First, we establish that (2.14) $\Leftrightarrow$ (2.15).
By the monotony of the graph $\widetilde{\mathcal{B}}$, the relation (2.15) readily implies the second line of (2.14). The first line of (2.14) also follows by considering separately the case $U > u_c$ (which gives $U = u^D$ then $\phi(U) = \phi(u^D)$) and $U \leq u_c$ (which implies $u^D \leq u_c$ thus $\phi(U) = 0 = \phi(u^D)$).
Conversely, let us show that if (2.14) holds, then $\widetilde{\mathcal{B}} \cup \{(U, F)\}$ is also a monotone graph. Indeed, due to the second line of (2.14), we have only to prove that

$$\forall (l, \mathcal{L}) \in \widetilde{\mathcal{B}}^{Par}, sign(U-l)(F-\mathcal{L}) \geq 0. \tag{2.16}$$

We distinguish two cases.

— If $u^D > u_c$ then $\phi(U) = \phi(u^D)$ implies $U = u^D$ and $(l, \mathcal{L}) \in \widetilde{\mathcal{B}}^{Par}$ implies $l = u^D$ hence (2.16) is evident.

— If $u^D \leq u_c$ then from the definition of $\widetilde{\mathcal{B}}^{Par}$, $\phi(U) = \phi(u^D)$ implies $U \in (-\infty, u_c]$ and $(l, \mathcal{L}) \in \widetilde{\mathcal{B}}^{Par}$ implies $l = u_c$. If $U = u_c$ then (2.16) is clear. Assume $U < u_c$, for all $k \in (U, u_c)$ we have $\mathcal{K}(k) - F = sign(U-k)(F-\mathcal{K}(k)) \geq 0$ where $(k, \mathcal{K}(k)) \in \widetilde{\mathcal{B}}^{Hyp}$. Because $\mathcal{K}(k) \uparrow \max\limits_{[u^D, u_c]} f$ as $k \uparrow u_c$, using again the definition of $\widetilde{\mathcal{B}}^{Par}$, we find $sign(U-l)(F-\mathcal{L}) = \mathcal{L} - F \geq \max\limits_{[u^D, u_c]} f - F \geq 0$ which implies (2.16).

Now by Lemma 2.2.2, $\widetilde{\mathcal{B}}$ is a maximal monotone graph. Therefore the monotony of $\widetilde{\mathcal{B}} \cup \{(U, F)\}$ implies (2.15), and the equivalence of (2.14) and (2.15) is justified.
Finally, we establish that (2.13) $\Leftrightarrow$ (2.14).
The condition $\phi(U) = \phi(u^D)$ is contained in both formulations. Further, assume that (2.14) holds ; we prove the first inequality of (2.13) (the proof of the second one is similar). We have the following case study :

— If $k \geq U$ then $sign^+(U-k)(F-\mathcal{K}) = 0$ and there is nothing to prove.

— If $k < U$ and $u^D > u_c$ then, $U = \phi^{-1}(\phi(u^D)) = u^D$ and the case $k \geq u^D$ is never realized.

— Finally, if $k < U$ and $u^D \leq u_c$, then $U \in \phi^{-1}(\phi(u^D)) = \phi^{-1}(0) =]-\infty, u_c]$, moreover, we have $sign(U-k)(F-\mathcal{K}) \geq 0$ with $\mathcal{K} = \max_{[u^D,u_c]} f \geq f(k)$. Hence , by (2.14)

$$sign^+(U-k)(F-f(k)) = F - f(k) \geq F - \mathcal{K} = sign(U-k)(F-\mathcal{K}) \geq 0.$$

Thus (2.14) implies (2.13).
Now, suppose that (2.13) holds : for arbitrary $c \geq u^D$, $F \geq f(c)$ if $U > c$. Then for every c such that $u^D \leq c < U$, $k \leq U$, we have $F \geq f(c)$. Let $(k, \mathcal{K}) \in \widetilde{\mathcal{B}}^{Hyp}$ and $U > k$. We have the following case study.
• If $k \leq u^D$ and $k < u_c$, we have $\mathcal{K} = \min_{[k,u^D]} f$, it suffices to take $c = u^D$ to have $F \geq f(u^D) \geq \mathcal{K}$.
• If $u^D \leq k \leq u_c$ then $\mathcal{K} = \max_{[u^D,k]} f$. In this case let $d = \arg\max_{[u^D,k]} f$, we have $f(d) = \mathcal{K}$. Then, it suffices to take $c = d$ to have $F \geq \mathcal{K}$.
• If $k = u_c$ then $U > u_c$, this means that $\widetilde{\mathcal{B}} = \{u^D\} \times \mathbb{R}$ and $U = u^D$, then $\widetilde{\mathcal{B}}^{Hyp} = \emptyset$ and there is nothing to prove.
Thus (2.13) implies (2.14). This ends the proof. □

2.3.3 Well-posedness result for (S_3)

Now, we prove well-posedness for (S_3) in the sense of the three definitions introduced above. The existence proof is actually contained in [28], we give a sketch of it here for the sake of completeness, under the simplifying non-degeneracy assumption on the nonlinearities.

Theorem 2.3.9. *Assume that (f, ϕ) is non degenerate in the sense of Definition* 1.3.1. *Assume $g \in L^\infty_c((-\infty, 0])$. There exists an entropy solution of (S_3) in the sense of Definition* 2.3.2.

Proof. (outlined) : The argument is analogous to the one of Proposition 1.4.8 (see in particular the estimates of Theorem 1.3.5) in Chapter 1. Note that the assumption of bounded compactly supported source term g guarantees a uniform H^1 estimate for $\phi_\epsilon(u^\epsilon) = \phi(u^\epsilon) + \epsilon u^\epsilon$ where u^ϵ is the weak solution of problem

$$(S_3^\epsilon) \begin{cases} u^\epsilon + (f(u^\epsilon) - \phi_\epsilon(u^\epsilon)_x)_x &= g \text{ in } (-\infty, 0), \\ u^\epsilon &= u^D \text{ on } \{x = 0\}. \end{cases}$$

The only point that has to be checked because of the difference in boundary condition considered in (S_1^ϵ) and in (S_3^ϵ) is that u^ϵ verifies entropy inequalities analogous to (2.7)-(2.8). These inequalities are proved using the comparison principle (cf. Proof of Theorem 1.3.5, Fourth Step) and the fact that the constant k is a super-solution (respectively, a sub-solution) of problem (S_3^ϵ) in the case where $k \geq u^D$ (respectively, in the case where $k \leq u^D$). The passage to the limit as $\epsilon \to 0$ in the inequalities (2.7), (2.8) u^ϵ is straightforward. Moreover, the analogue of identity (2.9) satisfied by u^ϵ is preserved at the limit, see Proposition 1.4.8. □

Now, we turn to the proof of uniqueness ; due to the boundary regularity results of Lemma 2.3.7 and the formulation of the boundary condition in terms of the monotone graph $\widetilde{\mathcal{B}}$, our uniqueness proof is

much simpler than the one given in [28]. Indeed, while Carrillo uses the formulation (Definition 2.3.2) where the boundary condition is encoded in an implicit and very weak way, here we can use the explicit strong form (Definition 2.3.6) of the boundary condition.

Theorem 2.3.10. *Let u an entropy solution of (S_3) with source term $g \in L_c^\infty((-\infty,0))$ and $\hat{u}$ an entropy solution of (S_3) with source term $\hat{g} \in L_c^\infty((-\infty,0))$. Then ;*

$$\int_{-\infty}^{0} |u-\hat{u}|dx \leq \Big[u-\hat{u},(g-\hat{g})\Big]_{L^1((-\infty,0))}. \tag{2.17}$$

In particular, the entropy solution of (S_3) in the sense of Definition 2.3.6 *is unique .*

The proof follows by passage to the limit, as $\xi \to \mathbf{1}_{(-\infty,0)}$ in the local Kato inequality (2.18) below. We give the so-called Kato inequality away from the boundary

Proposition 2.3.11. *Let u an entropy solution of (S_3) with source term g and $\hat{u}$ an entropy solution of (S_3) with source term $\hat{g}$. Then for all $\xi \in C_0^\infty((-\infty,0)))$, $\xi \geq 0$*

$$\int_{-\infty}^{0} |u-\hat{u}|\xi dx - \int_{-\infty}^{0} sign(u-\hat{u})\Big(\mathcal{F}[u]-\mathcal{F}[\hat{u}]\Big).\xi_x dx \leq \Big[u-\hat{u},(g-\hat{g})\xi\Big]_{L^1((-\infty,0))}. \tag{2.18}$$

For the proof, we utilize Carrillo entropy dissipative information and use doubling of variables technique in the interior of the domain (see Chapter 1.)

Proof of theorem 2.3.10. Suppose that u and $\hat{u}$ are two solutions of (S_3) in the sense of Definition 2.3.6. Taking $\xi_h = \min\{1, -\frac{x}{h}\}$ in the local Kato inequality (2.18), using existence of strong traces of $u, \hat{u}$ and $\mathcal{F}[u], \mathcal{F}[\hat{u}]$ as $h \to 0$ we find

$$\int_{-\infty}^{0} |u-\hat{u}|dx \leq -sign(k-\hat{k})\Big(\mathcal{K}-\widehat{\mathcal{K}}\Big) + |\mathcal{K}-\widehat{\mathcal{K}}|\mathbf{1}_{k=\hat{k}}, \tag{2.19}$$

where $k = u(0), \hat{k} = \hat{u}(0)$ and $\mathcal{K} = \mathcal{F}[u](0), \widehat{\mathcal{K}} = \mathcal{F}[\hat{u}](0)$. Recall that both $(k,\mathcal{K})$ and $(\hat{k},\widehat{\mathcal{K}})$ belong to the same maximal monotone graph $\widetilde{\mathcal{B}}$. Therefore, if $k \neq \hat{k}$, by (2.15), the second member of (2.19) is non-positive then we have $u = \hat{u}$ a.e. on $(-\infty,0)$. It remains to study the case $k = \hat{k}$. In this case, the right-hand side of (2.19) can be positive, and we need to obtain a finer estimate than (2.19). We go back to the definition of $\mathcal{F}[u], \mathcal{F}[\hat{u}]$ and separate the convection and diffusion fluxes

$$sign(u-\hat{u})\Big(\mathcal{F}[u]-\mathcal{F}[\hat{u}]\Big) = q(u,\hat{u}) - |\phi(u)-\phi(\hat{u})|_x \tag{2.20}$$

where $q(u,\hat{u}) = sign(u-\hat{u})(f(u)-f(\hat{u}))$. The diffusion term is obtained as follows :

$$sign(u-\hat{u})(\phi(u)_x - \phi(\hat{u}_x)) = sign(\phi(u)-\phi(\hat{u}))(\phi(u)_x - \phi(\hat{u}_x)), \tag{2.21}$$

because $(\phi(u)-\phi(\hat{u}))_x = 0$ a.e. on $[\phi(u) = \phi(\hat{u})]$, then using the chain rule for Sobolev functions,

$$sign(u-\hat{u})(\phi(u)_x - \phi(\hat{u}_x)) = |\phi(u)-\phi(\hat{u})|_x.$$

In (2.18), replacing the second term by (2.20) we have

$$-\int_{-h}^{0} sign(u-\hat{u})\Big(\mathcal{F}[u]-\mathcal{F}[\hat{u}]\Big).(\xi_h)_x dx = \frac{1}{h}\Big(\int_{-h}^{0} q(u,\hat{u}) - \int_{-h}^{0} |\phi(u)-\phi(\hat{u})|_x\Big)$$
$$= \frac{1}{h}\Big(\int_{-h}^{0} q(u,\hat{u}) - |\phi(u)-\phi(\hat{u})|(0) + |\phi(u)-\phi(\hat{u})|(-h)\Big).$$

Since $u(0) = k = \hat{k} = \hat{u}(0)$, letting h to zero, we have that $q(u,\hat{u})$ tend to $q(u(0),\hat{u}(0)) = 0$; in addition, $|\phi(u)-\phi(\hat{u})|(0) = 0$. Then

$$-\int_{-h}^{0} sign(u-\hat{u})\Big(\mathcal{F}[u]-\mathcal{F}[\hat{u}]\Big).(\xi_h)_x dx = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{0} |\phi(u)-\phi(\hat{u})|(-h) \geq 0.$$

Whence from (2.18) with $\xi_h = \min\{1, -\frac{x}{h}\}$ and $h \to 0$ we get $u = \hat{u}$ a.e. on $(-\infty, 0)$ also in the case $k = \hat{k}$. This ends the proof. □

Combining the preceding results, we readily obtain the main result of this section.

Corollary 2.3.12. *Assume that the couple* (f,ϕ) *is non degenerate in the sense of Definition* 1.3.1 *and* $g \in L_c^\infty((-\infty,0])$. *There exists a unique entropy solution of* (S_3) *in the sense of Definitions* 2.3.2*,* 2.3.4*,* 2.3.6.

Now, we will make several steps towards the study of the evolution problem (P_3) in the setting inspired by Definitions 2.3.4, 2.3.6 based upon the use of the effective boundary condition graph $\widetilde{\mathcal{B}}$.

2.4 Integral solutions and well-posedness of the abstract evolution problem associated with (P_3)

As in the previous chapter, our approach to the evolution problem (P_3) relies on the notion of integral solution as defined in [16]. First, we observe that the above study of the stationary problem (S_3) opens the way to investigate the associated abstract evolution problem in the setting of mild and integral solutions. We establish a link with the Carrillo notion of solution to (P_3), but postpone the systematic study of entropy formulations for (P_3) to Section 2.5. a link.

2.4.1 Operator associated to (S_3)

Here, we establish abstract properties of the differential operator $u \mapsto (f(u)-\phi(u)_x)_x$ involved in (S_3) ; entropy conditions and boundary conditions are taken into account in the definition of the operator. These abstract properties are needed to apply the classical results of the theory of nonlinear semigroups governed by accretive operators (see e.g.[17]). Let us define the (possibly multivalued) operator A_β by it resolvent

$$(u,z) \in A_\beta = \left\{ \begin{array}{l} u \text{ such that } u \text{ is an entropy solution of } (S_3), \text{in the sense} \\ \text{of Definition 2.3.6 with } g = u+z \end{array} \right\}.$$

Proposition 2.4.1. *The following properties hold true.*

1. *A_β is accretive in $L^1((-\infty,0))$.*
2. *For all λ sufficiently small, $R(I+\lambda A_\beta)$ contains $L^\infty_c((-\infty,0))$.*
3. *$\overline{D(A_\beta)} = L^1((-\infty,0])$.*

In particular, the closure $\overline{A_\beta}$ is an m-accretive densely defined operator in $L^1((-\infty,0])$.

The proof is fully similar to the one of Proposition 1.4.10 in Chapter 1.

Proof. 1. Let $(u,z)\in A_\beta$, $(\hat u,\hat z)\in A_\beta$. Applying inequality (2.18) with $\xi = 1$ as test function and using the standard properties of the bracket (see section 0.5), we get

$$\begin{aligned}\|u-\hat u\|_{L^1((-\infty,0))} &\le [u-\hat u, g-\hat g]_{L^1((-\infty,0))}\\ &\le [u-\hat u, u-\hat u+z-\hat z]_{L^1((-\infty,0))}\\ &\le \|u-\hat u\|_{L^1(-\infty,0)} + [u-\hat u, z-\hat z]_{L^1((-\infty,0))}.\end{aligned}$$

We deduce that $[u-\hat u, z-\hat z]_{L^1((-\infty,0))}\ge 0$, so that A_β is accretive.
2. For $\lambda>0$, consider the problem

$$(S^3_\lambda)\begin{cases} u_\lambda+\lambda(f(u_\lambda)-(\phi(u_\lambda))_x)_x &= g \ \text{ in } \ (-\infty,0),\\ u_\lambda &= u^D \ \text{ on } \ x=0.\end{cases}$$

Notice that the notion of solution for (S^3_λ) is analogous to the one given in Definition 2.3.6. Let $\lambda>0$ and $g\in L^\infty_c((-\infty,0))$, then $g\in L^\infty((-\infty,0))\cap L^2((-\infty,0))$. Therefore, there exists u_λ entropy solution of (S^3_λ) (see Theorem 2.3.9) such that $(u_\lambda, \frac{g-u_\lambda}{\lambda})\in A_\beta$. Hence $g\in R(I+\lambda A_\beta)$ and therefore $R(I+\lambda A_\beta)\supset L^\infty_c((-\infty,0])$, which was to be shown.
3. Let $PC_c((-\infty,0])$ be the set of piecewise constant compactly supported functions from $(-\infty,0]$. Then $PC_c((-\infty,0])$ is dense in $L^1((-\infty,0])$. Take $g\in PC_c((-\infty,0])$, $g=\sum_i c_i\mathbf{1}_{(a_i,b_i)}$ where the (a_i,b_i) are disjoint intervals. There exists $u_n\in L^\infty((-\infty,0))$ entropy solution of $(S^3_{\frac{1}{n}})$, i.e, we have $(u_n, n(g-u_n))\in A_\beta$. For $k\in\mathbb{R}$, for all $\xi\in C^\infty_0((-\infty,0))$ we get

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\int_{-\infty}^0 sign(u_n-k)\Big(f(u_n)-f(k)-\partial_x\phi(u_n)\Big).\partial_x\xi dx\\ &+\int_{-\infty}^0 sign(u_n-k)(g-u_n)\xi dx\ge 0.\end{aligned}\tag{2.22}$$

For every i, one can construct ξ_i^n such that $\xi_i^n\to\mathbf{1}_{(a_i,b_i)}$, as $n\to\infty$, $\text{supp}\xi_i^n\subset(a_i,b_i)$, $\|\partial_x\xi_i^n\|_{L^\infty}\le 2\sqrt[3]{n}$ and $\xi_i^n\equiv 1$ in $(a_i+\delta_n^i, b_i-\delta_n^i)$ with $\delta_n^i=\frac{b_i-a_i}{2\sqrt[3]{n}}$.
Take $k=c_i$ and $\xi=\xi_i^n$ in (2.22). We find

$$\begin{aligned}\int_{a_i+\delta_n^i}^{b_i-\delta_n^i}|u_n-c_i|dx &\le \frac{1}{n}\int_{a_i+\delta_n^i}^{b_i-\delta_n^i} sign(u_n-c_i)(f(u_n)-f(c_i)-\partial_x\phi(u_n)))\partial_x\xi_i^n dx\\ &\le \frac{2}{n}|b-a|\,\|f\|_{L^\infty}\|\partial_x\xi_i^n\|_{L^1}+\|\frac{1}{\sqrt{n}}\partial_x\phi(u_n)\|_{L^2}.\|\partial_x\xi_i^n\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Then, for all $\delta>\delta_n^i$, $u_n\to g$ a.e on $\cup_i(a_i+\delta,b_i-\delta)$. We conclude by the Lebesgue theorem that $u_n\to g$ in $L^1((-\infty,0])$.
In conclusion, $D(A_\beta)$ is dense in $PC_c((-\infty,0])$ and therefore, it is also dense in $L^1((-\infty,0))$. □

2.4.2 Abstract evolution problem associated with A_β

Here we consider the abstract evolution problem

$$v' + A_\beta v \ni h, \quad v(0) = u_0 \tag{Evol}$$

governed by A_β and recall existence and uniqueness of mild and integral solution due to the property that the closure of the associated operator is m-accretive densely defined, proved in the previous section.

Theorem 2.4.2. *There exists a mild solution for the problem* (Evol). *Moreover, the mild solution is the unique integral solution in the following sense :*
$v(0,.) = u_0(.)$ *and for all* $(u,z) \in A_\beta$

$$\frac{d}{dt}\|v(t)-u\|_{L^1(\Omega)} \leq [v(t)-u, h(t)-z]_{L^1(\Omega)} \text{ in } \mathcal{D}'(0,T). \tag{2.23}$$

If u an $\hat{u}$ *are integral solutions with data* u_0 *and* $\hat{u}_0$*, respectively, then the* L^1 *contraction property holds :*

$$\frac{d}{dt}\|\hat{u}-u\|_{L^1((-\infty,0))} \leq \|\hat{u}_0-u_0\|_{L^1((-\infty,0))} \text{ in } \mathcal{D}'(0,T). \tag{2.24}$$

The definition of mild solution is recalled in the introduction of this thesis. The result of Theorem 2.4.2 is a straightforward application of [17] to the closure of A_β. Notice that in the case $h = 0$ in which we are interested in this section, the solution can be obtained by the Crandall-Liggett formula, i.e., it is the limit of the time-implicit Euler semi-discretization scheme with uniform time step.

Remark 2.4.3. *A function* $v \in C([0,T], L^1((-\infty,0)))$ *is integral solution of* $v' + A_\beta v \ni 0$, $v(0) = v_0$ *if and only if :*
$\forall (u,z) \in A_\beta$, $\forall \theta \in \mathcal{D}([0,T))$

$$-\int_0^T \int_{-\infty}^0 |v-u|\theta' dxdt - \int_{-\infty}^0 |u_0-u|\theta(0)dx \leq \int_0^T \int_{-\infty}^0 \Big(sign(u-v)(-z) + \mathbf{1}_{[v=u]}|z|\Big)\theta dxdt. \tag{2.25}$$

Recall that $(u,z) \in A_\beta$ *if and only if* $u \in L^\infty((-\infty,0))$, $\phi(u) \in H^1((-\infty,0))$ *satisfy the local entropy inequality i.e. for all* $k \in \mathbb{R}$, $\zeta \in C_0^\infty((-\infty,0))$, $\zeta \geq 0$ *:*

$$\int_{-\infty}^0 \Big\{ sign(u-k)(z)\zeta + sign(u-k)\Big(f(u)-f(k)-\phi(u)_x\Big).\zeta_x \Big\} dx \geq 0. \tag{2.26}$$

and the Dirichlet boundary condition for u holds in the relaxed sense $(u(0), \mathcal{F}[u](0)) \in \widetilde{\mathcal{B}}$.
Thus, the notion of integral solution is stated under the form similar to (although more complicated than) different notions of entropy solution. Notice in particular that a test function ξ *in variables* (t,x) *of the entropy formulation is replaced by the couple of test functions* (θ,ζ) *in variables t and x separately ; and that the boundary condition is imposed directly for* $u \in Dom(A_\beta)$ *and it is imposed indirectly for u thanks to the* L^1*-contraction inequalities* (2.25). *In the sequel, we will take several steps towards characterization of the unique integral solution of* (Evol) *as entropy solution of* (P_3) *in the appropriate sense.*

We postpone in Section 2.5 interpretation of integral solution of (Evol) as an appropriately defined entropy solution of (P_3) in the spirit of Definition 2.3.4 and Definition 2.3.6. In this section, we will only prove that the mild solution satisfies inequalities (2.28) and (2.29) below. Then, we have existence of entropy solution of (P_3) in the sense of Definition of Carrillo [28] analogous to Definition 2.4.5 below. Notice that it is not possible to establish with similar argument entropy formulations analogous to Definition 2.3.4 and Definition 2.3.6. Indeed, it is not at all straightforward to pass to the limit in a relation that directly involve the boundary values trace of the solution and the flux, such as relation (2.12) or relation $(u(0), \mathcal{F}[u](0)) \in \widetilde{\mathcal{B}}$.
Now we give an interpretation of Carrillo entropy solution ([28]) for non-zero Dirichlet boundary condition for (P_3). This Definition leads to existence result, as in [28] ; for the sake of completeness, we give here the existence proof analogous to the original proof of [28]. But before we recall the local entropy notion

Definition 2.4.4. *A bounded measurable function u is called a local entropy solution of* (P_3) *inside of* $[0,T)\times\Omega$ *if* $\phi(u)\in L^2(0,T;H^1(-\infty,0))$ *and the following inequality is satisfied :*
for all $k\in\mathbb{R}$, $\xi\in C_0^\infty([0,T)\times(-\infty,0))$, $\xi\geq 0$ *:*

$$\int_0^T\int_{-\infty}^0\Big\{|u-k|\xi_t+sign(u-k)\Big(f(u)-f(k)-\phi(u)_x\Big).\xi_x\Big\}\,dxdt + \int_{-\infty}^0(u_0-k)\xi(0,x)dx\geq 0. \tag{2.27}$$

Definition 2.4.5. *A bounded measurable function u is called an entropy solution of* (P_3) *if,*

1. *The function u is a local entropy solution.*
2. *The following inequalities are satisfied :*
   - $\forall k\in[u^D,+\infty)$, $\forall\xi\in C^\infty([0,T)\times(-\infty,0])$, $\xi\geq 0$

$$\int_0^T\int_{-\infty}^0\Big\{(u-k)^+\xi_t+sign^+(u-k)\Big(f(u)-f(k)-\phi(u)_x\Big).\xi_x\Big\}\,dxdt + \int_{-\infty}^0(u_0-k)^+\xi(0,x)dx\geq 0. \tag{2.28}$$

   - $\forall k\in(-\infty,u^D]$, $\forall\xi\in C^\infty([0,T)\times(-\infty,0])$, $\xi\geq 0$

$$\int_0^T\int_{-\infty}^0\Big\{(u-k)^-\xi_t+sign^-(u-k)\Big(f(u)-f(k)-\phi(u)_x\Big).\xi_x\Big\}\,dxdt + \int_{-\infty}^0(u_0-k)^-\xi(0,x)dx\geq 0. \tag{2.29}$$

3. *Moreover, there holds, in the sense of traces of Sobolev functions, the equality ,*

$$\phi(u)(t,0)=\phi(u^D). \tag{2.30}$$

Notice that (2.28) and (2.29) will be reformulated later as weak trace constraints (2.40) and (2.41) on $sign(u-k)(\mathcal{F}[u]-f(k))$.

Theorem 2.4.6. *Let $u_0 \in L^1((-\infty,0)) \cap L^\infty((-\infty,0))$ and u be the unique mild solution of* (Evol) *with $h = 0$. Then u is an entropy solution of (P_3) in the sense of Definition* 2.4.5.

Proof. Suppose that u is a mild solution. Recall that it is a limit of the specific ϵ-discretization with uniform time-step and zero source. For any $N \in \mathbb{N}$, we define $\delta t = \frac{T}{N}$. For $i = 0, 1, ..., N$ we define $t_i = i\delta t$. For $i = 1, ..., N$ let u_i be the unique solution of

$$u_{i-1} \in (I + \delta t A_\beta)u_i,$$

this means that, there exists a measurable function u_i entropy solution of (S_3) with source term u_{i-1} and the flux $\delta t\mathcal{F}[.]$ for $1 \leq i \leq N$ where $u_0 = u(0, x)$. Moreover similarly to the proof of Theorem 2.3.10 it follows from the entropy formulation of (S_3) that u_i satisfies

$$\|u_i\|_{L^\infty(\Omega} \leq \|u_{i-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \quad 1 \leq i \leq N \tag{2.31}$$

and therefore

$$\|u_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{2.32}$$

We define the δt-approximate solution $u^{\delta t}$ by

$$u^{\delta t} = u_i \text{ for } t_{i-1} < t < t_i \text{ and } 1 \leq i \leq N.$$

Since u is mild solution, we know from Crandall-Liggett theorem that

$$\|u(t) - u^{\delta t}\|_{L^\infty((0,T);L^1(\Omega))} \longrightarrow 0 \text{ as } \delta t \to 0.$$

In fact, $u^{\delta t}$ is uniformly bounded in $L^\infty(Q)$ due to (2.32). From the Lebesgue theorem, we deduce that

$$\|u(t) - u^{\delta t}\|_{L^p(Q)} \longrightarrow 0 \text{ for } 1 \leq p < \infty \text{ as } \delta t \to 0. \tag{2.33}$$

Since $u^{\delta t}$ converges to u in $L^\infty((0,T); L^1(\Omega))$, we deduce the existence of a subsequence of δt still denoted by δt such that

$$u^{\delta t} \longrightarrow u \text{ a.e. in } Q \text{ as } \delta t \longrightarrow 0. \tag{2.34}$$

Now since u_i is an entropy solution of (S_3) (therefore it is a weak one) in the sense of Definition 2.3.2 with the source term u_{i-1} and flux $\delta t\mathcal{F}[.]$, $1 \leq i \leq N$, we have

$$\int_{-\infty}^{0} \xi(u_i - u_{i-1}) - \delta t(f(u_i) - \phi(u_i)_x).\xi_x dx = 0 \tag{2.35}$$

for $\xi \in H_0^1(\Omega)$. In particular, for $\xi = \phi(u_i) - \phi(u^D)$, we have

$$\int_{-\infty}^{0} (u_i - u_{i-1})(\phi(u_i) - \phi(u^D)) + \delta t(f(u_i) - \phi(u_i)_x)(\phi(u_i) - \phi(u^D))_x dx \leq 0.$$

Because the auxiliary function $\psi(r) = \int_0^r \phi(s)ds$ is convex, we deduce that

$$\int_{-\infty}^{0} (\psi(u_i) - \psi(u_{i-1}) + \delta t|\phi(u_i)_x|^2 dx \leq C\delta t;$$

here, due to the chain rule have also use the fact that

$$\left|\delta t \int_{-\infty}^{0} f(u_i)\phi(u_i)_x\right| = \delta t \left|\int_0^{u_i} f(r)\, d\phi(r)\right| \leq \delta t\, const(f, \phi, \|u_0\|_\infty) \leq C\frac{T}{N}$$

Since $\psi(u_i) \in L^\infty(\Omega)$, then we have

$$\int_{-\infty}^{0} (\psi(\|u_i\|_{L^\infty}) - \psi(u_0))dx + \delta t \sum_{i=1}^{N} |\phi(u_i)_x|^2 dx \leq CT$$

Hence

$$\|\phi(u^{\delta t}) - \phi(u^D)\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))} \leq C(u_0, T).$$

Therefore there exist a subsequence of δt still denoted by δt such that

$$\phi(u^{\delta t}) - \phi(u^D) \rightharpoonup_{\delta t \to 0} \chi \text{ weakly in } L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \tag{2.36}$$

since $u^{\delta t}$ converges in $L^2(Q)$ and $\phi(u^{\delta t})$ converges weakly in $L^2(Q)$. Using (2.33) with $p = 2$ and the Lipschitz continuity of ϕ, we deduce that $\chi = \phi(u) - \phi(u^D)$. Let now $\xi \in C^\infty([0, T] \times (-\infty, 0])$ be such that $\xi = 0$ on $((0, T) \times \{0\} \cup (\{T\} \times \Omega))$. Then

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^T \int_{-\infty}^{0} \left\{ \frac{u^{\delta t}(t) - u^{\delta t}(t - \delta t)}{\delta t}\xi(t) + \Big(\phi(u^{\delta t}(t))_x - f(u^{\delta t}(t))\Big).\xi_x(t) \right\} dxdt \\
&= \int_0^T \int_{-\infty}^{0} \left\{ -u^{\delta t}(t)\frac{\xi(t) - \xi(t - \delta t)}{\delta t} + \Big(\phi(u^{\delta t}(t))_x - f(u^{\delta t}(t))\Big).\xi_x(t) \right\} dxdt \\
&- \frac{1}{\delta t}\int_0^{\delta t} \int_{-\infty}^{0} u_0\xi(t)dxdt
\end{aligned}$$

where $u^{\delta t}(t) = u_0$ for $t \leq 0$. By letting $\delta t \to 0$ we get

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{0} \Big\{ -u\xi_t + \Big(\phi(u(t))_x - f(u)\Big).\xi_x(t) \Big\} dxdt - \int_\Omega u_0\xi(0)dx = 0,$$

which is the weak formulation of (P_3).
We follow the same kind of reasoning to prove that u is entropy solution in the sense of Definition 2.4.5. Now, since u_i is an entropy solution of (S_3) with source term u_{i-1} and flux $\delta t(f(u_i) - \phi(u_i))$, we have

$$\int_\Omega sign^+(u_i - k)\Big((u_i - u_{i-1})\xi + \delta t(\phi(u_i)_x + f(k) - f(u_i)).\xi_x\Big)dx \leq 0$$

for any $k \geq u^D$ and $\xi \in C^\infty([0, T) \times (-\infty, 0))$. Therefore

$$\begin{aligned}
0 \geq &\int_0^T \int_{-\infty}^{0} sign^+(u^{\delta t}(t) - k)\frac{u^{\delta t}(t) - u^{\delta t}(t - \delta t)}{\delta t}\xi(t)dxdt \\
&+ \int_0^T \int_{-\infty}^{0} sign^+(u^{\delta t}(t) - k)(\phi(u^{\delta t}(t))_x - f(u^{\delta t}(t)) - f(k)).\xi_x(t)
\end{aligned}$$

Now, let us observe that

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{-\infty}^0 sign^+(u^{\delta t}(t)-k)\frac{u^{\delta t}(t)-u^{\delta t}(t-\delta t)}{\delta t}\xi(t)dxdt = \\
&\int_0^T \int_{-\infty}^0 sign^+(u^{\delta t}(t)-k)\Big(\frac{u^{\delta t}(t)-k}{\delta t}-\frac{u^{\delta t}(t-\delta t)-k}{\delta t}\Big)\xi(t)dxdt \\
&\geq \int_0^T \int_{-\infty}^0 sign^+(u^{\delta t}(t)-k)\frac{u^{\delta t}(t)-k}{\delta t}\xi dxdt \\
&-\int_0^T \int_{-\infty}^0 sign^+(u^{\delta t}(t-\delta t)-k)\frac{u^{\delta t}(t-\delta t)-k}{\delta t}\Big)\xi(t)dxdt \\
&=-\int_0^T \int_{-\infty}^0 sign^+(u^{\delta t}(t)-k)(u^{\delta t}(t)-k)\frac{\xi(t)-\xi(t-\delta t)}{\delta t}dxdt \\
&-\frac{1}{\delta t}\int_0^{\delta t}\int_{-\infty}^0 sign^+(u_0-k)(u_0-k)\xi(t)dxdt.
\end{aligned}$$

Then we deduce that

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_{-\infty}^0 sign^+(u^{\delta t}(t)-k)\{(u^{\delta t}(t)-k)\frac{\xi(t)-\xi(t+\delta t)}{\delta t}\}dxdt \\
&+\int_0^T \int_{-\infty}^0 sign^+(u^{\delta t}(t)-k)\Big(\phi(u(t))_x+f(k)-f(u^{\delta t}(t))\Big)dxdt \\
&-\frac{1}{\delta t}\int_0^{\delta t}\int_{-\infty}^0 sign^+(u_0-k)(u_0-k)\xi(t)dxdt \leq 0.
\end{aligned}$$

By letting $\delta t \longrightarrow 0$ we get :
• $\forall k \in [u^D, +\infty)$, $\forall \xi \in C^\infty([0,T)\times(-\infty,0])$, $\xi \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{-\infty}^0 \Big\{(u-k)^+\xi_t + sign^+(u-k)\Big(f(u)-f(k)-\phi(u)_x\Big).\xi_x\Big\}\,dxdt \\
&+\int_{-\infty}^0 (u_0-k)^+\xi(0,x)dx \geq 0. \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

which is (2.28). Further with the same arguments, we have this inequality for all $k \in \mathbb{R}$ with $\xi \in C^\infty([0,T)\times(-\infty,0))$.
Proceeding similarly, we also prove (2.28).
It remains to notice that (2.34) along with (2.9) imply that (2.30) holds. Thus u is an entropy solution of (P_3) in the sense of Definition 2.4.5. □

2.5 Weakly trace-regular entropy solutions of evolution problem (P_3)

In the last section, we proved existence of entropy solution of (P_3) in the sense of Definition 2.4.5. Let us stress that both existence and uniqueness of such solutions were justified in [28] but the uniqueness argument in [28] was particularly involved. The aim of this section is to give a simpler proof of the

uniqueness result with initial datum $u_0 \in L^\infty((-\infty,0)) \cap L^1((-\infty,0))$; moreover, we justify an explicit reformulation of the boundary condition in terms of the graph $\widetilde{\mathcal{B}}$. To do so, it is natural to give entropy formulations of evolution problem (P_3) similar to Definitions 2.3.4, 2.3.6 for stationary problem (S_3). But we can give a pointwise sense to the boundary values of the flux $\mathcal{F}[u]$ and prove equivalence of the different ways to define solutions only under appropriate regularity assumptions. Let us define a notion of weak trace that we will use to overcome the difficulty which appears in the proof of uniqueness. To start with, we propose a notion of weakly trace-regular solution.

Definition 2.5.1. *We say that a local weak solution to (P_3) is weakly trace-regular if the family $(\mathcal{F}[u](.,x))_{x<0}$ of $L^1((0,T))$ functions is equi-integrable in some neighborhood $(-\epsilon,0)$ of the boundary.*

Recall that, given $(f_n)_{n>0}$ a sequence in $L^1((0,T))$, it admits a weakly convergent subsequence if and only if it is equi-integrable (see Theorem 0.4.5).

Remark 2.5.2. *Notice that if $(\mathcal{F}[u](.,x))_{x<0}$ is equi-integrable, this implies that $\left(\frac{1}{h}\int_{-h}^{0}\mathcal{F}[u](.,x)dx\right)_{h>0}$ is also equi-integrable.*

Now, we are ready to give the rather non-standard notion of weak normal boundary trace of the flux that we have found appropriate in order to give a sense to the relation $(u(t,0^-),\mathcal{F}[u](t,0^-)) \in \widetilde{\mathcal{B}}$.

Definition 2.5.3. *We say that $t \mapsto F(t)$ is a weak trace of $\mathcal{F}[u]$ at $x = 0^-$ if there exists a sequence $(h_n)_n$, with $h_n \to 0$ such that*

$$\frac{1}{h_n}\int_{-h_n}^{0}\mathcal{F}[u](.,x)dx \rightharpoonup_{n\to\infty} F(.) \text{ weakly in } L^1((0,T)). \tag{2.38}$$

In the sequel, we denote by $\gamma_w\mathcal{F}[u]$ a generic weak trace of $\mathcal{F}[u]$.

Remark 2.5.4. *According to the above definition, a weak L^1 trace of a weakly trace-regular solution is not unique. This notion is equivalent to the notion of weak trace for divergence-measure fields developed in particular by Chen and Frid (see [32]). In the Chen-Frid definition, the trace is assumed in a much weaker duality sense, it is unique and its existence is guaranteed by the fact that $\mathcal{F}[u] \in L^2$ and the equation $u_t + \mathcal{F}[u]_x = 0$ is satisfied in the sense of distributions.*

Now we give a Definition similar to Definition 2.3.4 of stationary problem.

Definition 2.5.5. *A bounded measurable function u is called weakly trace-regular entropy solution of (P_3) if the following conditions are satisfied :*

1. *The function u is a local entropy solution and it is weakly trace-regular.*
2. *The relation* (2.30) *holds. Moreover if $u^D \le u_c$ then there exists a sequence $(h_n)_n$ with $h_n \to 0$ such that*

$$\forall (k,\mathcal{K}) \in \widetilde{\mathcal{B}}^{Hyp},\ \lim_{h_n\to 0}\frac{1}{h_n}\int_{-h_n}^{0}\int_{0}^{T} sign(u-k)\Big(\mathcal{F}[u]-\mathcal{K}\Big)\zeta(t)dxdt \ge 0\ , \tag{2.39}$$

for all $\zeta \in C^\infty((0,T))$ with $\zeta \ge 0$.

Notice that weak trace-regularity is not necessary to give sense to (2.39), but because we are not able to prove that entropy solutions in the sense of Carrillo inequalities and those in the sense of (2.39) coincide, we will also limit our considerations to the weakly trace-regular case. We can reformulate the Carrillo entropy formulation (Definition 2.4.5) in a form reminiscent of (2.39) ; for the above reason, in the applications of the below proposition we will limit our considerations to weakly trace-regular solutions.

Proposition 2.5.6. *Suppose that* (2.30) *holds. Then the local entropy solution u is entropy solution in the sense of Definition* 2.4.5 *if and only if*

$$\forall k \geq u^D \quad \varliminf_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^T \int_{-h}^0 sign^+(u-k)(\mathcal{F}[u]-f(k))\zeta(t)dxdt \geq 0 \,, \tag{2.40}$$

$$\forall k \leq u^D \quad \varliminf_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^T \int_{-h}^0 sign^-(u-k)(\mathcal{F}[u]-f(k))\zeta(t)dxdt \geq 0 \,, \tag{2.41}$$

for all $\zeta \in C^\infty((0,T))$ *with* $\zeta \geq 0$.

Proof. For the proof, consider $\xi_h = \min\{1, -\frac{x}{h}\}$. Taking $\zeta(t)\xi_h(x)$ as a test function in (2.28), (2.29) one gets (2.40), (2.41). Reciprocally, combining (2.40), (2.41) involving $\zeta(t) = \xi(t,0)$ with local entropy inequalities of Definition 2.4.4 written for the test function $\xi(t,x)\xi_h(x)$, one finds (2.28), (2.29). □

Finally, using the notion of weak L^1 trace of the flux, in the setting of weakly trace-regular solutions we can set up a definition of entropy solution similar to Definition 2.3.6 used for the problem (S_3). This definition opens way to a rather simple proof of uniqueness of a weakly trace-regular entropy solution.

Definition 2.5.7. *A bounded measurable function u is called weakly trace-regular entropy solution of* (P_3) *if the following conditions are satisfied :*

1. *The function u is a local entropy solution and* (2.30) *holds.*
2. *There exists an a.e. defined function* $U : t \mapsto \lim_{x\to 0^-} u(t,x)$ *the strong trace of u on the boundary.*
3. *There exists a weak* L^1 *normal trace* $F : t \mapsto (\gamma_w \mathcal{F}[u])(t)$ *of the total flux* $\mathcal{F}[u]$ *such that for a.e.* $t \in (0,T)$ *the couple* $(U(t), F(t))$ *belongs to* $\widetilde{\mathcal{B}}$.

Remark 2.5.8. *Existence of traces in 2. and 3. follows from our assumptions. More precisely,*

(i) Assume that the couple (f,ϕ) *is non degenerate in the sense of Definition* 1.3.1. *Let u be a local entropy solution of* (P_3). *Then existence of a (unique) strong* L^1 *trace U of u on the boundary is guaranteed.*

(ii) For a weakly trace-regular solution u of (P_3), *existence of a (possibly non unique) weak* L^1 *normal trace F of* $\mathcal{F}[u]$ *is guaranteed.*

Indeed, the existence of the strong trace is proved in the Appendix of this thesis and the existence of weak trace is an immediate consequence of the definition.

2.5.1 Equivalence of the three definitions of entropy solution of (P_3)

As expected from the above definitions, we are able to prove equivalence of the three notions of entropy solution for (P_3), when weakly trace-regular solutions are considered. We start by the following technical remarks that rely on the assumption of equi-integrability of fluxes near the boundary.

Lemma 2.5.9. *Let u be a weakly trace-regular solution to (P_3) and assume that for some sequence $(h_n)_n$ converging to zero, and for some $(k, \mathcal{K}) \in \mathbb{R}^2$ there holds*

$$I(\zeta) = \lim_{h_n \to 0} \frac{1}{h_n} \int_{-h_n}^{0} sign(u-k)\Big(\mathcal{F}[u] - \mathcal{K}\Big)\zeta(t)dxdt \geq 0 \tag{2.42}$$

$\forall \zeta \in C^\infty((0,T))$ with $\zeta \geq 0$.
Then inequality (2.42) still holds for all $\zeta \in L^\infty((0,T))$, $\zeta \geq 0$.

Proof. Take $\zeta \in L^\infty((0,T))$ with $\zeta \geq 0$. For a first step of approximation, take $(\zeta_n)_n$ a sequence of $C((0,T))$ functions (merely continuous) such that $O_n = \{t \mid \zeta_n(t) \neq \zeta(t)\}$ verifies $meas(O_n) \leq \frac{1}{n}$, moreover $\|\zeta_n\|_{L^\infty} \leq \|\zeta\|_{L^\infty}$. Such sequence is given by the Lusin theorem. Then we observe that

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{h}\int_0^T \int_{-h}^0 sign(u-k)(\mathcal{F}[u]-\mathcal{K})\zeta(t)dxdt - \frac{1}{h}\int_0^T\int_{-h}^0 sign(u-k)(\mathcal{F}[u]-\mathcal{K})\zeta_n(t)dxdt\right| \\
&\leq 2\|\zeta\|_{L^\infty}\frac{1}{h}\int_{-h}^0\int_{O_n}(|\mathcal{F}[u]| + |\mathcal{K}|)dtdx \to_{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

uniformly in h due to the equi-integrability, since $meas(O_n) \to_{n\to\infty} 0$.
Further, we can approximate a $C((0,T))$ function ζ_n by a sequence of $C^\infty((0,T))$ functions ζ_n^m in L^∞ norm, then since $\left\|\frac{1}{h}\int_{-h}^0 |(\mathcal{F}[u]| + |\mathcal{K}|)dx\right\|_{L^1((0,T))}$ is bounded uniformly in h, the convergence $\|\zeta_n - \zeta_n^m\|_{L^\infty} \to 0$, as $m \to \infty$, is enough to pass to the limit on $I(\zeta_n^m)$ and get $I(\zeta_n)$.
Thus, for any fixed $\epsilon > 0$, we can choose $\zeta_n \in C((0,T))$ such that $|I(\zeta_n) - I(\zeta_n^m)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ then $\zeta_n^m \in C^\infty((0,T))$ such that $|I(\zeta) - I(\zeta_n m)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Hence the claim of the lemma follows. □

Lemma 2.5.10. *Let $\zeta \in L^\infty((0,T))$ with $\zeta \geq 0$. Let u be a weakly trace-regular solution to (P_3) and $(h_n)_n$ a sequence converging to zero. Then*

(i) the application

$$k \mapsto I_k := \lim_{h_n \to 0} \int_0^T \frac{1}{h_n}\int_{-h_n}^0 sign(u-k)(\mathcal{F}[u] - f(k)))\zeta(t)dxdt$$

is continuous.

(ii) If

$$J_{k_m} = \lim_{h_n \to 0} \int_0^T \frac{1}{h_n}\int_{-h_n}^0 sign(u-k_m)(\mathcal{F}[u] - \mathcal{K}_m)\zeta(t)dxdt \geq 0$$

$\forall (k_m, \mathcal{K}_m) \in \widetilde{\mathcal{B}}^{Hyp}$ for two sequences $(k_m)_m$ such that one of them converges to $k+0$ and the other one converges to $k-0$, then also $J_k \geq 0$.

Proof. (i) Consider a sequence $(k_m)_m$ such that $k_m \uparrow k$. Then

$$|sign(u-k_m)-sign(u-k)| \leq 2.\mathbf{1}_{[k_m\leq u\leq k]}.$$

Now, observe that for all fixed c, $\phi(u)_x = 0$ a.e. on the set $[u = c]$. In addition, we have in the sense of uniform convergence on $(-\infty, 0)$:

$$\Big|f(u)-f(k)\Big|\Big(\mathbf{1}_{[k_m=u]}+\mathbf{1}_{[k=u]}\Big) \longrightarrow_{m\to\infty} 0. \tag{2.43}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty}\Big|\frac{1}{h}\int_0^T\int_{-h}^0 sign(u-k)(\mathcal{F}[u]-f(k_m))\zeta(t)dxdt-\frac{1}{h}\int_0^T\int_{-h}^0 sign(u-k)(\mathcal{F}[u]-f(k))\zeta(t)dxdt\Big|\\ &\leq \lim_{m\to\infty}\frac{1}{h}\int_0^T\int_{-h}^0 2\mathbf{1}_{[k_m\leq u\leq k]}\Big(|\mathcal{F}[u]|+|f(k))|\Big)|\zeta(t)|dxdt.\end{aligned} \tag{2.44}$$

But, as $k_m \to k$, for a.e. $y \in [-1, 0]$ we have $meas\{[k_m < u(., hy) < k]\} \to_{m\to\infty} 0$ and using the boundedness of $|f(k)|$ and the equi-integrability of $|\mathcal{F}[u]|(., hy)$, we find that the right hand side of (2.44) tends to zero uniformly in h. In the same way, we treat the case $k_m \downarrow k$. This concludes the proof of (i).
(ii) According to Remark 2.2.1, $\widetilde{\mathcal{B}}^{Hyp}$ is the graph of a continuous function $\kappa \mapsto \mathcal{K}(\kappa)$ defined on the open domain $(-\infty, u_c)$. We can write

$$J_\kappa = I_\kappa + R_\kappa$$

where $R_\kappa = (f(\kappa)-\mathcal{K}(\kappa)) \lim_{h_n\to 0}\int_{-h}^0 sign(u-\kappa)dx$ (the limits in h_n can be taken along a subsequence, if necessary). According to (i), the term I_{k_m} converges to I_k ; also $(f(k_m)-\mathcal{K}(k_m))$ converges to $(f(k)-\mathcal{K}(k))$. In addition, if $k_m < k < k'_m$ then we have

$$R_{k'_m} \leq R_k \leq R_{k_m}.$$

Hence depending of the sign of $(f(k)-\mathcal{K}(k))$, we pick the approximation of k from above or from below and justify (ii). □

Theorem 2.5.11. *Assume that the couple (f, ϕ) is non degenerate in the sense of Definition* 1.3.1. *Given a function u trace regular solution, the following assertions are equivalent*

1. *The function u is weakly trace-regular entropy solution in the sense of Definition* 2.4.5.
2. *The function u is weakly trace-regular entropy solution in the sense of Definition* 2.5.5.
3. *The function u is weakly trace-regular entropy solution in the sense of Definition* 2.5.7.

Proof. Recall that from the proof of Theorem 2.3.8 we know that, given a couple $(U, F) \in \mathbb{R}^2$,

$$(U,F)\in\widetilde{\mathcal{B}} \;\Leftrightarrow\; (U,F) \text{ fulfills (2.14)} \;\Leftrightarrow\; (U,F) \text{ fulfills (2.13)}. \tag{2.45}$$

We will apply (2.45) pointwise to $(U(t), F(t))$ for a.e. $t \in (0, T)$, where $U(.)$ is the strong L^1 trace of u and $F(.)$ is the weak L^1 trace of $\frac{1}{h_n}\int_{-h_n}^0 \mathcal{F}[u](., x)\,dx$ along some sequence $(h_n)_n$ (the sequence will be the same in the three definitions which equivalence we now prove).

Observe that in (2.13) (respectively, in (2.14)) it is enough to limit our attention to relevant values of k that belong to some dense subset $\mathbb{K}$ of $\mathbb{R}$. This is due to the continuity of f and to the continuity of the map

$$k \in (-\infty, u_c) \quad \mapsto \quad \mathcal{K}(k) \ \text{ such that } (k, \mathcal{K}(k)) \in \widetilde{\mathcal{B}}^{Hyp},$$

respectively (see Remark 2.2.1). Moreover, thanks to Lemma 2.5.10, inequalities (2.39) (respectively, inequalities (2.40), (2.41) hold with all relevant values of k if and only if they hold for all relevant values of k in a dense subset $\mathbb{K}$ of $\mathbb{R}$.

For all these reasons, in order to conclude the proof of the theorem it is sufficient to find a dense $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ such that

(i) Inequalities (2.39) hold with k restricted to $\mathbb{K}$ if and only if

$$\text{for a.e. } t \in (0,T) \ \ \forall (k,\mathcal{K}) \in \widetilde{\mathcal{B}}^{Hyp}, \ k \in \mathbb{K}; \ \ sign(U(t)-k)(F(t)-\mathcal{K}) \geq 0. \tag{2.46}$$

(ii) Inequalities (2.40), (2.41) hold with k restricted to $\mathbb{K}$ if and only if

$$\text{for a.e. } t \in (0,T) \ \ \begin{cases} \forall k \geq u^D, \ k \in \mathbb{K}; \ \ sign^+(U(t)-k)(F(t)-f(k)) \geq 0, \\ \forall k \leq u^D, \ k \in \mathbb{K}; \ \ sign^-(U(t)-k)(F(t)-f(k)) \geq 0. \end{cases} \tag{2.47}$$

The proofs of (i) and (ii) follow the same lines ; let us detail the justification of (i).

We define $\mathbb{K}$ as the set of all $k \in \mathbb{R}$ such that $meas(\{t \in (0,T) \,|\, U(t) = k\}) = 0$. Considering the monotone function $k \mapsto meas(\{t \in (0,T) \,|\, U(t) \leq k\})$, we readily see that $\mathbb{R} \setminus \mathbb{K}$ is at most countable, therefore $\mathbb{K}$ is dense in $\mathbb{R}$. Next, given $k \in \mathbb{K}$ we introduce the following sets :

$$E_k^0 = \{t \ \ |U(t) = k\}; \ \ E_k^+ = \{t \ \ |U(t) > k\}; \ \ E_k^- = \{t \ \ |U(t) < k\}.$$

Because $u(.,x)$ converges to $U(.)$ as $x \to 0^-$ a.e. on $(0,T)$, fixing a suitable representative of the a.e. defined function U we have :

$$\forall t \in E_k^+; \exists h(t) : \ \text{for a.e. } \ x \in (-h(t), 0), \ \ u(t,x) > k$$

$$\forall t \in E_k^-; \exists h(t) : \ \text{for a.e. } \ x \in (-h(t), 0), \ \ u(t,x) < k.$$

Therefore, setting

$$E_{k,m}^+ = \left\{ t \in E_k^+; \ |\forall x \in (-\frac{1}{m}, 0) \ \ u(t,x) > k \right\}; \ \ E_{k,m}^- = \left\{ t \in E_k^-; \ |\forall x \in (-\frac{1}{m}, 0) \ \ u(t,x) < k \right\},$$

we see that $E_k^\pm = \cup_{m \in \mathbb{N}^\star} E_{k,m}^\pm$. Now, we are ready to prove (i).
First, from (2.39) we deduce (2.46). We fix m and focus on the set $E_{k,m}^+$. Due to Lemma 2.5.9, we can choose $\zeta = \theta \mathbf{1}_{E_{k,m}^+}$ in (2.39), with some $\theta \geq 0$, $\theta \in L^\infty((0,T))$. Then for all h_n that are smaller than $\frac{1}{m}$, thanks to the definition of $E_{k,m}^+$ we can simply compute

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_n} \int_{-h_n}^0 \int_0^T sign(u-k)(\mathcal{F}[u] - \mathcal{K}) \, \zeta(t) \, dtdx &= \int_{E_{k,m}^+} \frac{1}{h_n} \int_{-h_n}^0 (+1)(\mathcal{F}[u] - \mathcal{K}) \, \theta(t) \, dxdt \\ &\longrightarrow \int_{E_{k,m}^+} (F(t) - \mathcal{K}) \, \theta(t) \, dt \end{aligned} \tag{2.48}$$

by the definition of $F(.)$. By (2.39), for arbitrary L^∞ function $\theta \geq 0$ the right-hand side of (2.48) is nonnegative. Recalling that $U(t) > k$ on $E^+_{k,m}$, we conclude that $sign(U(.)-k)(F(.)-\mathcal{K}) \geq 0$ pointwise on $E^+_{k,m}$. The same result is obtained pointwise on $E^-_{k,m}$, with the same arguments. Finally, since E^0_k is of null measure due to the choice $k \in \mathbb{K}$, and because $\cup_m E^\pm_{k,m} = E^\pm_k$, letting m go to infinity we deduce property (2.46).

Now, we give a justification of (2.39) starting from (2.46). First, due to the above computation (2.48), we readily obtain (2.39) with a test function supported in $E^+_{k,m}$ or (similarly) in $E^-_{k,m}$. Then, setting $E^r_{k,m} := (0,T) \setminus (E^+_{k,m} \cup E^-_{k,m})$, due to the choice $k \in \mathbb{K}$ we find $meas(E^r_{k,m}) \to meas(E^0_k) = 0$ as $m \to \infty$. We conclude by equi-integrability of $\mathcal{F}[u](.,x)$:

$$\lim_{h_n \to 0} \frac{1}{h_n} \int_{-h_n}^0 \int_0^T sign(u-k)(F[u]-\mathcal{K})\,\zeta(t)\,dtdx \geq -\|\zeta\|_\infty \sup_n \frac{1}{h_n} \int_{-h_n}^0 \int_{E^r_{k,m}} (|F[u]|+|\mathcal{K}|)\,dtdx \to 0$$

as $m \to \infty$. This proves (i). The justification of (ii) being similar, this concludes the proof of the theorem. □

2.5.2 Uniqueness of entropy solution

Here we establish uniqueness of weakly trace-regular entropy solution of (P_3).

Theorem 2.5.12. *Assume $u_0, \hat{u}_0 \in L^\infty((-\infty,0)) \cap L^1((-\infty,0))$. Assume that u and $\hat{u}$ are weakly trace-regular entropy solutions of (P_3) in the sense of Definitions* 2.4.5, 2.5.5, 2.5.7 *with the corresponding initial data u_0 and $\hat{u}_0$, respectively. Then*

$$\frac{d}{dt}\|\hat{u}-u\|_{L^1((-\infty,0))} \leq \|\hat{u}_0-u_0\|_{L^1((-\infty,0))} \text{ in } \mathcal{D}'(0,T). \tag{2.49}$$

The result is immediate from the contraction property of Theorem 2.4.2 for integral solutions to the abstract evolution problem (Evol) and from the following result. In particular, there exists at most one weakly trace-regular solution of (P_3).

Theorem 2.5.13. *Consider an initial datum $u_0 \in L^\infty((-\infty,0)) \cap L^1((-\infty,0))$. A weakly trace-regular entropy solution in the sense of Definitions* 2.4.5, 2.5.5, 2.5.7 *is the unique integral solution of (Evol) with the datum u_0.*

Proof. Suppose that u is a weakly trace-regular entropy solution of (P_3) in the sense of Definitions 2.4.5, 2.5.5, 2.5.7 with the initial data u_0 and $\hat{u}$ is an entropy solution of (S_3) in the sense of Definition 2.3.6 with the source term $g \in L^\infty((-\infty,0))$. Using the Carrillo entropy dissipative information and doubling of variables technique, one gets for all $\xi \in C^\infty([0,T)\times(-\infty,0))$

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_{-\infty}^0 |u-\hat{u}|\xi_t dxdt \leq & \int_0^T \int_{-\infty}^0 sign(u-\hat{u})\Big(\mathcal{F}[u]-\mathcal{F}[\hat{u}]\Big)\xi_x dxdt \\ & + \int_{-\infty}^0 |u_0-\hat{u}|\xi(0,x)dx + \Big[u-\hat{u},(\hat{u}-g)\xi\Big]_{L^1((0,T)\times(-\infty,0)}. \end{aligned} \tag{2.50}$$

By density of $C^\infty([0,T)) \times C^\infty((-\infty,0))$ in $C^\infty([0,T)\times(-\infty,0))$, we can take $\xi(t,x) = \xi_h(x)\zeta(t)$ in the inequality (2.50) where $\xi_h = \min\{1, -\frac{x}{h}\}$ and $\zeta \in C^\infty((0,T))$, we obtain after passing to the limit in some sequence $h_n \to 0$

$$-\int_0^T \int_{-\infty}^0 |u-\hat{u}|\zeta_t dxdt \le \Big[u-\hat{u},(\hat{u}-g)\zeta\Big]_{L^1((0,T)\times(-\infty,0)} - \lim_{h_n\to 0}\frac{1}{h_n}\int_0^T\int_{-h_n}^0 sign(u-\hat{u})\Big(\mathcal{F}[u]-\mathcal{F}[\hat{u}]\Big)\zeta dxdt. \tag{2.51}$$

We introduce $\hat{k} = \hat{u}(0)$, $\widehat{\mathcal{K}} = \mathcal{F}[\hat{u}](0)$ and $U(t) = u(t,0)$ at $x = 0^-$, $F(t) = \gamma_w\mathcal{F}[u](t)$. Recall that both $(\hat{k},\widehat{\mathcal{K}})$ and $(U(t),F(t))$ (for a.e. t) belong to the same maximal monotone graph $\widetilde{\mathcal{B}}$. To obtain (2.49), we have to prove that u satisfies (2.23) (i.e. u is an integral solution). For this, it remains to prove for some sequence $(h_n)_n$ converging to zero that

$$\lim_{h_n\to 0}\frac{1}{h_n}\int_0^T\int_{-h_n}^0 sign(u-\hat{u})\Big(\mathcal{F}[u]-\mathcal{F}[\hat{u}]\Big)\zeta(t)dxdt \ge 0. \tag{2.52}$$

To prove (2.52), we fix a sufficiently large m and for every fixed h_n, we split the integrals over $(0,T)$ into the integrals four disjoint subsets :

$$E^0_k, \quad E^-_{k,m}, \quad E^+_{k,m}, \quad E^r_{k,m}$$

where the residual set $E^r_{k,m}$ is the complementary of the union of the three other sets defined in the proof of Theorem 2.5.11. Notice that choosing m large, we can have $meas(E^r_{k,m})$ can be made as small as desired ; then, due to the weak trace-regularity of u, the contribution of the integral over $E^r_{k,m}$ into (2.52) can be made as small as desired. Further, for h_n small enough, due to the definition of $E^\pm_{k,m}$ and the strong convergence of $\hat{u}(x)$ to k we can simply calculate the contributions of the integrals over $E^\pm_{k,m}$ into (2.52). Indeed, we have $sign(u(t,x)-k) = sign(U(t)-k)$ for a.e. (t,x) in the region of integration, therefore we can pass to the weak L^1 limit of the flux $\mathcal{F}[u]$ as well as for $\mathcal{F}[\hat{u}]$. We get the following contribution to the limit (2.52) :

$$\int_{E^-_{k,m}}(-1)(F(t)-\mathcal{K})dt + \int_{E^+_{k,m}}(+1)(F(t)-\mathcal{K})dt = \int_{E^-_{k,m}\cup E^+_{k,m}} sign(U(t)-k)(F(t)-\mathcal{K}).$$

This term is nonnegative because $(k,\mathcal{K}),(U(t),F(t)) \in \widetilde{B}$ where $\widetilde{B}$ is a monotone graph, and since $U(t) \neq k$ on the set $E^-_{k,m} \cup E^+_{k,m}$. Finally, although the contribution of the set E^0_k into (2.52) seems difficult to estimate directly, we can separate the convection and the diffusion fluxes as in (2.20) in the proof of Theorem 2.3.10. Then for a.e. t in E^0_k, following the lines of the end of the proof Theorem 2.3.10 we find

$$\liminf_{h_n\to 0}\frac{1}{h_m}\int_{-h_m}^0\int_{E^0_k} sign(u-\hat{u})(F[u]-F[\hat{u}])dtdx \ge 0.$$

This concludes the proof of positivity of (2.52) and proves the result of the theorem. □

2.5.3 On existence of trace regular solution

To conclude the study of (P_3) with the new definition of solution suggested in this section, it remains to explore existence of weakly trace-regular entropy solution, which requires additional assumptions on

initial data.
Here, we briefly discuss which known techniques could ensure that the flux $F[u]$ is equi-integrable. All of these techniques are limited to the one-dimensional case. Firstly, a closely related result is contained in the work of Rouvre and Gagneux [68], for the one-dimensional problem (P_3). Under strong assumptions of regularity on u_0 the authors justify that the weak normal trace of $F[u].\nu$ on $\partial\Omega$ belongs to L^1. But the sense in which this trace is reached has to be made precise in order to affirm that the solutions constructed in [68] are indeed weakly trace-regular. Next, in several papers on hyperbolic-parabolic equations on $\mathbb{R}$ (see e.g. [70], [38] and [27]), one shows that $F[u]$ is L^∞ bounded whenever $F[u_0]$ is bounded. Notice that uniform boundedness of the flux trivially implies weak trace-regularity of u.

However, in a domain $\Omega \subset \mathbb{R}$ the applicability of the L^∞ estimates of the flux also depends on the boundary condition considered. Let us briefly recall the details. Following the idea of Tadmor (see [70], and [38]), one can look for the bound

$$\|F[u](t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq \|F[u](0,\cdot)\|_{L^\infty}$$

by studying the equation satisfied by

$$v(t,x) = \int_{-\infty}^{x} u_t(t,y)\,dy = -F[u](0,x).$$

From the weak formulation of (P_3), one formally gets a parabolic equation on v. This equation satisfies the maximum principle, at least for regular solutions. With the above definition of v, we see in addition that $v(t,-\infty) = 0$ (for regular solutions with vanishing at infinity data) but $v(t,0) = -F(t,0)$, therefore

$$\|v(t,.)\|_{L^\infty} \leq \max\{F(t,0), \|v(0,.)\|_{L^\infty}\}.$$

While the maximum principle argument can be justified at the level of vanishing viscosity approximations, we lack estimates on $F(t,0)$ in the case of Dirichlet boundary condition. Finally, let us mention that several papers extend the argument developed in [70] to construct solutions with uniform BV bound on $F[u](t,\cdot)$. Clearly, such bound guarantees strong trace-regularity of solutions, which implies weak trace regularity. But here again, the influence of the boundary condition has to be carefully explored. Therefore, in view of the state-of-the-art, a deeper study of the question of existence of weakly trace-regular solutions is not trivial and it is postponed to future work.

Chapitre 3

Degenerate parabolic equation with zero flux boundary condition and its approximations

3.1 Introduction

Let Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^\ell$, $\ell \geq 1$, with a Lipschitz boundary $\partial\Omega$ and η the unit normal to $\partial\Omega$ outward to Ω. We consider the zero-flux boundary problem

$$(P_1)\begin{cases} u_t + \operatorname{div} f(u) - \Delta\phi(u) = 0 & \text{in} \quad Q = (0,T)\times\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{in} \quad \Omega, \\ (f(u) - \nabla\phi(u)).\eta = 0 & \text{on} \quad \Sigma = (0,T)\times\partial\Omega. \end{cases}$$

The function f is continuous and satisfy :

$$f(0) = f(u_{\max}) = 0 \text{ for some } u_{\max} > 0. \tag{H1}$$

We suppose that the initial data u_0 takes values in $[0, u_{\max}]$. In this case $[0, u_{\max}]$ will be an invariant domain for the solution of (P_1) (see Chapter 1). The function ϕ is non decreasing Lipschitz continuous in $[0, u_{\max}]$. Formally $\Delta(\phi(u)) = \operatorname{div}(\phi'(u)\nabla u)$. Then, if $\phi'(u) = 0$ for some $(t,x) \in Q$, the diffusion term vanishes so that (P_1) is a degenerate parabolic-hyperbolic problem. In our context, we suppose as in Chapter 1 that there exists a real value u_c with $0 \leq u_c \leq u_{\max}$ such that for $u \leq u_c$, the problem (P_1) is hyperbolic. This means that $\phi \equiv 0$ on $[0, u_c]$ and ϕ is strictly increasing in $[u_c, u_{\max}]$. Also as in Chapter 1, we assume that the couple (f, ϕ) is non-degenerate, this means that for all $\xi \in \mathbb{R}^\ell$, $\xi \neq 0$, the functions $\lambda \longmapsto \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i f_i(\lambda)$ is not affine on the non-degenerate sub intervals of $[0, u_c]$. It is well know that uniqueness of weak solution of degenerate hyperbolic-parabolic problem is not ensured, and one has to define a notion of entropy solution in the sense of Carrillo [28] (see in the strictly hyperbolic case Kruzhkov [49]) to recover uniqueness. Inspired by [22], we defined in the Chapter 1, a suitable notion of entropy solution for (P_1). A measurable function u taking values on $[0, u_{\max}]$ is called an

entropy solution of the initial-boundary value problem (P_1) if $\phi(u) \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ and $\forall k \in [0, u_{\max}]$, $\forall \xi \in C^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^\ell)^+$, the following inequality hold

$$\int_0^T\int_\Omega \Big\{|u-k|\xi_t + sign(u-k)\Big[f(u)-f(k)-\nabla\phi(u)\Big].\nabla\xi\Big\}\,dxdt$$
$$+\int_0^T\int_{\partial\Omega} |f(k).\eta(x)|\,\xi(t,x)d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)dt + \int_\Omega |u_0-k|\xi(0,x)dx \geq 0.$$

Let us recall the main theoretical results on problem (P_1) obtained in Chapter 1. We prove existence of solution satisfying (1.2), for any space dimension in the case $0 < u_c < u_{\max}$. Uniqueness is obtained for one space dimension. Remark that uniqueness is also true in multi-dimensional situation in two extreme cases : $u_c = 0$ (non-degenerate parabolic case, see [7]) and $u_c = u_{\max}$ (pure hyperbolic case, (see [22])). We refer to section 4.7 for some explanations.

In this chapter, we choose an implicit finite volume scheme for the discretization of the degenerate parabolic-hyperbolic equation (P_1). Under suitable assumptions on the numerical fluxes, it is shown that the considered schemes are L^∞ stable and the discrete solutions satisfy some weak BV inequality and H^1 estimates. We prove also space and time translation estimates on the diffusion fluxes, which are the keys to the proof of convergence of the scheme. We prove existence of discrete solution by using Leray-Schauder topological degree. The approximate solutions are shown to satisfy the appropriate discrete entropy inequalities. Using the weak BV and H^1 estimates, the approximate solutions are also shown to satisfy continuous entropy inequalities. It remains to prove that the sequence of approximate solutions satisfying these continuous entropy inequalities converge towards a unique entropy solution. In [59], Michel and Vovelle use the concept of 'entropy-process solution' introduced by Gallouët and al (see e.g. [42, 59, 29]) for Dirichlet boundary problem which is similar to the notion of measure-valued solutions of Diperna [36]. They proved that approximate solutions converge towards an entropy-process solution as the mesh size tends to zero. Using doubling of variables method, they showed that the entropy-process solution is unique and is also a entropy solution of Dirichlet problem. In the case of zero-flux boundary condition, some difficulty due to lack of regularity for the boundary flux appears (see [9]). We are not able to obtain uniqueness by the doubling of variables method. Thus, the only notion of entropy-process solution is not enough to prove convergence towards the entropy solution. To solve this difficulty, we found it useful to consider the general evolution problem of the form :

$$(E)\begin{cases} v'(t)+A(v(t)) = 0 & \text{on} \quad (0,T);\\ v(0) = u_0. \end{cases}$$

We propose a new notion of solution called integral-process solution for the abstract evolution problem (E). This notion is presented in detail in the Appendix B of this thesis. We prove that this new notion of integral-process solution coincides with the unique integral solution. Then, we apply this notion to the problem (P_1) and prove that the approximate solutions converge towardsthe integral-process solution. Then we conclude that it is an entropy solution.

The rest of this chapter is organized as follows. In section 3.2, we present our implicit scheme. In section 3.3, we establish a priori estimates, the discrete entropy inequalities and existence of discrete solution in section 3.4 . We propose in section 3.5 a continuous entropy inequality, and the convergence result follows in section 3.6. Finally, in section 3.7 we study the abstract evolution equation (E) and prove uniqueness of entropy solution in one space dimension for degenerate parabolic equation.

3.2 Presentation of a finite volume scheme for degenerate parabolic problem with zero flux boundary condition

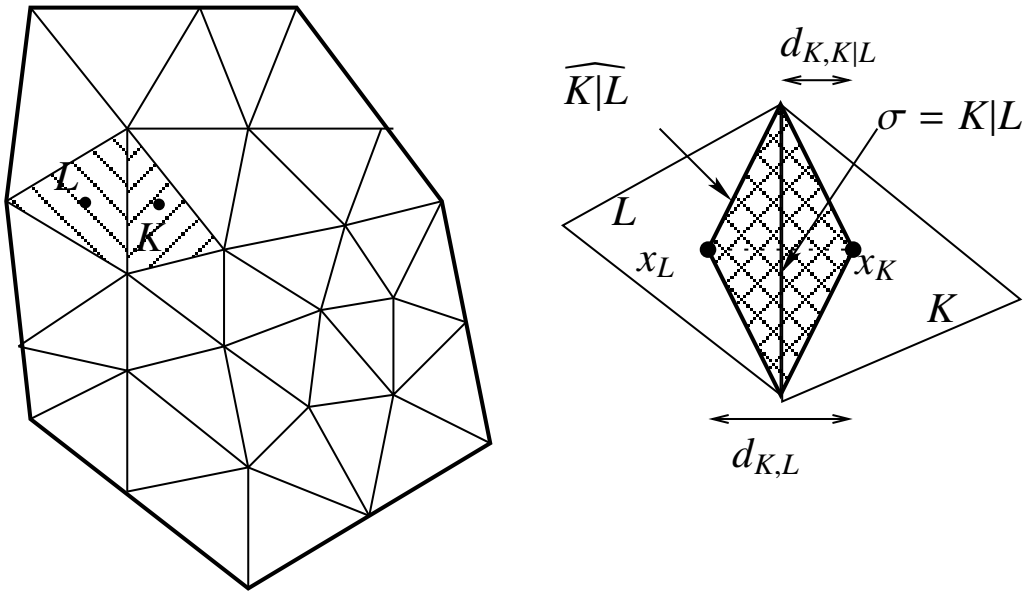

FIGURE 3.1 – Control volumes, centre, diamonds

In this section, we consider the problem (P_1) and construct a monotone finite volume scheme to approximate the solution. Let $\delta t > 0$ be the time step. Let $\mathcal{O}$ be a family of disjoint connected polygonal subsets called control volumes of Ω such that $\overline{\Omega}$ is the union of the closures of the elements of this family and such that the common interface of two control volumes is included in the hyperplane of $\mathbb{R}^\ell$. Let h be the upper bound for maximum size of the mesh : $h = \sup\{\text{Diam}(K), K \in \mathcal{O}\}$. We suppose that there exists $\alpha > 0$ such that :

$$\alpha h^\ell \leq m(K), \quad m(\partial K) \leq \frac{1}{\alpha} h^{\ell-1}, \quad \forall K \in \mathcal{O}, \tag{3.1}$$

then the estimate on the number $|\mathcal{O}|$ of control volumes is

$$|\mathcal{O}| \leq \frac{m(\Omega)}{\alpha} h^{-\ell}, \tag{3.2}$$

where $m(K)$ is the $\ell-$ dimensional Lebesgue measure of K and $m(\partial K)$ is the $(\ell-1)-$ dimensional Lebesgue measure of ∂K. If K and L are two control volumes having an edge σ in common, we say that L is a neighbor of K and we write $L \in \mathcal{N}(K)$. We sometimes denote by $K|L$ the common edge σ between K and L and by $n_{K,\sigma}$ the unit normal to σ, oriented from K to L. Moreover, $\bar{\varepsilon}_K$ denotes the set of all edges for any control volumes K. If K has at least one common edge with the boundary $\partial\Omega$, we denote by ε_K^{ext} the set of these boundaries edges, that can be regarded as $\varepsilon_K^{ext} = \{\sigma \in \bar{\varepsilon}_K, m(\sigma \cap \partial\Omega) > 0\}$. Eventually, if the control volume K has no common edges with a part of the boundary $\partial\Omega$ then $\varepsilon_K^{ext} = \emptyset$. In all case, for

all control volume $K \in \mathcal{O}$, we have $\varepsilon_K = \bar{\varepsilon}_K \backslash \varepsilon_K^{ext}$. Because we consider the zero-flux boundary condition, we don't need to distinguish between interior and exterior control volumes, only inner interfaces between volumes are needed in order to formulate the scheme. We consider here the admissible mesh of Ω (see for e.g. [59]), we mean that there exists a family of points $(x_K)_{K\in\mathcal{O}}$ such that the straight line $\overline{x_K x_L}$ is orthogonal to the interface $K|L$. We denote by $d_{K,L} = |x_K - x_L|$ the distance between x_K and x_L and by $d_{K,\sigma}$ the distance between x_K and the interface σ (see Figure 3.1). The point x_K is referred as the centre of K. To simplify the analysis, we consider that $x_K \in K$ (in general, this assumption can be relaxed, e.g., one can consider so called Delaunay simplicial meshes). We denote by $\tau_{K,\sigma}$ the 'transmissibility' through σ defined by $\tau_{K,\sigma} = \frac{m(\sigma)}{d_{K,\sigma}}$ if $\sigma \in \varepsilon_K^{ext}$, in addition we denote $\tau_{K|L} = \frac{m(K|L)}{d_{K,L}}$. The diamond denoted by $\widehat{K|L}$ is a convex hull constructed from neighbor centers x_K, x_L and $K|L$. The diamonds are disjoint and cover Ω up to an h-neighborhood of $\partial\Omega$. Notice that the $\ell-$ dimensional measure $m(\widehat{K|L})$ of $\widehat{K|L}$ equals to $\frac{d_{K,L}}{\ell} m(K|L)$ (see Figure 3.1).

A discrete function w on the mesh $\mathcal{O}$ is a set $(w_K)_{K\in\mathcal{O}}$. If w_K, v_K are discrete functions, the corresponding $L^2(\Omega)$ scalar product and norm can be computed as

$$(w_{\mathcal{O}}, v_{\mathcal{O}})_{L^2(\Omega)} = \sum_{K\in\mathcal{O}} m(K) w_K v_K; \quad \|w_{\mathcal{O}}\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{K\in\mathcal{O}} m(K)|w_K|^2.$$

In addition, we can define the positive (but not definite) product and the corresponding "discrete H_0^1 semi-norm" by

$$(w_{\mathcal{O}}, v_{\mathcal{O}})_{H_{\mathcal{O}}} = \ell \sum_{K\in\mathcal{O}} \sum_{L\in\mathcal{N}(K)} \frac{m(K|L)}{d_{K,L}} (w_L - w_K)(v_L - v_K); \quad |w_{\mathcal{O}}|^2_{H_{\mathcal{O}}} = \Big((w_{\mathcal{O}}, w_{\mathcal{O}})_{H_{\mathcal{O}}}\Big). \tag{3.3}$$

We define the discrete gradient $\nabla_{\mathcal{O}} w_{\mathcal{O}}$ of a constant per control volume function $w_{\mathcal{O}}$ as the constant per diamond $\widehat{K|L}$, $\mathbb{R}^\ell$-valued function with values

$$(\nabla_{\mathcal{O}} w_{\mathcal{O}})_{\widehat{K|L}} = \nabla_{\widehat{K|L}} w_{\mathcal{O}} := \ell \frac{w_L - w_K}{d_{K,L}} \eta_{K,L}. \tag{3.4}$$

For the approximation of the convective term, we consider the numerical convection fluxes $F_{K,\sigma} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ for $K \in \mathcal{O}, \sigma \in \bar{\varepsilon}_K$
The numerical convection fluxes are monotone :

$$\begin{aligned} &F_{K,\sigma} : [0, u_{\max}]^2 \longrightarrow \mathbb{R}; (a, b) \longmapsto F_{K,\sigma}(a, b) \\ &\text{is nondecreasing with respect to } a \text{ and nonincreasing with respect to } b. \end{aligned} \tag{3.5}$$

The numerical convection fluxes are conservative :

$$\text{For all } \sigma = K|L, \text{ for all } a, b \in [0, u_{\max}]; F_{K,L}(a, b) = -F_{L,K}(b, a). \tag{3.6}$$

The numerical convection fluxes are regular :

$$\begin{aligned} &F_{K,\sigma} \text{ is Lipschitz continuous and admits } m(\sigma)M \text{ as Lipschitz constant on} \\ &[0, u_{\max}]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

The numerical convection fluxes are consistent :

$$\text{For all } s \in [0, u_{\max}], F_{K,\sigma}(s, s) = m(\sigma) f(s).n_{K,\sigma}. \tag{3.8}$$

The Godunov, the splitting flux of Osher and Rusanov schemes may be the most common examples of schemes with fluxes satisfying (3.5)-(3.8).
Notice that the hypothesis (3.7) and (3.8) entail the bound

$$\forall a, b \in [0, u_{\max}], \quad |F_{K,\sigma}(s, s)| \leq (\|f\|_{L^\infty} + M u_{\max}) m(\sigma). \tag{3.9}$$

The discrete unknowns u_K^{n+1} for all control volume $K \in \mathcal{O}$, and $n \in \mathbb{N}$ are defined thanks to the following relations : first we initialize the scheme by

$$u_K^0 = \frac{1}{m(K)} \int_K u_0(x) dx \quad \forall K \in \mathcal{O}, \tag{3.10}$$

then, we use the implicit scheme for the discretization of problem (P_1) :
$\forall n > 0, \ \forall K \in \mathcal{O}$,

$$m(K) \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{\delta t} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}(u_K^{n+1}, u_{K,\sigma}^{n+1}) - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tau_{K,\sigma} \Big(\phi(u_{K,\sigma}^{n+1}) - \phi(u_K^{n+1}) \Big) = 0. \tag{3.11}$$

If the scheme has a solution, we will say that the piecewise constant function $u_{\mathcal{O},\delta t}(t, x)$ defined by :

$$u_{\mathcal{O},\delta t}(t, x) = u_K^{n+1} \text{ for } x \in K \text{ and } t \in]n\delta t, (n+1)\delta t], \text{ a.e.} \tag{3.12}$$

is an approximate solution to (P_1).

Remark 3.2.1. *1. Notice that using relation* (3.8) *and the fact that for all* $s \in \mathbb{R}$ $\mathrm{div}_x f(s) = 0$*, one gets*

$$\forall s \in [0, u_{\max}], \forall K \in \mathcal{O}, \sum_{\sigma \in \bar{\mathcal{E}}_K} F_{K,\sigma}(s, s) = 0. \tag{3.13}$$

This is equivalent to :

$$\forall s \in [0, u_{\max}], \forall K \in \mathcal{O}, \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}(s, s) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K^{ext}} F_{K,\sigma}(s, s) = 0. \tag{3.14}$$

2. Notice that the prescribed zero flux boundary condition is in fact included in (3.11)*. One can extend the summation over* $\sigma \in \bar{\varepsilon}_K$*, and by convention regard the fluxes as :*

$$F_{K,\sigma}(u_K^{n+1}, u_{K,\sigma}^{n+1}) = \begin{cases} F_{K,\sigma}(u_K^{n+1}, u_L^{n+1}) & \text{if} \quad \sigma \in K|L, \\ 0 & \text{if} \quad \sigma \in \varepsilon_K^{ext}. \end{cases} \tag{3.15}$$

$$\tau_{K,\sigma} \Big(\phi(u_{K,\sigma}^{n+1}) - \phi(u_K^{n+1}) \Big) = \begin{cases} \tau_{K|L} \Big(\phi(u_L^{n+1}) - \phi(u_K^{n+1}) \Big) & \text{if} \quad \sigma \in K|L, \\ 0 & \text{if} \quad \sigma \in \varepsilon_K^{ext}. \end{cases} \tag{3.16}$$

3.3 Discrete entropy inequalities

This part is devoted to discrete entropy inequalities. We recall some notations (see [42]) :
Denote by $a\perp b = \min(a,b)$ and $a\top b = \max(a,b)$. We define $\eta_k^+(s) = (s-k)^+ = s\top k - k$, (respectively $\eta_k^-(s) = (s-k)^- = s\perp k - k$) and the associated fluxes-functions $\Phi_k^\pm$ called entropy fluxes

$$\begin{aligned}
&\Phi_k^+(s) = sign^+(s-k)(f(s)-f(k)) = f(s\top k) - f(k);\\
&\Phi_k^-(s) = sign^-(s-k)(f(s)-f(k)) = f(s\perp k) - f(k);\\
&\Phi_k(s) = sign(s-k)(f(s)-f(k)).
\end{aligned}$$

Therefore, the numerical sub and super entropy fluxes functions are defined by the formulas

$$\begin{aligned}
&\Phi_{K,\sigma,k}^+(a,b) = F_{K,\sigma}(a\top k, b\top k) - F_{K,\sigma}(k,k);\\
&\Phi_{K,\sigma,k}^-(a,b) = F_{K,\sigma}(k,k) - F_{K,\sigma}(a\perp k, b\perp k);\\
&\Phi_{K,\sigma,k}(a,b) = F_{K,\sigma}(a\top k, b\top k) - F_{K,\sigma}(a\perp k, b\perp k).
\end{aligned}$$

From now, we have the following the discrete entropy inequalities.

Lemma 3.3.1. *Assume that* (3.2), (3.5)- (3.8) *hold. Let $u_{\mathcal{O},\delta t}$ be an approximate solution of the problem (P_1) defined by* (3.10), (3.11), *. Then for all $k \in [0, u_{\max}]$, for all $K \in \mathcal{O}$, $n \geq 0$ the following discrete sub-entropy inequalities hold :*

$$\begin{aligned}
&\frac{\eta_k^+(u_K^{n+1}) - \eta_k^+(u_K^n)}{\delta t} m(K) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} \Phi_{K,\sigma,k}^+(u_K^{n+1}, u_{K,\sigma}^{n+1})\\
&- \sum_{K|L} \tau_{K|L}\Big(\eta_{\phi(k)}^+(\phi(u_L^{n+1})) - \eta_{\phi(k)}^+(\phi(u_K^{n+1}))\Big)\\
&\leq \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K^{ext}} sign^+(u_K^{n+1}-k) m(\sigma) f(k) n_{K,\sigma}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Also the discrete super-entropy inequalities are satisfied (i.e., η_k^+, $\Phi_{K,\sigma,k}^+$, $sign^+$ can be replaced by η_k^-, and $\Phi_{K,\sigma,k}^-$, $sign^-$ in (3.17).

Notice that, if for all $K \in \mathcal{O}$, u_K^{n+1} satisfy both discrete sub-entropy inequality and discrete super-entropy inequality, then u_K^{n+1} can be seen as a discrete entropy solution in $K\times]n\delta t, (n+1)\delta t]$.

Proof. Thanks to the Remark 3.2.1, the constant $k \in [0, u_{\max}]$ is solution of :

$$m(K)\frac{k-k}{\delta t} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}(k,k) - \sum_{K|L} \tau_{K|L}\Big(\phi(k) - \phi(k)\Big) = -\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K^{ext}} F_{K,\sigma}(k,k). \tag{3.18}$$

Substracting from the equality (3.11) the equality (3.18), we obtain :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\delta t}\Big((u_K^{n+1}-k) - (u_K^n - k)\Big) m(K) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K}\Big(F_{K,\sigma}(u_K^{n+1}, u_{K,\sigma}^{n+1}) - F_{K,\sigma}(k,k)\Big)\\
&- \sum_{L\in\mathcal{N}(K)} \tau_{K|L}\Big[\Big(\phi(u_L^{n+1}) - \phi(k)\Big) - \Big(\phi(u_K^{n+1}) - \phi(k)\Big)\Big] = \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K^{ext}} F_{K,\sigma}(k,k).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Multiply (3.19) by $(\eta_k^+)'(u_K^{n+1}) = sign^+(u_K^{n+1} - k)$. We recall that for all convex function J, we have for all $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, the convexity inequality $(z_1 - z_2)J'(z_1) \geq J(z_1) - J(z_2)$. (Here, we may consider J' as being multivalued, in the sense of sub differential of J). First, we use this convexity inequality to obtain

$$sign^+(u_K^{n+1} - k)\Big((u_K^{n+1} - k) - (u_K^n - k)\Big) \geq \Big((u_K^{n+1} - k)^+ - (u_K^n - k)^+\Big). \tag{3.20}$$

Second, due to the monotony of the numerical fluxes, we see that

$$sign^+(u_K^{n+1} - k)\Big(F_{K,\sigma}(u_K^{n+1}, u_{K,\sigma}^{n+}) - F_{K,\sigma}(k,k)\Big) \geq \Phi^+_{K,\sigma,k}(u_K^{n+1}, u_{K,\sigma}^{n+1}). \tag{3.21}$$

Finally, using the convexity inequality and the monotonicity of ϕ, we have :

$$-(\eta_k^+)'(u_K^{n+1})\Big[\Big(\phi(u_L^{n+1}) - \phi(k)\Big) - \Big(\phi(u_K^{n+1}) - \phi(k)\Big)\Big] \geq -\Big(\eta^+_{\phi(k)}(\phi(u_L^{n+1}) - \eta^+_{\phi(k)}(\phi(u_K^{n+1})\Big). \tag{3.22}$$

Then, we get

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\delta t}\Big((u_K^{n+1} - k)^+ - (u_K^n - k)^+\Big)m(K) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} \Phi^+_{K,\sigma,k}(u_K^{n+1}, u_{K,\sigma}^{n+1}) \\
&- \sum_{K|L} \tau_{K|L}\Big(\eta^+_{\phi(k)}(\phi(u_L^{n+1})) - \eta^+_{\phi(k)}(\phi(u_K^{n+1}))\Big) \\
&\leq \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K^{ext}} sign^+(u_K^{n+1} - k)m(\sigma)f(k)n_{K,\sigma}.
\end{aligned}$$

This prove (3.17). In the same way, we prove the discrete super-entropy inequalities. Finally, we deduce that u_K^{n+1} satisfies the discrete entropy inequality in this sense :

$$\begin{aligned}
&\frac{\eta_k(u_K^{n+1}) - \eta_k(u_K^n)}{\delta t}m(K) + \sum_{\sigma\in\bar{\mathcal{E}}_K} \Phi_{K,\sigma,k}(u_K^{n+1}, u_{K,\sigma}^{n+1}) \\
&- \sum_{K|L} \tau_{K|L}\Big(\eta_{\phi(k)}(\phi(u_L^{n+1}) - \eta_{\phi(k)}(\phi(u_K^{n+1})\Big) \\
&\leq \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K^{ext}} sign(u_K^{n+1} - k)m(\sigma)f(k)n_{K,\sigma}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

□

3.4 Estimates of discrete solution and existence

We wish to prove that the approximate solution $u_{O,\delta t}$ satisfies the continuous entropy inequalities (see section 3.6). To this purpose, we give fundamental estimates useful for proving convergence of the scheme. First, we prove the L^∞ stability of the scheme, this comes from discrete entropy inequalities and the boundedness of the flux f with the relation (H1).

3.4.1 L^∞ bound on discrete solutions

Proposition 3.4.1. *Suppose that $K \in \mathcal{O}$, the assumptions* (3.2), (3.5)- (3.8) *hold. Assume that u_0 takes values in $[0, u_{\max}]$. Then, the approximate solution $u_{\mathcal{O},\delta t}(t,x)$ of problem (P_1) defined by* (3.10), (3.11) *satisfies :*

$$0 \le u_K^n(t,x) \le u_{\max} \qquad \forall K \in \mathcal{O}. \tag{3.24}$$

Proof. Summing (3.17) over $K \in \mathcal{O}$, we get

$$\begin{aligned}
&\sum_{K\in\mathcal{O}} m(K)\frac{\eta_k^+(u_K^{n+1}) - \eta_k^+(u_K^n)}{\delta t} + \sum_{K\in\mathcal{O}}\sum_{\sigma\in\bar{\mathcal{E}}_K} \Phi^+_{K,\sigma,k}(u_K^{n+1}, u_{K,\sigma}^{n+1}) \\
&- \sum_{K\in\mathcal{O}}\sum_{L\in\mathcal{N}(K)} \tau_{K|L}\Big(\eta^+_{\phi(k)}(\phi(u_L^{n+1})) - \eta^+_{\phi(k)}(\phi(u_K^{n+1}))\Big) \\
&\le \sum_{K\in\mathcal{O}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K^{ext}} m(\sigma)|f(k)n_{K,\sigma}|.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

In inequality (3.25), take $k = u_{\max}$ and use (H1) to obtain :

$$\begin{aligned}
&\sum_{K\in\mathcal{O}} \frac{m(K)}{\delta t}\Big(u_K^{n+1} - u_{\max}\Big)^+ - \sum_{K\in\mathcal{O}} \frac{m(K)}{\delta t}\Big(u_K^{n} - u_{\max}\Big)^+ + \sum_{K\in\mathcal{O}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} \Phi^+_{K,\sigma,u_{\max}}(u_K^{n+1}, u_{K,\sigma}^{n+1}) \\
&- \sum_{K\in\mathcal{O}}\sum_{L\in\mathcal{N}(K)} \tau_{K|L}\Big(\eta^+_{\phi(u_{\max})}(\phi(u_L^{n+1})) - \eta^+_{\phi(u_{\max})}(\phi(u_K^{n+1}))\Big) \le 0.
\end{aligned}$$

From now, remark that due to the conservativity of the scheme we have

$$\begin{aligned}
&\sum_{K\in\mathcal{O}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} \Phi^+_{K,\sigma,u_{\max}}(u_K^{n+1}, u_{K,\sigma}^{n+1}) = \sum_{K\in\mathcal{O}}\sum_{L\in\mathcal{N}(K)} \Phi^+_{K,L,u_{\max}}(u_K^{n+1}, u_L^{n+1}) = 0 \\
&\sum_{K\in\mathcal{O}}\sum_{K|L}\Big(\eta^+_{\phi(k)}(\phi(u_L^{n+1})) - \eta^+_{\phi(k)}(\phi(u_K^{n+1}))\Big) = \sum_{K\in\mathcal{O}}\sum_{L\in\mathcal{N}(K)}\Big(\eta^+_{\phi(k)}(\phi(u_L^{n+1})) - \eta^+_{\phi(k)}(\phi(u_K^{n+1}))\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Therefore

$$\sum_{K\in\mathcal{O}} \frac{m(K)}{\delta t}\Big((u_K^{n+1} - u_{\max})^+ - (u_K^n - u_{\max})^+\Big) \le 0. \tag{3.26}$$

Since $0 \le u_K^0 \le u_{\max}$, by induction we prove $(u_K^{n+1} - u_{\max})^+ \le 0$. In the same way, in the super-entropy inequality, taking $k = 0$, use (H1), we also prove that $(u_K^{n+1})^- \le 0$. □

3.4.2 Weak BV and $L^2(0,T,H^1(\Omega))$ estimates

From now, we give the weak BV and $L^2(0,T,H^1(\Omega))$ estimates. The $L^2(0,T,H^1(\Omega))$ as the L^∞ estimate are necessary for justifying compactness properties of discrete solutions. The weak BV-stability does not give directly any compactness result, however, it plays a crucial role in the proof of continuous entropy inequality (see section 3.6). To start with, we recall a Lemma which is one ingredient of the proof of Lemma 3.4.3 below.

Lemma 3.4.2. *Let $G : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ be a monotone Lipschitz continuous function with Lipschitz constant $L > 0$ and $a, b \in \mathbb{R}$. Then for all $c, d \in [a, b]$, one has*

$$\left|\int_c^d \Big(G(x) - G(c)\Big)dx\right| \geq \frac{1}{2L}\Big(G(d) - G(c)\Big)^2.$$

Proof. In order to prove this result, we assume, for instance, that G is nondecreasing and $c < d$ (the other cases are similar). Then, ones has $G(s) \geq H(s)$, for all $s \in [c, d]$, where $H(s) = G(c)$ for $s \in [c, d - l]$ and $H(s) = G(c) + (s - d + l)L$ for $s \in [d - l, d]$, with $lL = G(d) - G(c)$, and therefore :

$$\int_c^d (G(s) - G(c))ds \geq \int_c^d (H(s) - G(c))ds = \frac{l}{2}(G(d) - G(c)) = \frac{1}{2L}(G(d) - G(c))^2.$$

□

Now, we establish the weak BV-stability of the scheme.

Lemma 3.4.3. *(Weak BV-Estimate) Suppose that* (3.2),(3.5)-(3.8) *hold. Let $u_{O,\delta t}$ be an approximate solution of problem (P_1) defined by* (3.10), (3.11). *Let $T > 0$, and set $N = \max\{n \in \mathbb{N}, n < \frac{T}{\delta t}\}$ and $L \in \mathcal{N}(K)$ (with convention $u_K^{n+1} \geq u_L^{n+1}$). Then there exists $C = C(\|f\|_{L^\infty}, u_{\max}, T, |\Omega|) \geq 0$ such that*

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K|L}\Big[\max_{u_L^{n+1} \leq c \leq d \leq u_K^{n+1}}\Big(F_{K,\sigma}(d, c) - F_{K,\sigma}(d, d)\Big)\Big] \\ &+ \sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K|L}\Big[\max_{u_L^{n+1} \leq c \leq d \leq u_K^{n+1}}\Big(F_{K,\sigma}(d, c) - F_{K,\sigma}(c, c)\Big)\Big] \leq \frac{C}{\sqrt{h}}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Proof. Multiplying (3.11) by $\delta t u_K^{n+1}$ and summing over $K \in O$ and $n = 0, ..., N$ yields $A_{Evol} + A_{Conv} + A_{Diff} = 0$ with

$$\begin{aligned}A_{Evol} &= \sum_{n=0}^{N} \sum_{K \in O} m(K)(u_K^{n+1} - u_K^n)u_K^{n+1}; \\ A_{Conv} &= \sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K \in O} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}(u_K^{n+1}, u_{K,\sigma}^{n+1})u_K^{n+1}; \\ A_{Diff} &= -\sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K \in O} \sum_{K|L} \tau_{K|L}\Big(\phi(u_L^{n+1}) - \phi(u_K^{n+1})\Big)u_K^{n+1}.\end{aligned}$$

Let us first estimate A_{Evol}. Let us first estimate A_{Evol}. We use the fact that :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (a - b)a = \frac{1}{2}(a - b)^2 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2,$$

we get :

$$\begin{aligned}A_{Evol} &= \sum_{n=0}^{N} \sum_{K \in O} m(K)(u_K^{n+1} - u_K^n)u_K^{n+1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{K \in O} m(K)(u_K^{n+1} - u_K^n)^2 + \frac{1}{2}\sum_{K \in O} m(K)\Big[(u_K^{N+1})^2 - (u_K^0)^2\Big].\end{aligned} \tag{3.28}$$

The two first terms are non negative and due to (3.24) there exists $C \geq 0$ (that only depends on $|\Omega|$ and $u_{\max}$) such that $-C$ is a lower bound for the last term, then

$$A_{Evol} \geq -C. \tag{3.29}$$

Secondly, using summation by parts

$$A_{Diff} = \sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K\in O} \sum_{K|L} \tau_{K|L}\Big(\phi(u_L^{n+1}) - \phi(u_K^{n+1})\Big)\Big(u_L^{n+1} - u_K^{n+1}\Big) \geq 0. \tag{3.30}$$

Now, we study the term A_{Conv}. Due to (3.14), it can be rewritten as the sum between A_{Conv}^{int} and A_{Conv}^{ext} :

$$\begin{aligned} A_{Conv}^{int} &= \sum_{n=0}^{N} \sum_{K|L} \delta t\Big(F_{K,\sigma}(u_K^{n+1}, u_L^{n+1}) - F_{K,\sigma}(u_K^{n+1}, u_K^{n+1})\Big)u_K^{n+1} \\ &\quad - \sum_{n=0}^{N} \sum_{K|L} \delta t\Big(F_{K,\sigma}(u_K^{n+1}, u_L^{n+1}) - F_{K,\sigma}(u_L^{n+1}, u_L^{n+1})\Big)u_L^{n+1}; \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} A_{Conv}^{ext} &= -\sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K\in O} u_K^{n+1} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K^{ext}} F_{K,\sigma}(u_K^{n+1}, u_K^{n+1}) \\ &= -\sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K\in O} u_K^{n+1} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K^{ext}} m(\sigma) f(u_K^{n+1}).\eta_{K,\sigma}. \end{aligned}$$

We can estimate the boundary term A_{Conv}^{ext} by

$$|A_{Conv}^{ext}| \leq C(\|f\|_{L^\infty}, u_{\max}, T, |\partial\Omega|). \tag{3.32}$$

Let us assign :

$$\Psi_{K,L}(a) = \int_0^a s\Big(\frac{\partial F_{K,L}}{\partial u}(s,s) + \frac{\partial F_{K,L}}{\partial v}(s,s)\Big)ds = \int_0^a s\frac{d}{ds}F_{K,L}(s,s)ds.$$

Then

$$\begin{aligned} \Psi_{K,L}(b) - \Psi_{K,L}(a) &= \int_0^b s\frac{d}{ds}F_{K,L}(s,s)ds - \int_0^a s\frac{d}{ds}F_{K,L}(s,s)ds, \\ &= b\Big(F_{K,L}(b,b) - F_{K,L}(a,b)\Big) - a\Big(F_{K,L}(a,a) - F_{K,L}(a,b)\Big) \\ &\quad - \int_a^b \Big(F_{K,L}(s,s) - F_{K,L}(a,b)\Big)ds. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Take $a = u_K^{n+1}$ and $b = u_L^{n+1}$ in (3.33) and multiply by δt. Summing over $n = 0, ..., N$ and $L \in \mathcal{N}(K)$, we obtain $A_{Conv}^{int} = A_{Conv}^{int,1} + A_{Conv}^{int,2}$, where :

$$\begin{aligned} A_{Conv}^{int,1} &= \sum_{n=0}^{n+1} \sum_{K|L} \delta t \int_{u_L^{n+1}}^{u_K^{n+1}} \Big(F_{K,L}(u_K^{n+1}, u_L^{n+1}) - F_{K,L}(s,s)\Big)ds \\ A_{Conv}^{int,2} &= -\sum_{n=0}^{n+1} \sum_{K|L} \delta t\Big(\Psi_{K,L}(u_K^{n+1}) - \Psi_{K,L}(u_L^{n+1})\Big). \end{aligned}$$

We have $\sum_{\sigma\in\bar{\mathcal{E}}_K}\Psi_{K,L}(s)=0$, for all $s\in[0,u_{\max}]$; then it appears that $A^{int,2}_{Conv}$ reduces to the sum of $\sigma\in\varepsilon^{ext}_K$, and it satisfies $|A^{int,2}_{Conv}|\le C$ similar to the estimate of A^{ext}_{Conv}.
Now, consider $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ such that $a\le c\le d\le b$. Using the monotonicity of $F_{K,L}$ and Lemma 3.4.2, we deduce

$$\begin{aligned}\int_a^b\Big(F_{K,L}(b,a)-F_{K,L}(s,s)\Big)ds &\ge \int_d^c\Big(F_{K,L}(d,c)-F_{K,L}(d,s)\Big)\\ &\ge \frac{1}{2m(K|L)M}\Big(F_{K,L}(d,c)-F_{K,L}(d,d)\Big)^2,\end{aligned}\tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b\Big(F_{K,L}(b,a)-F_{K,L}(s,s)\Big)ds &\ge \int_d^c\Big(F_{K,L}(d,c)-F_{K,L}(d,s)\Big)\\ &\ge \frac{1}{2m(K|L)M}\Big(F_{K,L}(d,c)-F_{K,L}(c,c)\Big)^2.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Therefore, we get :

$$\int_{u_L^{n+1}}^{u_K^{n+1}}\Big(F_{K,L}(u_K^{n+1},u_L^{n+1})-F_{K,L}(s,s)\Big)ds\ge\frac{1}{2m(K|L)M}\max_{u_L^{n+1}\le c\le d\le u_K^{n+1}}\Big(F_{K,L}(d,c)-F_{K,L}(d,d)\Big)^2$$

$$\int_{u_L^{n+1}}^{u_K^{n+1}}\Big(F_{K,L}(u_K^{n+1},u_L^{n+1})-F_{K,L}(s,s)\Big)ds\ge\frac{1}{2m(K|L)M}\max_{u_L^{n+1}\le c\le d\le u_K^{n+1}}\Big(F_{K,L}(d,c)-F_{K,L}(c,c)\Big)^2.$$

Then, we have

$$\begin{aligned}A^{int,1}_{Conv}&\ge\sum_{n=0}^{N}\delta t\sum_{K|L}\frac{1}{4m(K|L)M}\Big[\max_{u_L^{n+1}\le c\le d\le u_K^{n+1}}\Big(F_{K,\sigma}(d,c)-F_{K,\sigma}(d,d)\Big)^2\Big]\\&+\sum_{n=0}^{N}\delta t\sum_{K|L}\frac{1}{4m(K|L)M}\Big[\max_{u_L^{n+1}\le c\le d\le u_K^{n+1}}\Big(F_{K,\sigma}(d,c)-F_{K,\sigma}(c,c)\Big)^2\Big].\end{aligned}\tag{3.36}$$

Recalling the equality $A_{Conv}=A^{ext}_{Conv}+A^{int,1}_{Conv}+A^{int,2}_{Conv}$, we find

$$\begin{aligned}A_{Conv}&\ge\sum_{n=0}^{N}\delta t\sum_{K|L}\frac{1}{4m(K|L)M}\Big[\max_{u_L^{n+1}\le c\le d\le u_K^{n+1}}\Big(F_{K,\sigma}(d,c)-F_{K,\sigma}(d,d)\Big)^2\Big]\\&+\sum_{n=0}^{N}\delta t\sum_{K|L}\frac{1}{4m(K|L)M}\Big[\max_{u_L^{n+1}\le c\le d\le u_K^{n+1}}\Big(F_{K,\sigma}(d,c)-F_{K,\sigma}(c,c)\Big)^2\Big]-2C.\end{aligned}\tag{3.37}$$

Set

$$\begin{aligned}\bar{A}_{Conv}&=\sum_{n=0}^{N}\delta t\sum_{K|L}\frac{1}{4m(K|L)M}\Big[\max_{u_L^{n+1}\le c\le d\le u_K^{n+1}}\Big(F_{K,\sigma}(d,c)-F_{K,\sigma}(d,d)\Big)^2\Big]\\&+\sum_{n=0}^{N}\delta t\sum_{(K,L)\in\mathcal{E}_{int}^{n+1}}\frac{1}{4m(K|L)M}\Big[\max_{u_L^{n+1}\le c\le d\le u_K^{n+1}}\Big(F_{K,\sigma}(d,c)-F_{K,\sigma}(c,c)\Big)^2\Big].\end{aligned}$$

Now, as the equality $A_{Evol} + A_{Conv} + A_{Diff} = 0$ holds and as (3.29) and (3.38) are satisfied, we have $\bar{A}_{Conv} \leq C$.
Moreover, using the Cauchy-Schwarz inequality, we deduce

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K|L} \Big[\max_{u_L^{n+1} \leq c \leq d \leq u_K^{n+1}} \Big(F_{K,\sigma}(d,c) - F_{K,\sigma}(d,d) \Big) \Big] \\
&+ \sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K|L} \Big[\max_{u_L^{n+1} \leq c \leq d \leq u_K^{n+1}} \Big(F_{K,\sigma}(d,c) - F_{K,\sigma}(c,c) \Big) \Big] \\
&\leq \frac{1}{4M} \sqrt{\sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K|L} m(K|L)} \sqrt{\bar{A}_{Conv}}. \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

At the end, take into account the regularity on the mesh (3.2) to deduce that :

$$\sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K|L} m(K|L) \leq T \frac{1}{\alpha} h^{\ell-1} \sum_{K|L} 1 \leq T \frac{1}{\alpha} h^{\ell-1} m(\Omega) \frac{1}{\alpha} h^{-\ell} \leq \frac{C}{h}.$$

□

Lemma 3.4.4. *($L^2(0,T,H^1(\Omega))$ Estimate) Suppose that* (3.2),(3.5)-(3.8) *hold. Let $u_{O,\delta t}$ be the approximate solution of problem (P_1) defined by* (3.10), (3.11), (3.15). *Let $T > 0$, and set $N = \max\{n \in \mathbb{N}, n < \frac{T}{\delta t}\}$. Then there exists $C = C(\|f\|_{L^\infty}, u_{\max}, T) \geq 0$ such that*

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K \in O} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \tau_{K|L} \Big| \phi(u_K^{n+1}) - \phi(u_L^{n+1}) \Big|^2 \leq C. \qquad (3.39)$$

Proof. Multiplying (3.11) by $\delta t \phi(u_K^{n+1})$ and summing over $K \in O$ and $n = 0, ..., N$ yields $B_{Evol} + B_{Conv} + B_{Diff} = 0$ with

$$\begin{aligned}
B_{Evol} &= \sum_{n=0}^{N} \sum_{K \in O} m(K)(u_K^{n+1} - u_K^n)\phi(u_K^{n+1}), \\
B_{Diff} &= -\sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K \in O} \sum_{K|L} \tau_{K|L} \Big(\phi(u_L^{n+1}) - \phi(u_K^{n+1}) \Big) \phi(u_K^{n+1}), \\
B_{Conv} &= \sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K \in O} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}(u_K^{n+1}, u_{K,\sigma}^{n+1}) \phi(u_K^{n+1}).
\end{aligned}$$

Let $\vartheta(r) = \int_0^r \phi(s) ds$. From the convexity inequality, we have :

$$\begin{aligned}
B_{Evol} &\geq \sum_{n=0}^{N} \sum_{K \in O} m(K) \Big(\vartheta(u_K^{n+1}) - \vartheta(u_K^n) \Big) \\
&= \sum_{K \in O} m(K) \Big(\vartheta(u_K^{N+1}) - \vartheta(u_K^0) \Big). \qquad (3.40)
\end{aligned}$$

Further, in the term B_{Diff}, for every edge $K|L$ the terms involving K and L appear twice. Thanks to the conservativity of the scheme, we find

$$B_{Diff} = -\sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K\in\mathcal{O}} \sum_{L\in\mathcal{N}(K)} \tau_{K|L} \Big| \phi(u_K^{n+1}) - \phi(u_L^{n+1}) \Big|^2. \tag{3.41}$$

The term B_{Conv} can be rewritten as

$$B_{Conv} = \sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K\in\mathcal{O}} \sum_{L\in\mathcal{N}(K)} \delta t F_{K,K|L}(u_K^{n+1}, u_L^{n+1}) \Big(\phi(u_L^{n+1}) - \phi(u_K^{n+1}) \Big).$$

Using the weighted Young inequality and (3.9), we deduce

$$\begin{aligned}
|B_{Conv}| &\le \sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K\in\mathcal{O}} \sum_{L\in\mathcal{N}(K)} \frac{d_{K,L}}{2m(K|L)} \Big(F_{K,\sigma}(u_K^{n+1}, u_L^{n+1}) \Big)^2 \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K\in\mathcal{O}} \sum_{L\in\mathcal{N}(K)} \frac{m(K|L)}{d_{K,L}} \Big| \phi(u_K^{n+1}) - \phi(u_L^{n+1}) \Big|^2 \\
&\le C \sum_{L|K} m(\widehat{K|L}) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K\in\mathcal{O}} \sum_{L\in\mathcal{N}(K)} \tau_{K|L} \Big| \phi(u_K^{n+1}) - \phi(u_L^{n+1}) \Big|^2.
\end{aligned}$$

Collecting the previous inequalities, we readily deduce (3.39). This concludes the proof of the Lemma 3.4.4. □

3.4.3 Estimates of space and time translates

Recall the following result.

Theorem 3.4.5. *(*Riesz-Frechet-Kolmogorov) Let an open $Q \subset \mathbb{R}^{\ell+1}$ and let $\omega \subset\subset Q$. Consider $\mathcal{K}$ a bounded set of L^p, with $1 \le p < \infty$. we suppose that : $\forall \epsilon > 0$, there exists $\delta > 0$, $\delta < dist(\omega, \mathbb{R}^{\ell+1} \backslash Q)$ such that $\|f(x+h) - f(x)\|_{L^p(\omega)} \le \epsilon \ \forall h \in \mathbb{R}^{\ell+1}$ with $|h| < \delta$ and $\forall f \in \mathcal{K}$. Then $\mathcal{K}$ is relatively compact in $L^p(\omega)$.

Now, we derive estimates of space and time translates of the function $\phi(u_{\mathcal{O},\delta t})$ which imply that the sequence is relatively compact in $L^2(Q)$.
Notice that because $(\phi(u_{\mathcal{O},\delta t}))_{\mathcal{O},\delta t}$ obey a uniform L^∞ bound, the local compactness in Q is enough to deduce the L^2 compactness.

Lemma 3.4.6. *Let, $u_{\mathcal{O},\delta t}$ be the approximate solution of problem (P_1) defined by* (3.10)*,* (3.11)*. There exists a constant C_1 depending on Ω, T, $|\phi|_{H_O}$ that*

$$\int_0^T \int_{\Omega_\eta} \Big| \phi(u_{\mathcal{O},\delta t}(t, x+\eta)) - \phi(u_{\mathcal{O},\delta t}(t,x)) \Big|^2 dx dt \le C_1 |\eta| \tag{3.42}$$

for all $\eta \in \mathbb{R}^l$, *where* $\Omega_\eta = \left\{x \in \Omega, [x+\eta, x] \subset \Omega\right\}$ *and there exists* C_2 *depending on* Ω, T, ϕ, f *such that*

$$\forall \tau > 0, \quad \int_0^{T-\tau} \int_\Omega \left|\phi(u_{\mathcal{O},\delta t}(t+\tau, x)) - \phi(u_{\mathcal{O},\delta t}(t, x))\right|^2 dxdt \leq C_2 \tau \tag{3.43}$$

for all $\tau \in (0, T)$.

Proof. • First, we prove (3.42)
Let $\eta \in \mathbb{R}^l$ with $\eta \neq 0$ and set $\Omega_\eta = \left\{x \in \Omega, [x+\eta, x] \subset \Omega\right\}$. For all $K \in \mathcal{O}$ and $\sigma \in \varepsilon_K$, define $\chi_\sigma : \Omega_\eta \times \Omega_\eta \longrightarrow \{0, 1\}$ by $\chi_\sigma(x, y) = 1$ if $[x, y] \cap \sigma \neq \emptyset$ else $\chi_\sigma(x, y) = 0$. One has

$$\left|\phi(u_{\mathcal{O},\delta t}(t, x+\eta)) - \phi(u_{\mathcal{O},\delta t}(t, x))\right| \leq \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \chi_{K|L}(x, x+\eta) |D_{K|L}\phi|; \quad \text{for a.e. } x \in \Omega_\eta \tag{3.44}$$

where $D_{K|L}\phi$ is defined as

$$D_{K|L}\phi = |\phi(u_K^{n+1}) - \phi(u_L^{n+1})|.$$

We integrate (3.44) over Ω_η, and get :

$$\int_{\Omega_\eta} \left|\phi(u_{\mathcal{O},\delta t}(t, x+\eta)) - \phi(u_{\mathcal{O},\delta t}(t, x))\right| dx \leq \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\Omega_\eta} \chi_{K|L}(x, x+\eta) |D_{K|L}\phi| dx. \tag{3.45}$$

Remark that, for all $\sigma = K|L \in \varepsilon_K$, $\int_{\Omega_\eta} \chi_{K|L}(x, x+\eta) dx$ is the measure of the set of points of Ω which are located inside the cylinder whose basis is $K|L$ and generator vector is $-\eta$. Thus

$$\int_{\Omega_\eta} \chi_{K|L}(x, x+\eta) dx \leq m(K|L)|\eta|. \tag{3.46}$$

The relation (3.45) gives

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\eta} \left|\phi(u_{\mathcal{O},\delta t}(t, x+\eta)) - \phi(u_{\mathcal{O},\delta t}(t, x))\right| dx &\leq |\eta| \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} m(K|L) |D_{K|L}\phi| \\ &\leq |\eta| \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} m(K|L) |D_{K|L}\phi|. \end{aligned} \tag{3.47}$$

From now, integrate (3.47) over $[0, T]$

$$\int_0^T \int_{\Omega_\eta} \left|\phi(u_{\mathcal{O},\delta t}(t, x+\eta)) - \phi(u_{\mathcal{O},\delta t}(t, x))\right| dxdt \leq |\eta| \sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} m(K|L) d_{K,L} \left|\frac{D_{K|L}\phi}{d_{K,L}}\right|. \tag{3.48}$$

Remark that :

$$\left\|\phi(u_{\mathcal{O},\delta t}(t, x+\eta)) - \phi(u_{\mathcal{O},\delta t}(t, x))\right\|_{L^2(Q_\eta)}^2 \leq 2\|\phi\|_{L^\infty} \left\|\phi(u_{\mathcal{O},\delta t}(t, x+\eta)) - \phi(u_{\mathcal{O},\delta t}(t, x))\right\|_{L^1(Q_\eta)}. \tag{3.49}$$

Then (3.48) and (3.50) give

$$\int_0^T \int_{\Omega_\eta} \left|\phi(u_{\mathcal{O},\delta t}(t, x+\eta)) - \phi(u_{\mathcal{O},\delta t}(t, x))\right|^2 dxdt \leq C_1 |\eta|. \tag{3.50}$$

• Finally, we prove (3.43).
Let $\tau \in (0,T)$ and $t \in (0, t-\tau)$. Set $n_0 = [t/\delta t]$ and $n_1 = [(t+\tau)/\delta t]$, let

$$I^{t,\tau} = \{n \in \mathbb{N}, \text{ such that } t < (n+1)\delta t \leq t+\tau\}$$
$$J^{t,\tau} = \{n \in \mathbb{N}, \text{ such that } (n+1)\delta t - \tau \leq t < (n+1)\delta t\}.$$

Since ϕ is Locally continuous with constant $\phi_{Lip} = \sup_{0<a<b\leq u_{\max}} \frac{\phi(a)-\phi(b)}{a-b}$, one has :

$$\int_0^{T-\tau} \int_\Omega \Big|\phi(u_{O,\delta t}(t+\tau,x)) - \phi(u_{O,\delta t}(t,x))\Big|^2 dxdt \leq \phi_{Lip} \int_0^{T-\tau} S(t)dt \tag{3.51}$$

where, for almost every $t \in (0, T-\tau)$

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_\Omega \Big(\phi(u_{O,\delta t}(t+\tau,x)) - \phi(u_{O,\delta t}(t,x))\Big)\Big(u_{O,\delta t}(t+\tau,x) - u_{O,\delta t}(t,x))\Big)dxdxdt \\ &= \sum_{K\in O} m(K)\Big(\phi(u_K^{n_1}) - \phi(u_K^{n_0})\Big)\Big(u_K^{n_1} - u_K^{n_0}\Big) \\ &= \sum_{K\in O}\Big(\phi(u_K^{n_1}) - \phi(u_K^{n_0})\Big) \sum_{I^{t,\tau}} m(K)\Big(u_K^{n+1} - u_K^n\Big). \end{aligned}$$

Use (3.11) and gather by edges. We get

$$\begin{aligned} S(t) &= \sum_{K\in O}\Big(\phi(u_K^{n_1}) - \phi(u_K^{n_0})\Big) \sum_{I^{t,\tau}} \delta t\Big[\sum_{L\in\mathcal{N}(K)} \frac{m(K|L)}{d_{K,L}}\Big(\phi(u_L^{n+1}) - \phi(u_K^{n+1})\Big) - F_{K,L}(u_K^{n+1}, u_L^{n+1})\Big] \\ &= \sum_{I^{t,\tau}} \delta t \sum_{K|L} \frac{m(K|L)}{d_{K,L}}\Big(\phi(u_K^{n_1}) - \phi(u_L^{n_1}) - \phi(u_K^{n_0}) + \phi(u_L^{n_0})\Big)\Big(\phi(u_L^{n+1}) - \phi(u_K^{n+1})\Big) \\ &+ \sum_{I^{t,\tau}} \delta t \sum_{K|L}\Big(\phi(u_K^{n_1}) - \phi(u_L^{n_1}) - \phi(u_K^{n_0}) + \phi(u_L^{n_0})\Big)F_{K,L}(u_L^{n+1}, u_K^{n+1}). \end{aligned}$$

We can then use the inequality $2ab \leq a^2 + b^2$. We get $S(t) \leq \frac{1}{2}S_0(t) + \frac{1}{2}S_1(t) + S_2(t) + S_3(t) + S_4$ with :

$$\begin{aligned} S_0(t) &= \sum_{I^{t,\tau}} \delta t \sum_{K|L} \frac{m(K|L)}{d_{K,L}}\Big(\phi(u_K^{n_0}) - \phi(u_L^{n_0})\Big)^2 \\ S_1(t) &= \sum_{I^{t,\tau}} \delta t \sum_{K|L} \frac{m(K|L)}{d_{K,L}}\Big(\phi(u_K^{n_1}) - \phi(u_L^{n_1})\Big)^2 \\ S_2(t) &= \sum_{I^{t,\tau}} \delta t \sum_{K|L} \frac{m(K|L)}{d_{K,L}}\Big(\phi(u_K^{n+1}) - \phi(u_L^{n+1})\Big)^2 \\ S_3(t) &= \sum_{I^{t,\tau}} \delta t \sum_{K|L}\Big(\phi(u_K^{n_1}) - \phi(u_L^{n_1})\Big)F_{K,L}(u_L^{n+1}, u_K^{n+1}) \\ S_4(t) &= \sum_{I^{t,\tau}} \delta t \sum_{K|L}\Big(\phi(u_L^{n_0}) - \phi(u_K^{n_0})\Big)F_{K,L}(u_L^{n+1}, u_K^{n+1}). \end{aligned}$$

We introduce the function χ^t such that $\chi^t(1) = 1$ and $\chi^t(0) = 0$. We have, for all $t \in \mathbb{R}^+$ and $n \in \mathbb{N}$, $\chi^t(I^{t,\tau}) = \chi^t(J^{t,\tau})$. Therefore

$$\begin{aligned}\int_0^{T-\tau} S_0(t)dt &\leq \sum_{n=0}^{[T/\delta t]} \delta t \sum_{K|L} \frac{m(K|L)}{d_{K,L}}\Big(\phi(u_K^{n_0}) - \phi(u_L^{n_0})\Big)^2 \int_{n_0\delta t}^{(n_0+n)\delta t+\tau} \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi^t(I^{t,\tau})dt \\ &\leq \sum_{n=0}^{[T/\delta t]} \delta t \sum_{K|L} m(K|L)d_{K,L}\left|\frac{\phi(u_K^{n_0}) - \phi(u_L^{n_0})}{d_{K,L}}\right|^2 \int_{n_0\delta t}^{(n_0+n)\delta t+\tau} \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi^t(I^{t,\tau})dt \\ &\leq \sum_{n=0}^{[T/\delta t]} \delta t \sum_{K|L} \ell m(\widehat{K|L})\left|\frac{\phi(u_K^{n_0}) - \phi(u_L^{n_0})}{d_{K,L}}\right|^2 \int_{n_0\delta t}^{(n_0+n)\delta t+\tau} \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi^t(I^{t,\tau})dt. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Notice the following property :

$$\int_{n_0\delta t}^{(n_0+1)\delta t} \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi^t(J^{t,\tau})dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{(n_0-n-1)\delta t+\tau}^{(n_0-n)\delta t+\tau} \chi^t(0 \leq t < \tau)dt = \tau. \tag{3.53}$$

Using (3.39), we find :

$$\int_0^{T-\tau} S_0(t)dt \leq C\tau. \tag{3.54}$$

We get in the same way

$$\int_0^{T-\tau} S_1(t)dt \leq C\tau. \tag{3.55}$$

We now turn to the study of the third term :

$$\begin{aligned}\int_0^{T-\tau} S_2(t)dt &\leq \sum_{n=0}^{[T/\delta t]} \delta t \sum_{K|L} \frac{m(K|L)}{d_{K,L}}\Big(\phi(u_K^{n+1}) - \phi(u_L^{n+1})\Big)^2 \int_0^{T-\tau} \chi^t(J^{t,\tau})dt \\ &\leq \sum_{n=0}^{[T/\delta t]} \delta t \sum_{K|L} \ell m(\widehat{K|L})\left|\frac{\phi(u_K^{n+1}) - \phi(u_L^{n+1})}{d_{K,L}}\right|^2 \int_{n_0\delta t}^{(n_0+n)\delta t+\tau} \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi^t(J^{t,\tau})dt. \end{aligned}$$

Because

$$\int_0^{T-\tau} \chi^t(J^{t,\tau})dt = \min(T-\tau, (n+1)\delta t) - \max(0, (n+1)\delta t - \tau) \leq \tau,$$

we get

$$\int_0^{T-\tau} S_2(t)dt \leq C\tau. \tag{3.56}$$

Recall that due to (3.9)

$$\left|\frac{F_{K,L}(a,b)}{m(K|L)}\right| \leq (\|f\|_{L^\infty} + M). \tag{3.57}$$

We have in the same way

$$\begin{aligned}\int_0^{T-\tau} S_3(t)dt &\leq \sum_{n=0}^{[T/\delta t]} \delta t \sum_{K|L}\Big(\phi(u_K^{n_1}) - \phi(u_L^{n_1})\Big)F_{K,L}(u_L^{n+1}, u_K^{n+1}) \int_0^{T-\tau} \chi^t(J_n^{t,\tau})dt \\ &\leq \sum_{n=0}^{[T/\delta t]} \delta t \sum_{K|L} m(K|L)d_{K,L}\left|\frac{\phi(u_K^{n_1}) - \phi(u_L^{n_1})}{d_{K,L}}\right|\left|\frac{F_{K,L}(u_L^{n+1}, u_K^{n+1})}{m(K|L)}\right|\tau \\ &\leq \Big((\|f\|_{L^\infty} + M)\sqrt{Tm(\Omega)}|\phi(u)|_{H_O}\Big)\tau. \end{aligned} \tag{3.58}$$

In the same way we prove :

$$\int_0^{T-\tau} S_4(t)dt \leq \Big((\|f\|_{L^\infty} + M)\sqrt{Tm(\Omega)}|\phi(u)|_{H_O}\Big)\tau. \tag{3.59}$$

From (3.54), (3.55), (3.56), (3.58) and (3.59), we get :

$$\int_0^{T-\tau}\int_\Omega |\phi(u_{O,\delta t}(t+\tau, x)) - \phi(u_{O,\delta t}(t, x))|^2 dxdt \leq C_2\tau. \tag{3.60}$$

□

3.4.4 Existence of a discrete solution

The proof of existence for the scheme (3.10), (3.11) is obtained by applying the Leray-Schauder topological degree theorem. The idea is to modify continuously the scheme to obtain a system which admits a solution and if the modification preserves in the same time the estimates (in our case this can get easily by the L^∞ norm on $u_{O,\delta t}$), then the scheme also has a solution.

Definition 3.4.7. *Let E be a real Banach space. We denote by $\mathcal{A}$ the set of $(Id-g, B, y)$ where $g : \bar{B} \longrightarrow E$ is a compact with $B \subset E$ and $y \in E$ such that $y \notin \{g(x), x \in \partial B\}$.*

Theorem 3.4.8. *(Leray, Schauder) Let E a real Banach space. Consider $\mathcal{A}$ in the sense of Definition* 3.4.7. *There exist an application degree $: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{Z}$ called topological degree, which satisfies :*
• *$degree(Id, B, y) = 1$ if $y \in B$.*
• *$degree(Id - g, B, y) = degree(Id, B_1, y) + degree(Id, B_2, y)$ if $B_1 \cup B_2 \subset B$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ and $y \notin \{x - g(x), x \in \bar{B}\backslash B_1 \cup B_2\}$.*
• *If $h : [0,1] \times \bar{B} \longrightarrow E$ is compact, $y \in C([0,1]; E)$ and $y(\lambda) \notin \{x - h(t, x), x \in B\}$ (for all $\lambda \in [0,1]$), then $degree(Id - h(\lambda, .), B, y(\lambda)) = degree(Id - h(0, .), B, y(0))$ for all $\lambda \in [0,1]$.*

Lemma 3.4.9. *Suppose* (H1) *is satisfied. Then for all $K \in \mathcal{O}$, there exist u_K^{n+1} satisfying* (3.17).

Proof. For the proof, we consider for every $\alpha \in [0,1]$ the following problem :

$$\begin{cases} v_K - \alpha\Big[u_K^0 - \frac{\delta t}{m(K)}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}(v_K, v_{K,\sigma}) + \frac{\delta t}{m(K)}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K}\tau_{K,\sigma}\Big(\phi(v_{K,\sigma}) - \phi(v_K)\Big)\Big] = 0 \\ \forall K \in \mathcal{O}, \end{cases}$$

with notation analogous to that of (3.11).
We consider the continuous function $\mathcal{F}$ with respect to each of its variables defined by :

$$\mathcal{F}(\alpha, v) = v_K - \alpha\Big[u_K^0 - \frac{\delta t}{m(K)} \sum_{\sigma\in\bar{\mathcal{E}}_K} F_{K,\sigma}(v_K, v_{K,\sigma}) + \frac{\delta t}{m(K)} \sum_{\sigma\in\bar{\mathcal{E}}_K} \tau_{K,\sigma}\Big(\phi(v_{K,\sigma}) - \phi(v_K)\Big)\Big]. \tag{3.61}$$

The function $\mathcal{F}(\alpha, .)$ is a continuous homotopy between $\mathcal{F}(0, .)$ and $\mathcal{F}(1, .)$. First, remark that $u_K^{n+1} = 0$ is solution of $\mathcal{F}(0, u_K^{n+1}) = 0$ for all $(n, K) \in [0, N] \times \mathcal{O}$. If B is a ball with a sufficiently large radius in the space of solution of the system, the equation $\mathcal{F}(., .) = 0$ has no solution on the boundary ∂B. Indeed replacing u_0, f, ϕ by αu_0, αf, $\alpha\phi$ we can apply the argument of Proposition 3.4.1 to solutions of equation $\mathcal{F}(\alpha, v) = 0$. Then it is enough to supply the finite dimensional set $\mathbb{R}^\theta$ of discrete functions by the norm $\|\cdot\|_{L^\infty}$ and take B of radius larger than $u_{\max}$. Therefore, we can apply Theorem 3.4.8. We get :

$$degree(\mathcal{F}(0, .), B) = degree(\mathcal{F}(1, .), B) \neq 0. \tag{3.62}$$

Thus there exists at least a solution to equation $\mathcal{F}(1, .) = 0$. This solution is a solution to our scheme. □

3.5 Continuous entropy inequality

We prove in this section that the approximate solutions fulfill a continuous entropy inequality in the sense of Theorem 3.5.2 below. Before, we recall a result that will serve us in the proof of this Theorem.

Lemma 3.5.1. *(see e.g.* J. Droniou [35]) Let K be a non empty open convex polygonal set in $\mathbb{R}^\ell$. For $\sigma \in \bar{\varepsilon}_K$, we denote by x_σ the center of gravity of σ ; we also denote by $n_{K,\sigma}$ the unit normal vector to σ outward to K. Then, for all vector $\vec{V} \in \mathbb{R}^\ell$ and for all point $x_K \in K$, we have :

$$m(K)\vec{V} = \sum_{\sigma\in\bar{\mathcal{E}}_K} m(\sigma)\vec{V}.n_{K,\sigma}(x_\sigma - x_K). \tag{3.63}$$

Proof. We denote by a superscript i, the $i-$ th coordinate of vectors and points in $\mathbb{R}^\ell$. By Stokes formula, we have :

$$\begin{aligned} m(K)V^i = \int_K \mathrm{div}((x^i - x_K^i)\vec{V})dx &= \int_{\partial K} (x^i - x_K^i)\vec{V}.n_K d\gamma(x) \\ &= \sum_{\sigma\in\bar{\mathcal{E}}_K} \int_\sigma (x^i - x_K^i)\vec{V}.n_{K,\sigma} d\gamma(x). \end{aligned} \tag{3.64}$$

Hence, by the definition of the center of gravity, we have :

$$\int_\sigma (x^i - x_K^i)d\gamma(x) = \int_\sigma x^i d\gamma(x) - m(\sigma)x_K^i = m(\sigma)x_\sigma^i - m(\sigma)x_K^i. \tag{3.65}$$

Remplace (3.65) in (3.64) ; we find (3.63). □

From now on, as the approximate solutions satisfy the discrete entropy inequalities (3.23), we prove that its satisfies a continuous form of these inequalities.

Theorem 3.5.2. *Assume that* (3.1), (3.5)-(3.8) *hold. Let $u_{O,\delta t}$ be the approximate solution of the problem* (P_1) *defined by* (3.10),(3.11). *Then the following continuous approximate entropy inequalities hold : for all $k \in [0, u_{\max}]$, for all $\xi \in C^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^\ell)$, $\xi \geq 0$,*

$$\int_0^T\int_\Omega \Big\{\eta_k(u_{O,\delta t})\xi_t + \Big(\Phi_k(u_{O,\delta t}) - \nabla_O\eta_{\phi(k)}(\phi(u_{O,\delta t}))\Big).\nabla\xi\Big\}\,dxdt$$
$$+ \int_\Omega \eta_k(u_0)\xi(0,x)dx + \int_0^T\int_{\partial\Omega} |f(k).\eta(x)|\,\xi(t,x)d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)dt \geq -\upsilon_{O,n}(\xi); \tag{3.66}$$

where : $\forall\xi \in C^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^\ell)$, $\upsilon_{O,n}(\xi) \to 0$ when $h \to 0$. Here

$$\nabla_O\eta_{\phi(k)}(\phi(u_{O,\delta t})) = \sum_{n=0}^{N} 1_{[t_n,t_{n+1}]} \sum_{K|L} 1_{\widehat{K|L}}\nabla_{\widehat{K|L}}\eta_{\phi(k)}(\phi(u_{O,\delta t})).$$

Remark 3.5.3. *In the same case, if we replace in* (3.66) η_k *by η_k^+ (resp η_k^-) and $|f(k).\eta(x)|$ by $(f(k).\eta(x))^+$ (resp $(f(k).\eta(x))^-$) we obtain sub entropy inequalities (resp super entropy inequalities). Obviously, the approximate solution $u_{O,\delta t}$ is an approximate entropy solution if and only if $u_{O,\delta t}$ is approximate entropy sub-solution and entropy super-solution simultaneously.*

Proof of Theorem 3.5.2. Let $\xi \in C^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^l)^+$ and $k \in [0, u_{\max}]$, we fix $T \geq 0$ and set $N = \frac{T}{\delta t} + 1$. It is enough to suppose that $\xi(t,x) = \theta(t)\zeta(x)$, this mean that $\xi_K^{n+1} = \theta^{n+1}\zeta_K$. By density in $C^\infty([0,T[\times\mathbb{R}^\ell)$ of linear combinations of such functions, the general case will follow. Depending on the circumstances, $\zeta_K = \fint_K \zeta$ or $\zeta_K = \zeta(x_K)$ with x_K the center of control volume K.
Multiplying inequality (3.23) by $\delta t\xi_K^{n+1}$ and summing over $K \in O$ and $n \in \{0,...,N\}$, yields the inequality $I_{Evol}^{Disc} + I_{Conv}^{Disc} + I_{Diff}^{Disc} \leq 0$, where :

$$I_{Evol}^{Disc} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{K\in O} m(K)\Big(\eta_k(u_K^{n+1}) - \eta_k(u_K^n)\Big)\xi_K^{n+1}, \tag{3.67}$$

$$I_{Conv}^{Disc} = \sum_{n=0}^{N}\delta t\sum_{K\in O}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K}\Phi_{K,\sigma,k}(u_K^{n+1},u_{K,\sigma}^{n+1})\xi_K^{n+1}$$
$$- \sum_{n=0}^{N}\delta t\sum_{K\in O}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K^{ext}} sign(u_K^{n+1}-k)F_{K,\sigma,k}(k,k)\xi_K^{n+1}, \tag{3.68}$$

$$I_{Diff}^{Disc} = -\sum_{n=0}^{N}\delta t\sum_{K\in O}\sum_{K|L}\tau_{K|L}\Big(\eta_{\phi(k)}(\phi(u_L^{n+1})) - \eta_{\phi(k)}(\phi(u_K^{n+1}))\Big)\xi_K^{n+1}. \tag{3.69}$$

To prove inequality (3.66), we have to prove that $I_{Evol}^{Cont} + I_{Conv}^{Cont} + I_{Diff}^{Cont} \leq \upsilon_{O,n}(\xi)$ where I_{Evol}^{Cont}, I_{Conv}^{Cont} and I_{Diff}^{Cont} are defined by :

$$I_{Evol}^{Cont} = -\int_0^T\int_\Omega \eta_k(u_{O,\delta t})\zeta(x)\theta_t(t)dxdt - \int_\Omega \eta_k(u_0)\theta(0)\zeta(x)dx,$$
$$I_{Conv}^{Cont} = -\int_0^T \theta\int_\Omega \Phi_k(u_{O,\delta t}).\nabla\zeta dxdt - \int_0^T\theta\int_{\partial\Omega}|f(k).\eta(x)|\,\zeta(x)d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)dt,$$
$$I_{Diff}^{Cont} = \int_0^T\theta\int_\Omega \nabla_O\eta_{\phi(k)}(\phi(u_{O,\delta t})).\nabla\zeta dxdt.$$

Then, we have to compare I_{Evol}^{Disc} with I_{Evol}^{Cont} ; I_{Conv}^{Dicr} with I_{Conv}^{Cont} ; and I_{Diff}^{Disc} with I_{Diff}^{Cont}.
Firstly, we have to estimate $|I_{Evol}^{Disc} - I_{Evol}^{Cont}|$. Using the definition of $u_{O,\delta t}$, the quantity I_{Evol}^{Disc} reads :

$$\begin{aligned}
I_{Evol}^{Disc} &= -\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{K\in O} m(K)\eta_k(u_K^{n+1})\Big(\xi_K^{n+1}-\xi_K^n\Big) - \sum_{K\in O} m(K)\Big(\eta_k(u_K^0)\xi_K^1 - \eta_k(u_K^{N+1})\xi_K^{N+1}\Big)\\
&= -\sum_{n=0}^{N-1}\delta t\sum_{K\in O} m(K)\eta_k(u_K^{n+1})\frac{\xi_K^{n+1}-\xi_K^n}{\delta t} - \sum_{K\in O} m(K)\eta_k(u_K^0)\xi_K^1\\
&= -\sum_{n=0}^{N-1}\delta t\sum_{K\in O} m(K)\eta_k(u_K^{n+1})\frac{\theta^{n+1}-\theta^n}{\delta t}\zeta_K - \sum_{K\in O} m(K)\eta_k(u_K^0)\theta^1\zeta_K\\
&= -\sum_{n=0}^{N-1}\delta t\sum_{K\in O} m(K)\eta_k(u_K^{n+1})(\theta^n)_t \fint_K \zeta(x)dx - \sum_{K\in O} m(K)\eta_k(u_K^0)\theta^1\fint_K\zeta(x)dx, \qquad (3.70)
\end{aligned}$$

with $(\theta^n)_t = \displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1}} \theta_t dt$. We deduce that

$$|I_{Evol}^{Disc} - I_{Evol}^{Cont}| \le \upsilon_{O,k}^1(\xi) + \upsilon_{O,k}^2(\xi), \qquad (3.71)$$

where :

$$\upsilon_{O,k}^1(\xi) = \sum_{n=1}^{N-1}\delta t\sum_{K\in O} m(K)\eta_k(u_{O,\delta t})\mathbf{1}_K\mathbf{1}_{[t_n,t_{n+1}]}(\theta^n)_t\left|\fint_K\zeta(x)dx-\zeta_K\right|, \qquad (3.72)$$

$$\upsilon_{O,k}^2(\xi) = \sum_{K\in O} m(K)\eta_k(u_K^0)\theta^1\left|\fint_K\zeta(x)dx-\zeta_K\right|. \qquad (3.73)$$

As $\xi \in C^\infty$, then we have :

$$\left|\fint_K\zeta(x)dx-\zeta_K\right| \le \|\zeta\|_{C^1}h. \qquad (3.74)$$

Then, the quantities $\upsilon_{O,k}^1(\xi)$, $\upsilon_{O,k}^2(\xi)$, tend to zero when $h \to 0$.
Secondly, we study the difference between I_{Conv}^{Disc} and I_{Conv}^{Cont}. We take care separately of what happens inside and what happens on the boundary of Ω. Therefore we write I_{Conv}^{Cont} has the sum of $I_{Conv}^{Cont,int}$, and $I_{Conv}^{Cont,ext}$.

$$\begin{aligned}
I_{Conv}^{Cont,int} &= -\int_0^T \theta\int_\Omega \Phi_k(u_{O,\delta t}).\nabla\zeta dxdt\\
I_{Conv}^{Cont,ext} &= -\int_0^T \theta\int_{\partial\Omega} |f(k).\eta(x)|\,\zeta(x)d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)dt. \qquad (3.75)
\end{aligned}$$

Further, introduce auxiliary values $(\zeta_{K|L})_{L\in\mathcal{N}(K)}$ by $\zeta_{K|L} = \zeta(x_{K|L})$, where $x_{K|L}$ is the barycenter of $K|L$.

The term I_{Conv}^{Disc}, which can be rewritten as the sum between $I_{Conv}^{Disc,int}$ and $I_{Conv}^{Disc,ext}$:

$$\begin{aligned}
I_{Conv}^{Disc,int} &= \sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{\sigma \in K|L} \Phi_{K,K|L,k}(u_K^{n+1}, u_L^{n+1})\Big[(\xi_K^{n+1} - \xi_{K|L}^{n+1}) - (\xi_L^{n+1} - \xi_{K|L}^{n+1})\Big] \\
&= \sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K \in \mathcal{O}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \Phi_{K,K|L,k}(u_K^{n+1}, u_L^{n+1})(\xi_K^{n+1} - \xi_{K|L}^{n+1}) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \theta^{n+1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{O}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \Phi_{K,K|L,k}(u_K^{n+1}, u_L^{n+1})(\zeta_K - \zeta_{K|L}) \\
&= -\sum_{n=0}^{N} \theta^{n+1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{O}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \Phi_{K,K|L,k}(u_K^{n+1}, u_L^{n+1})(\zeta_{K|L} - \zeta_K). \qquad (3.76)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{Conv}^{Disc,ext} &= -\sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K \in \mathcal{O}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K^{ext}} sign(u_K^{n+1} - k) F_{K,\sigma}(k,k) \xi_K^{n+1} \\
&= -\sum_{n=0}^{N} \theta^{n+1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{O}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K^{ext}} sign(u_K^{n+1} - k) F_{K,\sigma}(k,k) \zeta_K. \qquad (3.77)
\end{aligned}$$

Now, we compare $I_{Conv}^{Cont,int}$ and $I_{Conv}^{Disc,int}$. As the numerical fluxes, the numerical entropy fluxes are consistent :

$$\Phi_{K,\sigma,k}(u_K^{n+1}, u_K^{n+1}) = \int_{\sigma} \Phi_k(u_K^{n+1}).n_{K,\sigma} d\gamma(x) dt = m(K|L)\Phi_k(u_K^{n+1}).n_{K|L}.$$

Simultaneously, for each $K \in \mathcal{O}$, we approach ζ by the affine function $\tilde{\zeta}_K$ in a neighborhood of K, with $\tilde{\zeta}_K = \tilde{\zeta}(x_K)$, we set $\tilde{\zeta}_{K|L} = \tilde{\zeta}(x_{K|L})$. Then

$$\begin{aligned}
&\zeta(x)1_K = \tilde{\zeta}_K + \underline{o}(|x - x_K|^2); \quad \zeta_{K|L} - \tilde{\zeta}_{K|L} = \underline{o}(h^2); \quad \nabla\tilde{\zeta}_K = \text{ cst on } K \\
&\|\nabla\zeta - \nabla\tilde{\zeta}\|_{L^\infty(K)} = \underline{o}(h) \text{ and } \nabla\tilde{\zeta}_K.(x_K - x_{K|L}) = \tilde{\zeta}_K - \tilde{\zeta}_{K|L}. \qquad (3.78)
\end{aligned}$$

We denote the resulting expression by $\tilde{I}_{Conv}^{Disc,int}$, we have

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_{Conv}^{Disc,int} &= -\sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K \in \mathcal{O}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \Phi_{K,K|L,k}(u_K^{n+1}, u_K^{n+1})(\tilde{\xi}_{K|L}^{n+1} - \tilde{\xi}_K^{n+1}) \\
&= -\sum_{n=0}^{N} \delta t \sum_{K \in \mathcal{O}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} m(K|L)\Phi_k(u_K^{n+1}).n_{K|L}(\tilde{\xi}_{K|L}^{n+1} - \tilde{\xi}_K^{n+1}) \\
&= -\sum_{n=0}^{N} \delta t \theta^{n+1} \sum_{K \in \mathcal{O}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} m(K|L)\Phi_k(u_K^{n+1}).n_{K|L}(\tilde{\zeta}_{K|L} - \tilde{\zeta}_K) \\
&= -\sum_{n=0}^{N} \delta t \theta^{n+1} \sum_{K \in \mathcal{O}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} m(K|L)\Phi_k(u_K^{n+1}).n_{K|L}\nabla\tilde{\zeta}_K.(x_{K|L} - x_K) \\
&= -\sum_{n=0}^{N} \delta t \theta^{n+1} \sum_{K \in \mathcal{O}} \Phi_k(u_K^{n+1}). \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} m(K|L)\nabla\tilde{\zeta}_K.(x_{K|L} - x_K)n_{K|L}.
\end{aligned}$$

From now, using Lemma 3.5.1, which states that

$$\sum_{K|L} m(K|L)\nabla\tilde{\zeta}_K.n_{K|L}(x_{K|L}-x_K) = m(K)\nabla\tilde{\zeta}_K, \tag{3.79}$$

we find :

$$\tilde{I}_{Conv}^{Disc,int} = -\sum_{n=0}^{N}\delta t\theta^{n+1}\sum_{K\in O}\Phi_k(u_K^{n+1})m(K)\nabla\tilde{\zeta}_K.$$

It is easy to see that

$$\tilde{I}_{Conv}^{Disc,int} = -\int_0^T\theta\int_\Omega\Phi_k(u_{O,\delta t}).\nabla\tilde{\zeta}_K dxdt =: \bar{I}_{Conv}^{Disc,int}$$

$$\begin{aligned}|I_{Conv}^{Disc,int} - I_{Conv}^{Cont,int}| \leq & |I_{Conv}^{Disc,int} - \tilde{I}_{Conv}^{Disc,int}| + |\bar{I}_{Conv}^{Disc,int} - I_{Conv}^{Cont,int}| \\ & = \upsilon_{O,k}^3(\xi) + \upsilon_{O,k}^4(\xi)\end{aligned} \tag{3.80}$$

with :

$$\begin{aligned}\upsilon_{O,k}^3(\xi) &= \sum_{n=0}^{N}\delta t\theta^{n+1}\sum_{K|L}\left|\Big(\Phi_{K,L,k}(u_K^{n+1},u_K^{n+1}) - \Phi_{K,L,k}(u_K^{n+1},u_L^{n+1})\Big)\Big(\zeta_K - \zeta_{K|L}\Big)\right|; \\ \upsilon_{O,k}^4(\xi) &= \int_0^T\theta\int_\Omega\Phi_k(u_{O,\delta t}).|\nabla\zeta - \nabla\tilde{\zeta}_K|dxdt.\end{aligned} \tag{3.81}$$

Let us show that $\upsilon_{O,k}^3(\xi)$ and $\upsilon_{O,k}^4(\xi)$ tend to zero as $h\to 0$. Thanks to (3.78), $\upsilon_{O,k}^4(\xi)$ as $h\to 0$. Now, we write :

$$\xi(t,x) - \hat{\xi}_{K|L}^{n+1} = \frac{1}{\delta t m(K|L)}\int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t}\int_{K|L}(\xi(t,x)-\xi(s,y))d\gamma(y)ds. \tag{3.82}$$

For all $(x,y)\in K|L\times K|L$,

$$|\zeta(x)-\zeta(y)| \leq h\|\nabla\zeta\|_{L^\infty}. \tag{3.83}$$

We exploit the BV-weak estimates on space derivatives to prove that $\upsilon_{O,k}^3(\xi)$ tend to zero when h goes to zero. Indeed, we have

$$|\Phi_{K,L,k}(u_K^{n+1},u_K^{n+1}) - \Phi_{K,L,k}(u_K^{n+1},u_L^{n+1})| \leq \max_{u_L^{n+1}\leq c\leq d\leq u_K^{n+1}}(F_{K,\sigma}(d,c) - (F_{K,\sigma}(d,d))$$

and thanks to (3.83), we get an estimate on the difference between the average value of ζ and a control volume and on one of its edges : there exists C_ζ depending only upon ζ, such that

$$\forall K|L,\ \ |\zeta_K - \zeta_{K|L}^{n+1}| \leq C_\zeta h.$$

Therefore, the following estimate on $\upsilon^3_{O,k}(\xi)$ holds :

$$\begin{aligned}\upsilon^3_{O,k}(\zeta) &= C_\zeta(h)\sum_{n=0}^{N}\delta t\sum_{K|L}\Big[\max_{u_L^{n+1}\le c\le d\le u_K^{n+1}}(F_{K,\sigma}(d,c)-F_{K,\sigma}(d,d))\Big]\\ &+ C_\zeta(h)\sum_{n=0}^{N}\delta t\sum_{K|L}\Big[\max_{u_L^{n+1}\le c\le d\le u_K^{n+1}}(F_{K,\sigma}(d,c)-F_{K,\sigma}(c,c))\Big]\\ &\le C_\zeta\frac{h}{\sqrt{h}}\end{aligned}$$

where the constant C_ξ is given by (3.27). Now, it remains to notice that

$$\begin{aligned}-I^{Disc,ext}_{Conv} &= \sum_{n=0}^{N}\theta^{n+1}\delta t\sum_{K\in O}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K^{ext}} sign(u_K^{n+1}-k)F_{K,\sigma}(k,k)\zeta_K\\ &\le \sum_{n=0}^{N}\theta^{n+1}\delta t\sum_{K\in O}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K^{ext}}|F_{K,\sigma}(k,k)|\zeta_K = -I^{Cont,ext}_{Conv}.\end{aligned}\tag{3.84}$$

Then, we have :

$$I^{Cont,ext}_{Conv} - I^{Disc,ext}_{Conv}\le 0.\tag{3.85}$$

The last step is to compare $I^{Cont,ext}_{Diff}$ to $I^{Disc,ext}_{Diff}$. We rewrite the term I^{Disc}_{Diff} as

$$\begin{aligned}I^{Disc}_{Diff} &= -\sum_{n=0}^{N}\delta t\sum_{\sigma\in K|L}\tau_{K|L}\Big(\eta_{\phi(k)}(\phi(u_L^{n+1}))-\eta_{\phi(k)}(\phi(u_K^{n+1}))\Big)\Big(\xi_K^{n+1}-\xi_L^{n+1}\Big)\\ &= -\sum_{n=0}^{N}\delta t\theta^{n+1}\sum_{\sigma\in K|L}\frac{m(K|L)}{d_{K,L}}\Big(\eta_{\phi(k)}(\phi(u_L^{n+1}))-\eta_{\phi(k)}(\phi(u_K^{n+1}))\Big)\Big(\zeta_K-\zeta_L\Big).\\ &= -\sum_{n=0}^{N}\delta t\theta^{n+1}\sum_{\sigma\in K|L}\frac{m(K|L)d_{K,L}}{\ell}\Big(\ell\nabla_{\widehat{K|L}}\eta_{\phi(k)}(\phi(u_O^{n+1}))\Big).\Big(\frac{\zeta_K-\zeta_L}{d_{K,L}}.n_{K|L}\Big)\\ &= -\sum_{n=0}^{N}\delta t\theta^{n+1}\sum_{\sigma\in K|L}m(\widehat{K|L})\nabla_{\widehat{K|L}}\eta_{\phi(k)}(\phi(u_O^{n+1}))\tilde{\nabla}_{\widehat{K|L}}\zeta\end{aligned}\tag{3.86}$$

where : $\tilde{\nabla}_{\widehat{K|L}}\zeta = \fint_{x_K}^{x_L}\nabla\zeta$. Notice that

$$\|\nabla\zeta-\tilde{\nabla}_{\widehat{K|L}}\zeta\|_{L^\infty(\widehat{K|L})} = \underline{o}(h).$$

Therefore we have

$$|I^{Disc}_{Diff} - I^{Cont}_{Diff}|\le \upsilon^5_{O,k}(\xi),\tag{3.87}$$

with :

$$\upsilon^5_{O,k}(\xi) = \int_0^T\theta\int_\Omega|\nabla_O\eta_{\phi(k)}(\phi(u_{O,\delta t}))|.|\nabla\zeta-\tilde{\nabla}_{\widehat{K|L}}\zeta|dxdt.\tag{3.88}$$

To conclude, we prove that $\upsilon^5_{O,k}(\xi)\to 0$ as $h\to 0$. Using Cauchy-Schwarz inequality, we find

$$\upsilon^5_{O,k}(\xi)\le\|\theta\|_{L^\infty}\|\nabla_O\eta_{\phi(k)}(\phi(u_{O,\delta t}))\|_{L^2}\underline{o}(h).$$

Then, using the fact that η is 1−Lipschitz, and the estimate (3.39) we prove that $\upsilon^5_{O,k}(\xi)\to 0$ as $h\to 0$. □

3.6 Convergence of the scheme

The main result of this chapter is the following theorem.

Theorem 3.6.1. *(Convergence of the approximate solution towards the entropy solution). Assume that one of the following hypotheses is satisfied*

$$\ell = 1 \text{ and } \Omega = (a,b) \text{ an interval of } \mathbb{R}; \tag{$H_{\ell=1}$}$$

$$\ell \geq 1 \quad u_c = 0, \quad \text{and } f \circ \phi^{-1} \in C^{0,\alpha}, \alpha > 0; \tag{$H_{u_c=0}$}$$

$$\ell \geq 1 \quad u_c = u_{\max}. \tag{$H_{u_c=u_{\max}}$}$$

Let, $(u_{\mathcal{O},\delta t})_{\mathcal{O},\delta t}$ be a family of approximate solutions of problem (P_1) defined by (3.10), (3.11). *Then, under hypotheses* (3.2)-(3.8)*, we have :*

$$\forall p \in [1,+\infty) \quad u_{\mathcal{O},\delta t} \longrightarrow u \text{ in } L^p(Q) \text{ as } \max(\delta t, h) \longrightarrow 0; \tag{3.89}$$

$$\nabla_{\mathcal{O}}\phi(u_{\mathcal{O},n}) \rightharpoonup \nabla\phi(u) \text{ in } L^2(Q) \text{ as } \max(\delta t, h) \longrightarrow 0$$

where u is the unique entropy solution of (P_1), i.e u satisfies (1.2)*.*

Remark 3.6.2. *It is possible to replace in the Theorem* 3.6.1 *all the three hypotheses (* $(H_{\ell=1})$, $(H_{u_c=0})$, $(H_{u_c=u_{\max}})$*) by the following one, which is much more general :*

$$\begin{cases} \ell \geq 1 \text{ and } u_0 \text{ is such that there exist an entropy solution } u \text{ of } (P_1) \text{ such that} \\ (f(u) - \nabla\phi(u)).\eta(x) \text{ possess a strong trace in } L^1 \text{ sense.} \end{cases} \tag{$H_{\mathrm{reg}}(u_0)$}$$

Such kind of function u satisfying $(H_{\mathrm{reg}}(u_0))$, will be called trace regular entropy solution (see [5]). The idea to prove uniqueness of entropy solution is to compare any entropy solution of (P_1) with trace regular entropy solution and break the symmetry in the application of doubling of variables method by taking test function that is zero on the boundary $Q \times ((0,T) \times \partial\Omega)$ of $Q \times Q$ but non zero on the boundary $((0,T) \times \partial\Omega) \times Q$ (see the method of [7, 9]). If $(H_{\mathrm{reg}}(u_0))$ is satisfied for all u_0 that belong to a certain subset X such that $\overline{X}^{\|.\|_{L^1}} = L^1(\Omega;[0,u_{\max}])$, then uniqueness is true for all u_0.
Presently to our knowledge the only results which establish that $(H_{\mathrm{reg}}(u_0))$ hold for a dense subset X is proved for the case $(H_{u_c=u_{\max}})$ (see [22, 66]).
In this pure hyperbolic case existence of the strong trace of the flux is established in [22, 66]. Then uniqueness of entropy solution follows by standard doubling of variable methods and it is enough to take a symmetric test function.
In the case where hypotheses $(H_{u_c=0})$ or $(H_{\ell=1})$ are satisfied, it is more easy to prove existence of trace regular entropy solution for the stationary problem with L^∞ source term. In this case, we even have sense that the total flux is continuous up to the boundary, i.e $(f(u)-\nabla\phi(u)).\eta \in C(\overline{\Omega})$ (see [52]), [18]). Then we can adopt the same strategy as in the case where $(H_{\mathrm{reg}}(u_0))$ hold , but in the doubling of variable method we compare entropy solution of (P_1) with trace regular entropy solution of (S_1). Then using nonlinear semigroup approach, we prove that entropy solution of (P_1) is the unique mild solution (see [9, 7]). The same strategy is adopted here to prove that entropy-process solution (see Definition 3.6.3*) is the unique entropy solution (see section* 3.7*).*

Proof of Theorem 3.6.1. The proof of Theorem 3.6.1 is in two steps. First in Proposition 3.6.8 , we prove that the approximate solutions converge towards an entropy-process solution. Then in section 3.7 (see Theorem 3.7.6, and Proposition 3.7.7, 3.7.8, 3.7.9) we prove that entropy-process solution is in fact the unique entropy solution using the intermediate notion of integral-process solution developed for this purpose in the Appendix B of this thesis. □

3.6.1 Entropy process solution

Definition 3.6.3. *Let $\mu \in L^\infty(Q \times (0,1))$. The function $\mu = \mu(t,x,\alpha)$ taking values in $[0, u_{\max}]$ is called an entropy-process solution to problem (P_1) if $\forall k \in [0, u_{\max}]$, $\forall \xi \in C^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^\ell)$, with $\xi \geq 0$, the following inequality holds :*

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \Big\{ |\mu(\alpha)u - k|\xi_t + sign(\mu(\alpha) - k)\Big[f(\mu) - f(k)\Big].\nabla\xi \Big\} dxdtd\alpha \\
&- \int_0^T \int_\Omega \nabla|\phi(u) - \phi(k)|.\nabla\xi dxdt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} |f(k).\eta(x)|\, \xi(t,x) d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)dt \\
&+ \int_\Omega |u_0 - k|\xi(0,x)dx \geq 0,
\end{aligned} \tag{3.90}$$

where $u(t,x) = \displaystyle\int_0^1 \mu(t,x,\alpha)d\alpha$.

Remark 3.6.4. *If $\mu \in L^\infty(Q\times(0,1))$ is entropy process solution then, it satisfies for all $\xi \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ such that $\xi_t \in L^1(Q)$ and $\xi(T,.) = 0$*

$$\int_0^1 \int_0^T \int_\Omega \Big\{ \mu\xi_t + \Big(f(\mu) - \nabla\phi(u)\Big).\nabla\xi \Big\} dxdtd\alpha + \int_\Omega u_0\xi(0,x)dx = 0. \tag{3.91}$$

We recall the nonlinear weak star convergence for $(u_{O,\delta t})_{O,\delta t}$ which is equivalent to the notion of convergence towards a Young measure as developed in [36].

Theorem 3.6.5. (R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin, [41]) (Nonlinear weak star Convergence) Let $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a bounded sequence in $L^\infty(Q)$. Then, there exists $\mu \in L^\infty(Q \times (0,1))$, such that up to a subsequence, u_n tends to μ in the nonlinear weak star sense as $n \longrightarrow \infty$, i.e :

$$\forall h \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad h(u_n) \rightharpoonup \int_0^1 h(\mu(.,\alpha))d\alpha \text{weakly } -* \text{ in } L^\infty(Q) \tag{3.92}$$

Moreover, if μ is independent on α (i.e $\mu(t,x,\alpha) = u(t,x)$ for a.e. (t,x), and for all α), then u_n converge strongly in $L^1(Q)$ towards some $u(t,x)$. In particular, observe that the following holds :

Lemma 3.6.6. *Suppose that the sequence $u_n(.) \rightharpoonup \mu(.,\alpha)$ in the nonlinear weak star sense, assume that g is a continuous non decreasing function such that $g(u_n(.)) \longrightarrow \theta$ strongly in $L^1(Q)$. Then, $\theta = g(\mu(.,\alpha)) = g(u)$ where $u(t,x) = \displaystyle\int_0^1 \mu(t,x,\alpha)d\alpha$.*

Proof. Let $v_n = g(u_n)$, since g is continuous, then the sequence v_n is bounded in $L^\infty(Q)$, so that $v_n(t,x) \overset{nl-*}{\rightharpoonup} \nu(t,x,\alpha)$ (where $\overset{nl-*}{\rightharpoonup}$ mean the convergence for weak star topology in $L^\infty(Q)$) and $v_n \to \theta$ in $L^1(Q)$ and $\nu(t,x,\alpha) := g(\mu(t,x,\alpha))$ is an associated Young measure, since for all $h \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$h(v_n(t,x)) = (h\circ g)(u_n) \rightharpoonup \int_0^1 h\circ g(\mu(.,\alpha))d\alpha = \int_0^1 h(\nu(t,x,\alpha))d\alpha.$$

Since v_n tend to θ strongly, one deduces that $\nu(t,x,\alpha) = \theta(t,x)$ and ν does not depend on α. Moreover, if g is continuous and nondecreasing the level sets $g^{-1}(\{c\})$ are closed intervals of $\mathbb{R}$. Then for all $(t,x) \in Q$,

$$\mu(.,\alpha) \in g^{-1}(\{\theta(.)\}) \Longrightarrow u(.) = \int \mu(.,\alpha)d\alpha \in g^{-1}(\{\theta(.)\}) \Longrightarrow g(u(.)) = \theta(.). \tag{3.93}$$

□

From now we give a "discrete $L^2(0,T;H^1(\Omega))$" compactness result (see [42]).

Lemma 3.6.7. *Consider a family of corresponding discrete functions $w_{\mathcal{O},\delta t}$ satisfying the uniform bounds.*

$$\sum_{n=0}^{N}\delta t\sum_{K\in\mathcal{O}} m(K)(w_K^{N+1})^2 \le C; \quad \sum_{n=0}^{N}\delta t\sum_{K|L}\tau_{K|L}(\nabla_{\widehat{K|L}}w_{\mathcal{O}})^2 \le C, \tag{3.94}$$

where the discrete gradient $\nabla_{\widehat{K|L}}$ are defined by (3.4) *Then there exists $w \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ such that, up to extraction of a subsequence, $w_{\mathcal{O},\delta t} \to w$ in $L^2(Q)$ weakly and $\nabla_{\mathcal{O}} w \rightharpoonup \nabla w$ in $(L^2(Q))^\ell$ weakly.*

We wish to prove the convergence of the approximate solution $(u_{\mathcal{O},\delta t})$ to an entropy solution u of (P_1), i.e. we want to prove that there exists a limit u and that it satisfies (1.2). For that purpose, we prove first that $(u_{\mathcal{O},\delta t})$ tends in the nonlinear weak star sense to an entropy-process solution.

Proposition 3.6.8. *(Convergence towards an entropy-process solution) Under hypotheses* (3.2)-(3.8)*, let $u_{\mathcal{O},\delta t}$ be the approximate solution of problem (P_1) defined by* (3.10)*,* (3.11)*. There exists an entropy-process solution μ of (P_1) in the sense of Definition* 3.6.3 *and a subsequence of $(u_{\mathcal{O},\delta t})_{\mathcal{O},\delta t}$, such that :*

1. *The sequence $(u_{\mathcal{O},\delta t})_{\mathcal{O},\delta t}$ converges to μ in the nonlinear weak star sense.*
2. *Moreover $(\phi(u_{\mathcal{O},\delta t}))_{\mathcal{O},\delta t}$ converges strongly in $L^2(Q)$ to $\phi(u)$ as $h,\delta t$ tend to zero and*
3. *$(\nabla_{\mathcal{O}}\phi(u_{\mathcal{O},\delta t}))_{\mathcal{O},\delta t} \rightharpoonup \nabla\phi(u)$ in $(L^2(Q))^\ell$ weakly,*

where $u(t,x) = \int_0^1 \mu(t,x,\alpha)d\alpha$.

From this result, we deduce Theorem 3.6.1, using additional regularity properties coming from $(H_{\ell=1})$, $(H_{u_c=0})$ or $(H_{u_c=u_{\max}})$ (see also Remark 3.6.2 for variants of the concluding argument).

Proof of Proposition 3.6.8. Passage to the limit in the continuous entropy inequality :
Recall that we have proved that $\upsilon_{\mathcal{O},n}(\xi) \to 0$ when $(h,\delta t) \to 0$ for $\xi \in C^\infty([0,T[\times\mathbb{R}^\ell)$. We follow step by step the passage to the limit for each term of the left hand side of (3.5.2).
Because $u_{\mathcal{O},\delta t}$ is bounded in $L^\infty(Q)$, by Theorem 3.6.5, there exist $\mu \in L^\infty(Q\times(0,1))$ such that up to

a subsequence, $(u_{O,\delta t})$ tends to μ in the nonlinear weak star sense as $\max(\delta t, h) \longrightarrow 0$. We set $u(t,x) = \int_0^1 \mu(t,x,\alpha)d\alpha$. Using the continuity of $\Phi_k(.)$ and $\eta_k(.) = |. - k|$, we prove that :

$$\int_0^T \int_\Omega \eta_k(u_{O,\delta t})\xi_t dxdt \to \int_0^1 \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \mu(t,x,\alpha)\xi_t dxdtd\alpha,$$

$$\int_0^T \int_\Omega \Phi_k(u_{O,\delta t}).\nabla\xi dxdt \to \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \Phi_k(\mu)dxdtd\alpha.$$

Due to (3.39) and by the Fréchet-Kolmogorov's theorem (due to the time and space translation on $\phi(u_{O,\delta t})$) we can apply lemma 3.6.7 for $w_{O,\delta t} = \phi(u_{O,\delta t})$. Notice that in view of Lemma 3.6.6, it appears that $\phi(\mu) = \phi(u)$ where $u(t,x) = \int_0^1 \mu(t,x,\alpha)d\alpha$. The Lipschtiz continuity of η_ϕ permits to have

$$\int_0^T \int_\Omega \nabla_O \eta_\phi(\phi(u_{O,n})).\nabla\xi \rightharpoonup \int_0^T \int_\Omega \nabla\eta_\phi(\phi(u)).\nabla\xi.$$

We conclude that $u_{O,\delta t}$ converge to an entropy-process solution μ. □

3.7 Integral-process solution and uniqueness of entropy solution

In this section, we apply the new notion of solution called integral-process solution to the problem (P_1) and present a way to prove uniqueness of entropy solution. In [59], the authors introduced a notion of entropy-process solution and using the doubling of variable method of Kruzhkov [49] they proved that entropy solution is the unique entropy-process solution. In our case, we were not able to use the same argument because we need that the entropy solution possess a strong boundary trace on the boundary in order that the doubling of variables apply (see [7]). Fortunately, under additional assumptions, we can ensure the desired boundary regularity for the associated stationary problem :

$$(S_1)\begin{cases} v + \operatorname{div}(f(v) - \nabla\phi(v)) &= g \quad \text{in } \Omega, \\ (f(v) - \nabla\phi(v)).\eta &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Therefore, firstly we compare the entropy-process solution μ of (P_1) to the solution of (S_1). This suggests the use of nonlinear semigroup theory ; more precisely we find that μ is also an integral-process solution to $u' + Au = 0$, $\mu(\alpha, 0) = u_0$ with appropriately defined operator A. Then, proving the m-accretivity of A and using the result of Appendix B of this thesis, we are able to conclude that μ is the unique mild and integral solution of the abstract evolution problem. At the last step, we use the result of [9] which says that such solution is the unique entropy solution of (P_1).
Recall here the notion of integral process solution (for more details and explanation see the Appendix B of this thesis.

Definition 3.7.1. *Let A be an accretive operator and $g \in L^1(0,T;X)$. A function $v(t,\alpha)$ is an integral-process solution of abstract problem $v' + Av \ni g$ on $[0,T]$, $v(0,\alpha) = v_0$, if v satisfy for all $(\hat{v}, z) \in A$*

$$\int_0^1 \Big(\|v(t,\alpha) - \hat{v}\| - \|v(s,\alpha) - \hat{v}\| \Big) d\alpha \leq \int_0^1 \int_s^t \Big[v(\tau,\alpha) - \hat{v}, g(\tau) - z \Big] d\tau d\alpha \tag{3.95}$$

for $0 < s \leq t \leq T$ *and*

$$ess\text{-}\lim_{t\downarrow 0}\int_0^1 \|v(t,\alpha)-u_0\|d\alpha = 0. \tag{3.96}$$

Theorem 3.7.2. *Assume that A be m-accretive in X and* $u_0 \in \overline{D(A)}$*, u is an integral-process solution if and only if u is independent on* α *and for all* α*,* $u(.,\alpha)$ *coincide with the unique integral and mild solution.*

Proof. See the Appendix *B* of this thesis. □

Let us adapt an essential property of entropy solutions to the entropy-process solution, this is based on the idea of J. Carrillo [28].

Proposition 3.7.3. *Let* $\xi \in C^\infty([0,T[\times\mathbb{R}^\ell)$*,* $\xi \geq 0$*. Then for all* $k \in]u_c, u_{\max}]$*, for all* $D \in \mathbb{R}^\ell$ *and for all entropy-process solution* μ *of* (P_1)*, we have*

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega\int_0^1 \Big\{|\mu-k|\xi_t + sign(\mu-k)\Big[f(\mu)-f(k)\Big].\nabla\xi\Big\}\,dxdtd\alpha\\
&-\int_0^T\int_\Omega sign(u-k)\Big(\nabla\phi(u)-D\Big).\nabla\xi dxdt\\
&+\int_\Omega |u_0-k|\xi(0,x)dx + \int_0^T\int_{\partial\Omega}|(f(k)-D).\eta(x)|\,\xi d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)dt\\
&\geq \overline{\lim_{\sigma\to 0}}\,\frac{1}{\sigma}\int\int_{Q\cap\{-\sigma<\phi(u)-\phi(k)<\sigma\}}\nabla\phi(u).\Big(\nabla\phi(u)-D\Big)\xi dxdt.
\end{aligned}\tag{3.97}$$

Proof. The proof follows the arguments of [9]. Let us recall that if $\mu(t,x,\alpha)$ is entropy-process solution and (H1) hold, then $u(t,x) = \int_0^1 \mu(t,x,\alpha)d\alpha$ satisfies in the weak sense for all $k \in [u_c, u_{\max}]$ and all $D \in \mathbb{R}^\ell$:

$$(P_k)\begin{cases}
(u-k)_t + \operatorname{div}\Big[\Big(\int_0^1 f(\mu)d\alpha - \nabla\phi(u)\Big) - \Big(f(k)-D\Big)\Big] = 0 & \text{in } Q,\\
ess\text{-}\lim_{t\to 0^+}(u(t,x)-k) = u_0(x)-k & \text{on } \Omega,\\
\Big[\Big(\int_0^1 f(\mu)d\alpha - \nabla\phi(u)\Big) - \Big(f(k)-D\Big)\Big].\eta = -(f(k)-D).\eta & \text{on } \Sigma.
\end{cases}$$

Take the test function $sign_\sigma(\phi(u)-\phi(k))\xi = H_\sigma(\phi(u)-\phi(k))\xi$ in the weak formulation of this problem with $\xi \in C^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^\ell)$. Using the formalism of [3], we have

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle (u-k)_t, H_\sigma(\phi(u)-\phi(k))\xi\rangle_{H^1(\Omega)^*,H^1(\Omega)}\,dt\\
&-\int_0^T\int_\Omega H_\sigma(\phi(u)-\phi(k))\Big[\Big(\int_0^1 f(\mu)d\alpha-\nabla\phi(u)\Big)-\Big(f(k)-D\Big)\Big].\nabla\xi\\
&-\int_0^T\int_\Omega \xi\Big[\Big(\int_0^1 f(\mu)d\alpha-\nabla\phi(u)\Big)-\Big(f(k)-D\Big)\Big].\nabla H_\sigma(\phi(u)-\phi(k))\\
&-\int_0^T\int_{\partial\Omega} H_\sigma(\phi(u)-\phi(k))(f(k)-D).\eta\xi = 0.
\end{aligned}$$

By the weak chain rule (see [3])

$$\int_0^T \langle (u-k)_t, H_\sigma(\phi(u)-\phi(k))\xi\rangle_{H^1(\Omega)^*,H^1(\Omega)}\, dt = -\int_0^T\int_\Omega I_\sigma(u)\xi_t dtdx - \int_\Omega I_\sigma(u_0)\xi(0,x)dx \tag{3.98}$$

where : $H_\sigma(r) = \begin{cases} 1 & \text{if } r > \sigma, \\ \frac{r}{\sigma} & \text{if } |r| \le \sigma, \quad \text{and} \\ -1 & \text{if } r < -\sigma, \end{cases}$

$$I_\sigma : z \longmapsto \int_k^z H_\sigma(\phi(s)-\phi(k))ds \longrightarrow |z-k| \text{ as } \sigma \to 0 \tag{3.99}$$

Then, after passing to the limit as $\sigma \to 0$, we have

$$\begin{aligned}\int_Q |u-k|\xi_t dxdt &= -\int_Q sign(u-k)(u-k)\xi_t dxdt \\ &= -\int_Q sign(u-k)\Big(\int_0^1 \mu d\alpha - k\Big)\xi_t dxdt\end{aligned} \tag{3.100}$$

Now,notice that because $k \in]u_c, u_{\max}[$ and because $\phi(\mu(\alpha)) = const$ on $[0,1]$ we find that $sign(\mu(\alpha)-k)$ is constant on $[0,1]$ equal to $sign(u-k)$ Then , we see that

$$\int_Q |u-k|\xi_t dxdt = -\int_Q\int_0^1 |\mu-k|\xi_t d\alpha dxdt. \tag{3.101}$$

Similarly, we see

$$\int_0^T\int_0^1\int_\Omega sign(u-k)\Big[f(\mu)-f(k)\Big].\nabla\xi dxdt = \int_0^T\int_\Omega\int_0^1 sign(\mu-k)\Big[f(\mu)-f(k)\Big].\nabla\xi dxdtd\alpha. \tag{3.102}$$

For treatment of the others terms, we refer to the Chapter 1. □

Let us firstly prove that the initial datum is satisfied in the sense of (3.96) (see the Appendix B of this thesis). This means that the entropy-process solution satisfies the initial condition of integral-process solution.

Lemma 3.7.4. *Let v be an entropy-process solution of (P_1) with initial datum $v_0 \in L^\infty$. Then the initial datum is taken in the following sense :*

$$\lim_{s\downarrow 0}\int_0^s\int_\Omega\int_0^1 |v-v_0|dtdxd\alpha = 0. \tag{3.103}$$

Proof. The proof follows the one of Panov in ([67, Proposition 1]). For $c \in \mathbb{R}$ and $s > 0$, consider the functions

$$\Psi_s(.,c) : x \in \Omega \longmapsto \frac{1}{s}\int_0^s\int_0^1 |v(t,x,\alpha)-c|dtd\alpha. \tag{3.104}$$

Because v is bounded, the set $(\Psi_s(.,c))_{s>0}$ is bounded in $L^\infty(\Omega)$. Therefore for any sequence $s_m \to 0$, there exists a subsequence such that for all $c \in \mathbb{Q}$, $(\Psi_s(.,c))_{s>0}$ converges in $L^\infty(\Omega)$ weak star to some limit denoted by $(\Psi(.,c))$. Fix $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)^+$. From Remark 3.6.3 with test function $\tilde{\xi}(t,x) := (1-\frac{t}{s})^+\xi(x)$ we readily infer the inequalities

$$\forall c \in \mathbb{Q}, \int_\Omega \Psi(x,c)\xi(x)dx \leq \int_\Omega |u_0 - c|\xi(x)dx. \tag{3.105}$$

By the density argument, we extend (3.105) to all $\xi \in L^1(\Omega)$, $\xi \geq 0$. Now for all $\epsilon > 0$, there exists a number $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, a collection $(c_i^\epsilon)_{j=1}^{N(\epsilon)} \subset \mathbb{Q}$ and a partition of Ω into disjoint union of measurable sets $\Omega_1^\epsilon, ..., \Omega_{N(\epsilon)}^\epsilon$ such that $\|v_0 - v_0^\epsilon\|_{L^1} \leq \epsilon$, where $v_0^\epsilon := \sum_{j=1}^{N(\epsilon)} c_j^\epsilon 1_{\Omega_j^\epsilon}$. Because $1_\Omega = \sum_{j=1}^{N(\epsilon)} 1_{\Omega_j^\epsilon}$, applying (3.105) with $c = c_j^\epsilon$ and $\xi = 1_{\Omega_j^\epsilon}$ we deduce

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \frac{1}{s_m}\int_0^{s_m}\int_\Omega\int_0^1 |v - v_0^\epsilon| dt dx d\alpha &= \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \sum_{j=1}^{N(\epsilon)} \Psi_{s_m}(x, c_j^\epsilon) 1_{\Omega_j^\epsilon} dx \\
&= \int_\Omega \sum_{j=1}^{N(\epsilon)} \Psi(x, c_j^\epsilon) 1_{\Omega_j^\epsilon} dx \\
&\leq \int_\Omega \sum_{j=1}^{N(\epsilon)} |v_0 - c_j^\epsilon| 1_{\Omega_j^\epsilon} dx = \|v_0 - v_0^\epsilon\|_{L^1} \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Using once more the bound $\|v_0 - v_0^\epsilon\|_{L^1} \leq \epsilon$ (in the first term of the previous calculation), we can send ϵ to zero and infer the analogue of (3.104), with a limit taken along some subsequence of $(s_m)_{m>1}$. Because $(s_m)_{m>1}$ was an arbitrary sequence convergent to zero, (3.104) is justified. □

Now it remains to prove that the entropy-process solution an is integral-process solution. Let us define the (possibly multivalued) operator $A_{f,\phi}$ by it resolvent

$$(v,z) \in A_{f,\phi} = \left\{ \begin{array}{l} v \text{ such that } v \text{ is an entropy solution of } (S_1), \text{ with } g = v + z. \\ \text{and strong } L^1 \text{ trace of } (f(u) - \nabla\phi(u)).\eta|_{\partial\Omega} \text{ exists} \\ \text{and equal to zero.} \end{array} \right\}.$$

Definition 3.7.5. *The normal component of the flux $\mathcal{F}[u] = (f(u) - \nabla\phi(u)).\eta$ has a L^1 strong trace $\gamma\mathcal{F}[\hat{u}] \in L^1_{Loc}(\partial\Omega)$, at boundary $\partial\Omega$ if*

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\int_0^s \int_{\hat{x}\in\partial\Omega} \xi(\hat{x})|\mathcal{F}[u](s,\hat{x}) - \gamma\mathcal{F}[u](\hat{x})| d\hat{x} d\tau = 0. \tag{3.106}$$

After having defined this operator, we present the following results.

Theorem 3.7.6. *Assume that $A_{f,\phi}$ is m-acccretive densely defined on $L^1(\Omega;[0,u_{\max}])$. Then the entropy-process solution is the unique entropy solution.*

Before turning to the proof of Theorem 3.7.6, lets us present three cases where it applies.

Proposition 3.7.7. *Assume $(H_{\ell=1})$ holds. Then, $A_{f,\phi}$ is m-acccretive densely defined on $L^1(\Omega;[0,u_{\max}])$.*

For the proof, we refer to Chapter 1, Proposition 1.4.10.

Proposition 3.7.8. *Assume that, $(H_{u_c=0})$, holds. Then $A_{f,\phi}$ is m-acccretive densely defined on $L^1(\Omega;[0,u_{\max}])$.*

Proof. (sketch) The proof is essentially the same as in [7], where the case $\phi = Id$ has been investigated. For general ϕ satisfying $f\circ\phi^{-1}\in C^{0,\alpha},\alpha>0$ we adapt the result of Lieberman [52]. As ϕ is bijective, we set $w=\phi(u)$ and rewrite the stationary problem as :

$$\operatorname{div}(f\circ\phi^{-1}(w)-\nabla w)=g(x)-\phi^{-1}(w)\Rightarrow \operatorname{div}(B(w,\nabla w))=F(x,w),$$

where B and F satisfies the hypothesis of [52], then $w=\phi(u)\in C^{0,\alpha}(\bar\Omega),\alpha>0$ and $u\in C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$. We deduce that $(f(u)-\nabla(\phi(u))\in C(\bar\Omega)$. □

Proposition 3.7.9. *Assume that $(H_{u_c=u_{\max}})$ holds. Then $A_{f,\phi}$ is m-acccretive densely defined on $L^1(\Omega;[0,u_{\max}])$.*

For the proof, we refer to [22, 74, 65] where the existence of strong trace of $f(u)$ has been proved for pure conservation laws.
In the sequel, we concentrate on the proof of Theorem 3.7.6 in the case $(H_{\ell=1})$ holds. The other cases are similar, using the hint of [7] [1].

Proof of Theorem 3.7.6. Now, we apply the doubling of variables [49] in the way of [7, 9] (see also Chapter 1). We consider $\mu=\mu(t,x,\alpha)$ an entropy-process solution of (P_1) and $v=v(y)$ an entropy solution of (S_1) using in the definition of $A_{f,\phi}$. Consider nonnegative function $\xi=\xi(t,x,y)$ having the property that $\xi(.,.,y)\in C^\infty([0,T)\times\overline{\Omega})$ for each $y\in\overline{\Omega}$, $\xi(t,x,.)\in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ for each $(t,x)\in[0,T)\times\overline{\Omega}$. Let us denote the sets on which the diffusion term for the first, respectively for the second solutions degenerate by

$$\Omega_x=\{x\in\Omega;\mu(t,x,\alpha)\in[0,u_c]\};\Omega_y=\{y\in\Omega;v(y)\in[0,u_c]\}.$$

We denote by Ω_x^c respectively Ω_y^c their complementaries in Ω. In (3.97), take $\xi=\xi(t,x,y)$, $k=u(y)$, $D=\phi(u)_y$ and integrate over $\Omega_y^c\times[0,1]$. We get

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_y^c}\int_0^T\int_{x\in\Omega}\int_0^1\Big\{|\mu-v|\xi_t+sign(\mu-v)\Big[f(\mu)-f(v)\Big].\xi_x\Big\}d\alpha dxdtdy\\
&-\int_{\Omega_y^c}\int_0^T\int_{x\in\Omega}sign(u-v)\Big(\phi(u)_x-\phi(v)_y\Big).\xi_x dxdtdy\\
&+\int_{\Omega_y^c}\int_0^T\int_{x\in\partial\Omega}\Big|(f(v)-\phi(v)_y).\eta(x)\Big|\xi d\sigma dtdy+\int_{\Omega_y^c}\int_{x\in\Omega}|u_0-v|\xi(0,x,y)dxdy\\
&\geq\overline{\lim_{\sigma\to0}}\frac{1}{\sigma}\int_{\Omega_y^c}\int_0^T\int_{x\in\Omega\cap\{-\sigma<\phi(u)-\phi(v)<\sigma\}}\phi(u)_x(\phi(u)_x-\phi(v)_y)\xi dxdtdy. \qquad (3.107)
\end{aligned}$$

1. Notice that the C^2 regularity assumption on $\partial\Omega$, made in [7] is easily bypassed using the variant presented in [8, Section 4]

In the same way, in (3.6.3) take $\xi = \xi(t,x,y)$, $k = v(y)$, integrate over Ω_y, and use the fact that $\phi(v)_y = 0$ in Ω_y. We get

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_y}\int_0^T\int_{x\in\Omega}\int_0^1 \Big\{|\mu - v|\xi_t + sign(\mu - v)\Big[f(\mu) - f(v)\Big].\xi_x\Big\}\, d\alpha dx dt dy \\
&- \int_{\Omega_y}\int_0^T\int_{x\in\Omega} sign(u - v)\Big(\phi(u)_x - \phi(v)_y\Big).\xi_x dx dt dy \\
&+ \int_{\Omega_y}\int_0^T\int_{x\in\partial\Omega} \Big|(f(v) - \phi(v)_y).\eta(x)\Big|\,\xi d\sigma dt dy + \int_{\Omega_y}\int_{x\in\Omega} |u_0 - v|\xi(0,x,y) dx dy \geq 0. \qquad (3.108)
\end{aligned}$$

Since $\Omega = \Omega_x \cup \Omega_x^c$, by adding (3.107) to (3.108) we obtain :

$$\begin{aligned}
&\int_{y\in\Omega}\int_0^T\int_{x\in\Omega}\int_0^1 \Big\{|\mu - v|\xi_t + sign(\mu - v)\Big[f(\mu) - f(v)].\xi_x\Big\}\, d\alpha dx dt dy \\
&- \int_{y\in\Omega}\int_0^T\int_{x\in\Omega} sign(u - v)\Big(\phi(u)_x - \phi(v)_y\Big).\xi_x dx dt dy \\
&+ \int_{\Omega}\int_0^T\int_{x\in\partial\Omega} \Big|(f(v) - \phi(v)_y).\eta(x)\Big|\,\xi d\sigma dt dy + \int_{\Omega}\int_{x\in\Omega} |u_0 - v|\xi(0,x,y) dx dy \\
&\geq \overline{\lim_{\sigma\to 0}}\,\frac{1}{\sigma}\int_{\Omega_y^c}\int_0^T\int_{x\in\Omega\cap\{-\sigma<\phi(u)-\phi(v)<\sigma\}} \phi(u)_x(\phi(u)_x - \phi(v)_y)\xi dx dt dy. \qquad (3.109)
\end{aligned}$$

In the entropy formulation of (S_1), take $\xi = \xi(t,x,y)$, $k = \mu(t,x,\alpha)$, $D = \phi(\mu)_x$ and integrate over $(t,x,\alpha) \in (0,T)\times\Omega_x^c\times(0,1)$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_x^c}\int_0^T\int_0^1\int_{y\in\Omega} sign(v - \mu)\Big[f(v) - f(\mu)].\xi_y d\alpha dx dt dy \\
&- \int_{\Omega_x^c}\int_0^T\int_0^1\int_{y\in\Omega} sign(v - \mu)\Big(\phi(v)_y - \phi(u)_x\Big).\xi_y d\alpha dx dt dy \\
&+ \int_0^T\int_{\Omega_x^c}\int_0^1\int_{y\in\Omega} sign(v - \mu)(v - g(y))\xi d\alpha dx dt dy \\
&+ \int_0^T\int_{\Omega_x^c}\int_0^1\int_{y\in\partial\Omega} |(f(\mu) - \phi(\mu)_x).\eta(y)|\,\xi d\alpha d\sigma dx dt \\
&\geq \overline{\lim_{\sigma\to 0}}\,\frac{1}{\sigma}\int_{\Omega_x^c}\int_0^T\int_{y\in\cap\{-\sigma<\phi(u)-\phi(v)<\sigma\}}\int_0^1 \phi(v)_y(\phi(v)_y - \phi(\mu)_x)\xi d\alpha dy dt dx. \qquad (3.110)
\end{aligned}$$

Since $v(y)$ is entropy solution, then take in the entropy dissipative formulation of (S_1) $\xi = \xi(t,x,y)$, $k = \mu(t,x,\alpha) \in]u_c, u_{\max}[$, integrate over $(0,T)\times\Omega_x\times(0,1)$ and use the fact that $\phi(\mu)_x = \phi(u)_x = 0$ in

$(0,T)\times\Omega_x$.

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_x}\int_0^T\int_0^1\int_{y\in\Omega} sign(v-\mu)\Big[f(v)-f(\mu)\Big].\xi_y d\alpha dx dt dy\\
&-\int_{\Omega_x}\int_0^T\int_0^1\int_{y\in\Omega} sign(v-\mu)\Big(\phi(v)_y-\phi(u)_x\Big).\xi_y d\alpha dx dt dy\\
&+\int_0^T\int_{\Omega_x}\int_0^1\int_{y\in\Omega} sign(v-\mu)(v-g(y))\xi d\alpha dx dt dy\\
&+\int_0^T\int_{\Omega_x}\int_0^1\int_{y\in\partial\Omega} |(f(\mu)-\phi(\mu)_x).\eta(y)|\,\xi d\alpha d\sigma dx dt \geq 0. \qquad (3.111)
\end{aligned}$$

By adding (3.110) to (3.111), we obtain

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\int_0^T\int_0^1\int_{y\in\Omega} sign(v-\mu)\Big[f(v)-f(\mu)\Big].\xi_y d\alpha dx dt dy\\
&-\int_{\Omega}\int_0^T\int_0^1\int_{y\in\Omega} sign(v-\mu)\Big(\phi(v)_y-\phi(u)_x\Big).\xi_y d\alpha dx dt dy\\
&+\int_0^T\int_{\Omega}\int_0^1\int_{y\in\Omega} sign(v-\mu)(v-g(y))\xi d\alpha dx dt dy\\
&+\int_0^T\int_{\Omega}\int_0^1\int_{y\in\partial\Omega} |(f(\mu)-\phi(\mu)_x).\eta(y)|\,\xi d\alpha d\sigma dx dt\\
&\geq \overline{\lim_{\sigma\to 0}}\frac{1}{\sigma}\int_{\Omega_x^c}\int_0^T\int_{y\in\cap\{-\sigma<\phi(u)-\phi(v)<\sigma\}}\int_0^1 \phi(v)_y(\phi(v)_y-\phi(\mu)_x)\xi d\alpha dy dt dx. \qquad (3.112)
\end{aligned}$$

Now, sum (3.109) and (3.112) to obtain

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^T\int_{\Omega}\int_{\Omega}|\mu-v|\xi_t d\alpha dy dx dt+\int_{\Omega}\int_{\Omega}|u_0-v|\xi(0,x,y)dxdy\\
&+\int_0^1\int_0^T\int_{\Omega}\int_{\Omega} sign(v-u)\Big[f(\mu)-f(v)\Big].(\xi_x+\xi_y)d\alpha dy dx dt\\
&-\int_0^T\int_0^1\int_{\Omega}\int_{\Omega} sign(u-v)\Big(\phi(u)_x-\phi(v)_y\Big).(\xi_x+\xi_y)d\alpha dy dx dt\\
&+\int_0^T\int_{x\in\partial\Omega}\int_{\Omega}\Big|(f(v)-\phi(v)_y).\eta(x)\Big|\,\xi d\sigma dt dy\\
&+\int_0^1\int_0^T\int_{\Omega}\int_{y\in\partial\Omega}|(f(\mu)-\phi(\mu)_x).\eta(y)|\,\xi dy d\sigma dt\\
&+\int_0^1\int_0^T\int_{\Omega}\int_{\Omega} sign(v-\mu)(v-g(y))\xi dy dx dt d\alpha\\
&\geq \overline{\lim_{\sigma\to 0}}\frac{1}{\sigma}\int_0^T\iint_{\Omega_x^c\times\Omega_y^c\cap\{-\sigma<\phi(v)-\phi(u)<\sigma\}}|\phi(v)_x-\phi(u)_y|^2\xi dy dx dt\geq 0. \qquad (3.113)
\end{aligned}$$

Next, following the idea of [7] (see also Chapter 1) in the simple one-dimensional setting, we consider the test function $\xi(t,x,y)=\theta(t)\rho_n(x,y)$, where $\theta\in C_0^\infty(0,T)$, $\theta\geq 0$, $\rho_n(x,y)=\delta_n(\Delta)$ and $\Delta=(1-\frac{1}{n(b-a)})x-y+\frac{a+b}{2n(b-a)}$. Then, $\rho_n\in\mathcal{D}(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$ and $\rho_{n_{|\Omega\times\partial\Omega}}(x,y)=0$. Due to this choice

$$\int_0^T\int_{x\in\Omega}\int_{y\in\partial\Omega}\int_0^1|(f(\mu)-\phi(u)_x).\eta(y)|\,\rho_n\theta dy d\sigma dt=0.$$

By the Proposition 3.7.7 and the definition of $A_{f,\phi}$, we prove that for the stationary problem, $(f(v) - \phi(v)_y) \in C_0([a,b])$. Therefore we have
$\big|(f(v) - \phi(v)_y).\eta(x)\big| \longrightarrow 0$ when $x \to y$, i.e, as $n \longrightarrow \infty$. We conclude that

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_{x\in\partial\Omega} \int_{y\in\Omega} \big|(f(v) - \phi(v)_y).\eta(x)\big| \rho_n \theta dy d\sigma dt = 0.$$

It remains to study the limit, as $n \to \infty$

$$I_n = \int_0^1 \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega \theta sign(\mu - v)\Big[(f(\mu) - \phi(u)_x) - (f(v) - \phi(v)_y)\Big].((\rho_n)_x + (\rho_n)_y) dy dx dt.$$

We use the change of variable $(x,y) \mapsto (x,z)$ with $z = n(x-y) - \frac{1}{b-a}x + \frac{a+b}{b-a}$,

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2}{b-a} \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_0^T \int_\Omega sign(\mu - v)\Big[(f(\mu) - \phi(u)_x) - (f(v) - \phi(v)_y)\Big].\delta_n'(z)\theta dx dt dz d\alpha \\ &= \frac{2}{b-a} \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_0^T \int_a^b sign(\mu(t,x,\alpha) - v_n(x,z))\Big[p(t,x,\alpha) - q_n(x,z,\alpha)\Big]\delta_n'(z)\theta(t) dx dt dz d\alpha, \end{aligned}$$

where $v_n(x,z) := v(y)$, $p(t,x,\alpha) := f(\mu) - \phi(u)_x$ and $q_n := f(v) - \phi(v)_y$. For z given, $v_n(.,z)$ converges to $v(.)$ in L^1 and $q_n(.,z)$ converges to $q(.) := f(v) - \phi(v)_x$ in L^1. We deduce that for all $z \in [-1,1]$ (see [7] also [9])

$$\begin{aligned} K_n(z,\alpha) := \int_0^1 \int_Q sign(w_n(t,x,z)) h_n(t,x,\alpha) dx dt d\alpha \longrightarrow_{n\to\infty} \int_0^1 \int_Q sign(w) h dx dt \\ =: K = \text{const}, \end{aligned}$$

where $w_n := \mu - v_n$, $h_n := p - q_n$ and $h := p - q$. Then $K_n(.)$ converges to K independently on z. Moreover, from the definition of K_n one finds easily the uniform L^∞ bound $|K_n| \le 2(\|p\|_{L^1(Q)} + T\|q\|_{L^1(\Omega)})$, for n large enough. Hence by the Lebesgue theorem,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^1 K_n(z)\delta'(z) = K \int_{-1}^1 \delta'(z) = 0.$$

We have shown that the limit of I_n equals zero. The passage to the limit in other terms in (3.113) is straightforward. Finally (3.113) gives for $n \longrightarrow \infty$

$$\int_0^1 \int_0^T \int_\Omega |\mu(t,x,\alpha) - v(y)|\theta'(t) dx dt d\alpha + \int_0^1 \int_0^T \int_\Omega sign(v - \mu)(v - g)\theta dx dt d\alpha \ge 0.$$

Hence

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \|\mu(t,\alpha) - v\|_{L^1(\Omega)} d\alpha \le \int_0^1 \int_\Omega sign(\mu - v)(v - g) dx \text{ in } \mathcal{D}'(0,T).$$

Thus, v is an integral-process solution of (E) with $A = A_{f,\phi}$. □

Chapitre 4

Numerical experiments

4.1 Introduction

We end the first part of this thesis by focusing on a purely numerical framework. Several numerical illustrations are provided. All the tests presented herein are obtained by a time-explicit finite volume scheme under the appropriate CFL conditions. Several illustrations of solution behavior are proposed. The rate of convergence of the scheme is then investigated. Our aim is to understand the role of some assumptions considered in the preceding theoretical study (see Chapters 1 and 2) and to see the robustness of our scheme. This permits to outlook the opportunities that we could consider in future work. Results of computation discussed below are focusing both on the purely hyperbolic case and on the degenerate parabolic case. For the approximation of the convection fluxes, we used Rusanov fluxes and also Lax-Friederich numerical fluxes.

4.2 Evolution of solutions and speed of convergence of the scheme

4.2.1 Numerical illustrations of evolution of solution

We present here numerical tests to see the evolution of the numerical solution of equation $u_t + f(u)_x - \phi(u)_{xx} = 0$ in the hyperbolic ($\phi \equiv 0$) and in the degenerate parabolic (ϕ continuous, non-decreasing function) regimes. We investigate about zero-flux, Robin and Dirichlet boundary condition. The following tests are performed using CFL condition, however CFL condition is more restrictive in the degenerate parabolic situation.

Zero-flux boundary condition

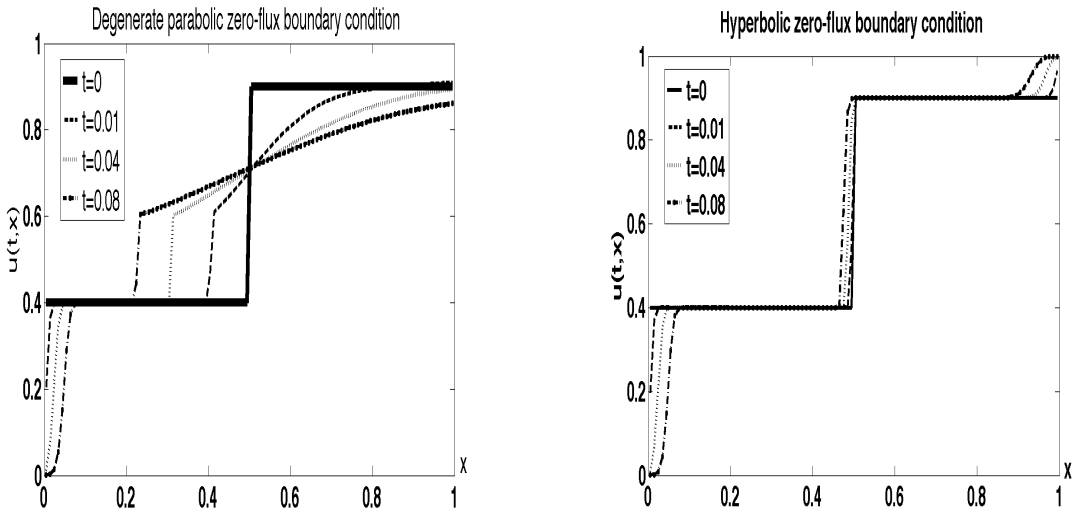

FIGURE 4.1 – Evolution of solution with zero-flux boundary condition

Case	convection flux	diffusion flux	space steps	time step
Degenerate parabolic	$f(u) = u(1-u)$	$\phi(u) = (u-0.6)^+$	$\delta x = 0.01$	$\delta t = 2.10^{-5}$
Pure hyperbolic	$f(u) = u(1-u)$	$\phi(u) = 0$	$\delta x = 0.01$	$\delta t = 2.10^{-3}$

TABLE 4.1 – Data to illustrate Figure 4.1

Here, we consider $\Omega = (0, 1)$. We can observe that a part (bottom at left, see Figure 4.1) of solutions of degenerate parabolic and hyperbolic cases coincides. Remark that the hyperbolic solution is forced to reach the value 1 at the point $x = 1$. While, the parabolic solution will use moreover the contribution of the slope $\phi(u)_x$ of $\phi(u)$ to satisfy the boundary condition. We observe also that the shock through the parabolic region disappears instantaneously but the shock through the hyperbolic zone is maintained, and the impact velocity is very different and even slope of $\phi(u)$ to the right hand side of the shock contributes significantly to the speed (it is clear that the shock propagates much faster here in the degenerate parabolic case, compared to the hyperbolic case).

Robin boundary condition

In the case of Robin boundary condition, we observe with the same initial condition a similar illustration of evolution of solution as with the zero flux degenerate parabolic case (see left part of Figure 4.2). Indeed, in this case $b(u) = \phi(u) = (u - u_c)^+$ (see Table 4.2) and at the neighborhood of $x = 0$, due to the choice of u_c (here $u_c = 0.6$) we see that $b(u)$ is zero and then problem coincides with zero-flux boundary condition. Naturally, in the neighborhood of $x = 1$ where u takes values above the degeneracy threshold $u_c = 0.6$, we observe a behavior that is analogous to the zero-flux case but the solution is quantitatively

different. For the pure hyperbolic case, assumption (H2) forces $b(u)$ to be zero, therefore the Robin case coincides with the zero-flux case.
Let us consider, as a second example, the framework of W. Hiroshi and O. Shinnosuke (see [45]) by taking $b(u) = f(u)\eta$ i.e. $b(u) = -f(u)$ at $x = 0$ and $b(u) = +f(u)$ at $x = 1$ (see Table 4.2). According to theoretical results of [45], if $f.\eta$ is monotone non-decreasing (this requires an x-dependence also in the flux $f = f(x, u)$) there exists a unique solution to the corresponding Robin problem which corresponds, in fact, to the Neumann boundary condition $\partial_x \phi(u).\eta = 0$. The solutions verify the maximum principle with respect to the maximum and minimum values of u_0. In our case, we have taken x-independent $f(u)$, which means the assumptions of [45] are not satisfied. Nevertheless the scheme performs well and we observe that the numerical solution converge towards a limit which satisfies the maximal principle (see right part of Figure 4.2).

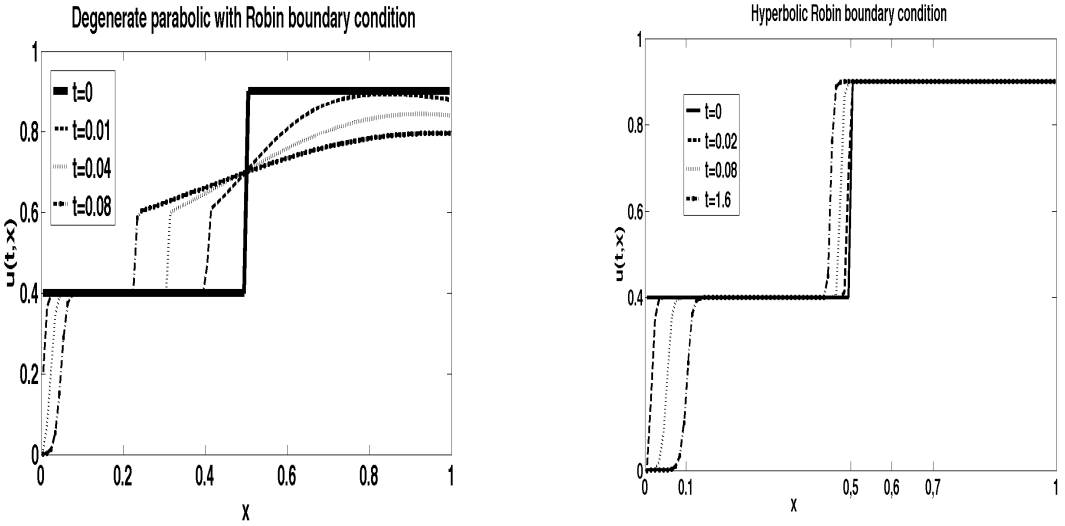

FIGURE 4.2 – Evolution of solution with Robin boundary condition

Case	convection flux	diffusion flux	space steps	time steps
Degenerate parabolic	$f(u) = u(1-u)$	$\phi(u) = b(u) = (u-0.6)^+$	$\delta x = 0.01$	$\delta t = 2.10^{-5}$
Pure hyperbolic	$f(u) = u(1-u)$	$\phi(u) = 0$ and $b(u) = f(u).\eta$,	$\delta x = 0.01$	$\delta t = 2.10^{-3}$

TABLE 4.2 – Data to illustrate Figure 4.2

Dirichlet boundary condition

Here, for the sake of completeness we investigate about evolution an initial datum in the case of Dirichlet boundary condition. Many references exists in the literature dealing with this kind of boundary condition (see for example [59]). The aim here is the illustrate some phenomena that we describe in the

Chapter 2 as for example the fact that in the Figure 4.3 we observe at $x = 1$ a formation of boundary layer, the solution cannot respect the formal boundary condition. The solution stays bounded between the maximal and minimal values of the initial data and boundary data without any confinement hypotheses as we explain in the Chapter 2.

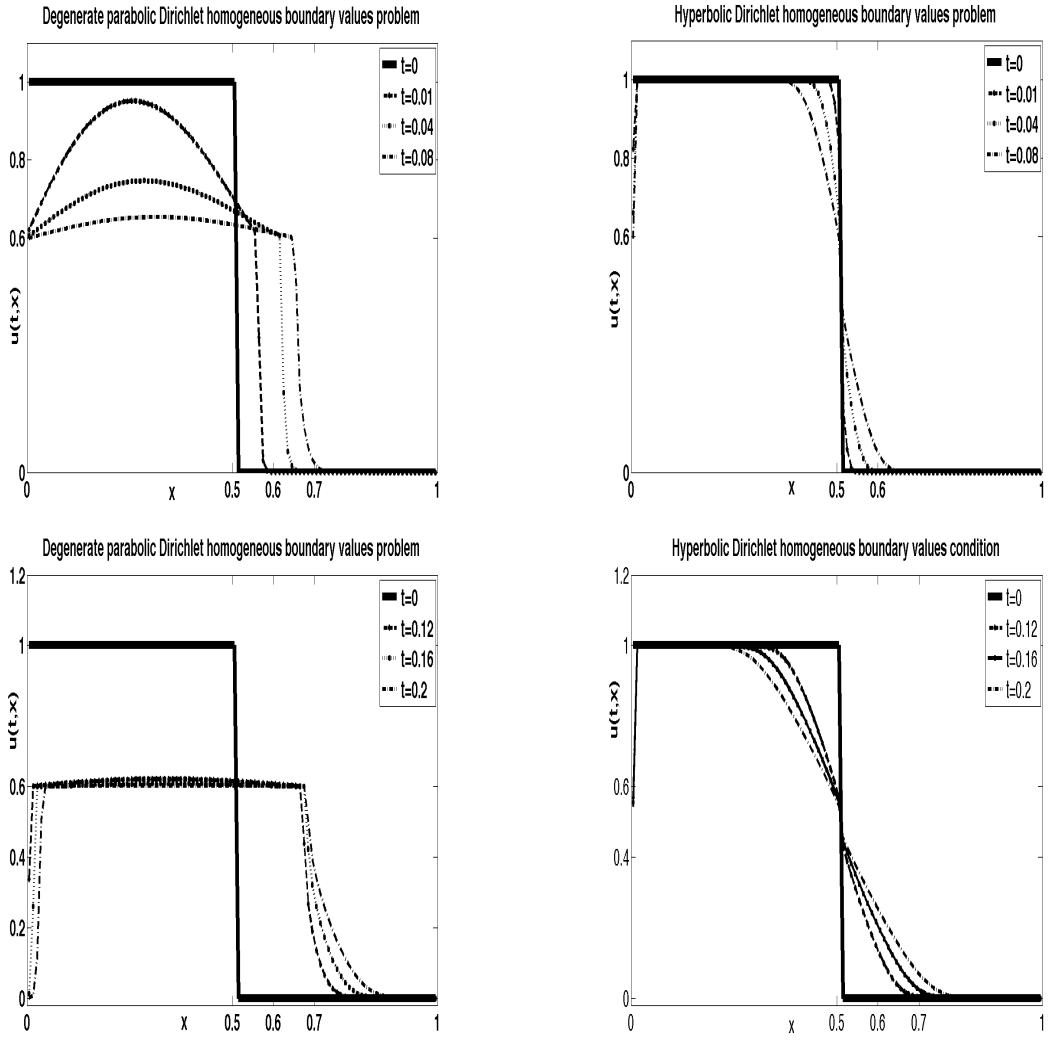

FIGURE 4.3 – Evolution of solution with homogeneous Dirichlet boundary values condition

Case	convection flux	diffusion flux	space steps	time step
Degenerate parabolic	$f(u) = u(1-u)$	$\phi(u) = (u-0.6)^+$	$\delta x = 0.01$	$\delta t = 2.10^{-5}$
Pure hyperbolic	$f(u) = u(1-u)$	$\phi(u) = 0$	$\delta x = 0.01$	$\delta t = 2.10^{-3}$

TABLE 4.3 – Data to illustrate Figure 4.3

4.2.2 Mesh refinement and speed of convergence

Here we investigate the case of zero-flux boundary condition. The computations of this test are based on the time-explicit analogue of the finite volume scheme of Chapter 3. The simulations are stopped at $t = 2$ sec. Measurements of the numerical error provided when δx tends to zero are exposed. To measure the error, we use the L^1 norm of the numerical error given by $\sum_{i=1}^{N} |u_i^{app} - u_i^{ref}|$. Several spatial meshes are considered involving, respectively space step δx equal to $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{80}$ and 10, 20, 40, 80 cells . The reference function u_{ref} is the numerical solution with $\delta x = \frac{1}{160}$ and 160 cells. The time step is chosen accordingly to the CFL condition ($\delta t \leq C\delta x$ if ϕ is set to zero, and $\delta t \leq C\delta x^2$ otherwise). Figure 4.4. represents the logarithmic scale profile of the error.

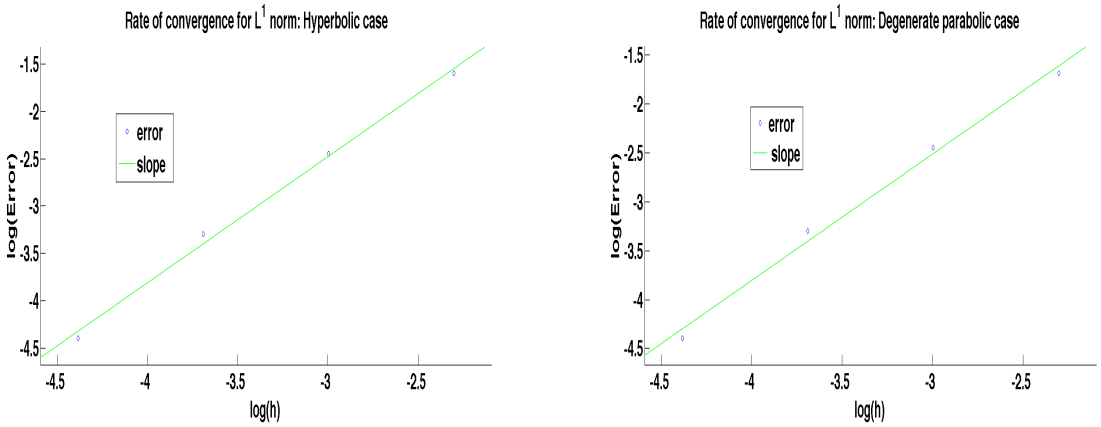

FIGURE 4.4 – Rate of convergence

4.3 Numerical behavior with and without confinement assumptions

4.3.1 Further numerical illustrations

In this section, we investigate about the importance of hypothesis (H1) (see Chapter 1 in the case of zero-flux boundary condition). Further, we propose also an interpretation of numerical observation in the case of Robin boundary condition by analyzing the role of assumptions (H2), (H3) also of the Chapter 1. For the zero-flux boundary condition, our entropy formulation is based on the hypothesis (H1). This hypothesis ensures the L^∞ bound on the solution. More precisely, if we suppose the initial datum taking values in $[0, u_{\max}]$ then the interval $[0, u_{\max}]$ will be the invariant domain of the solution. Here we suppose $u_{\max} = 1$ and consider the initial datum taking values in $[0, u_{\max}]$, then if (H1) holds, we observe that the numerical solution stays in this interval (see the first figure at left hand side of Figure 4.6 and 4.5 for

both hyperbolic and degenerate parabolic case). But if we drop the assumption (H1) by considering for example $f(u) = \frac{u^2}{2}$, then at some distance from the boundary the sequence of numerical solutions remains bounded in the degenerate case (see the second at right side of Figure 4.6) and also for the hyperbolic case, however we observe see also that it's appear a kind of boundary layer at $x = 1$ (see Figure 4.5). This numerical test shows that the confinement assumption (H1) may not be necessary for investigation of problem (P_1). We have observed convergence towards a bounded solution but not in the sense of our definition of entropy solution. In future work, we hope to find an appropriate formulation which lead to existence and uniqueness result without (H1).
Secondly, in our Robin boundary condition framework, with considering $f(0) = b(0) = 0$, the assumption (H3) plays a same role of confinement in the sense that it permits to have the numerical solution in $[0, u_{\max}]$. We remark that in the situation were (H3) is dropped and $u_0 \in [0, u_{\max}]$ then the numerical solution does not satisfy the entropy formulation, because $u_h \notin [0, u_{\max}]$.
Further, our entropy formulation requires to choose $b(u)$ in the functional space that permits to define the trace of $b(u)$ on the boundary ; for this reason, assumption (H2) was imposed in Section 1.5. In the context where assumption (H2) is not taken into account, numerically, we observe a boundary layer (see Figure 4.7). Now, taking into account these assumptions, the numerical observation seems illustrate nicely the theoretical results on the well-possedness of problem (P_2) (see Figure 4.7). As noticed in Remark 1.2.3, we expect that with this hypothesis, the boundary condition is satisfied literally and if the numerical solution converges toward the unique entropy solution, then we avoid boundary layer.

Case	convection flux	diffusion flux	space steps
Degenerate parabolic without (H1)	$f(u) = \frac{u^2}{2}$	$\phi(u) = (u - 0.6)^+$	$\delta x = 0.01$
Pure hyperbolic without (H1)	$f(u) = \frac{u^2}{2}$	$\phi(u) = 0$	$\delta x = 0.01$
Degenerate parabolic with (H1)	$f(u) = u(1 - u)$	$\phi(u) = (u - 0.6)^+$	$\delta x = 0.01$
Pure hyperbolic with (H1)	$f(u) = u(1 - u)$	$\phi(u) = 0$	$\delta x = 0.01$

TABLE 4.4 – Data to illustrate Figures 4.5 and 4.6 for zero-flux problems

Case	convection flux	diffusion flux	$b(u)$	space steps
without (H2)	$f(u) = \frac{u^2}{2}$	$\phi(u) = (u - 0.6)^+$	u	$\delta x = 0.01$
without (H3)	$f(u) = \frac{u^2}{2}$	$\phi(u) = (u - 0.6)^+$	$(u - 0.6)^+$	$\delta x = 0.01$
with (H2) and (H3)	$f(u) = u(1 - u)$	$\phi(u) = (u - 0.6)^+$	$(u - 0.6)^+$	$\delta x = 0.01$
without (H2) and (H3)	$f(u) = u(1 - u)$	$\phi(u) = (u - 0.6)^+$	u	$\delta x = 0.01$

TABLE 4.5 – Data to illustrate Figure 4.7 for Robin boundary problems

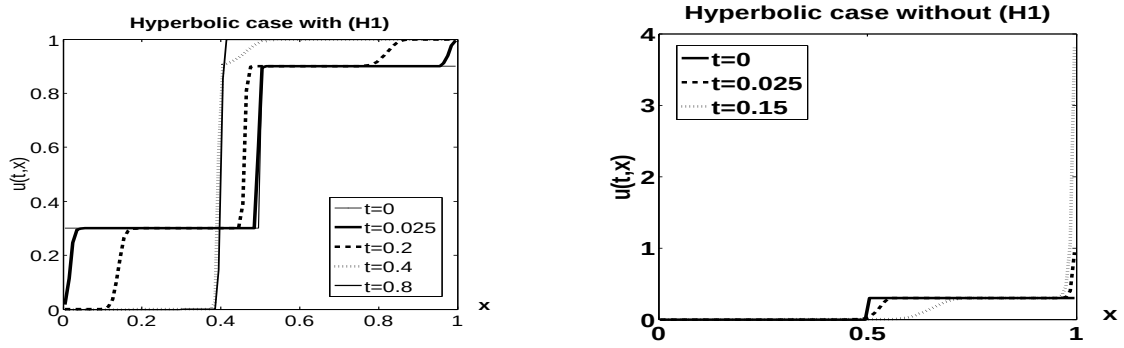

FIGURE 4.5 – Hyperbolic zero-flux problem : with and without (H1)

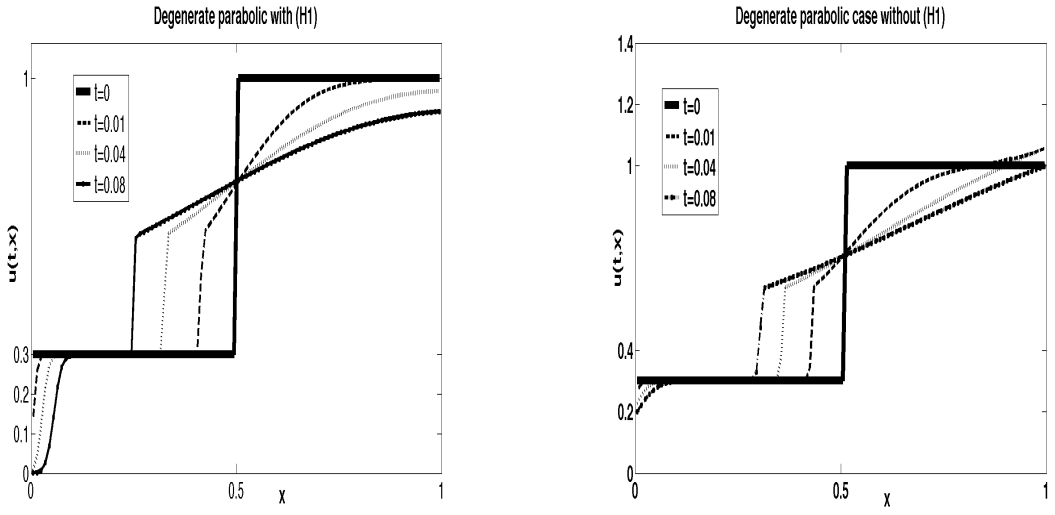

FIGURE 4.6 – Degenerate parabolic zero-flux problem : with and without (H1)

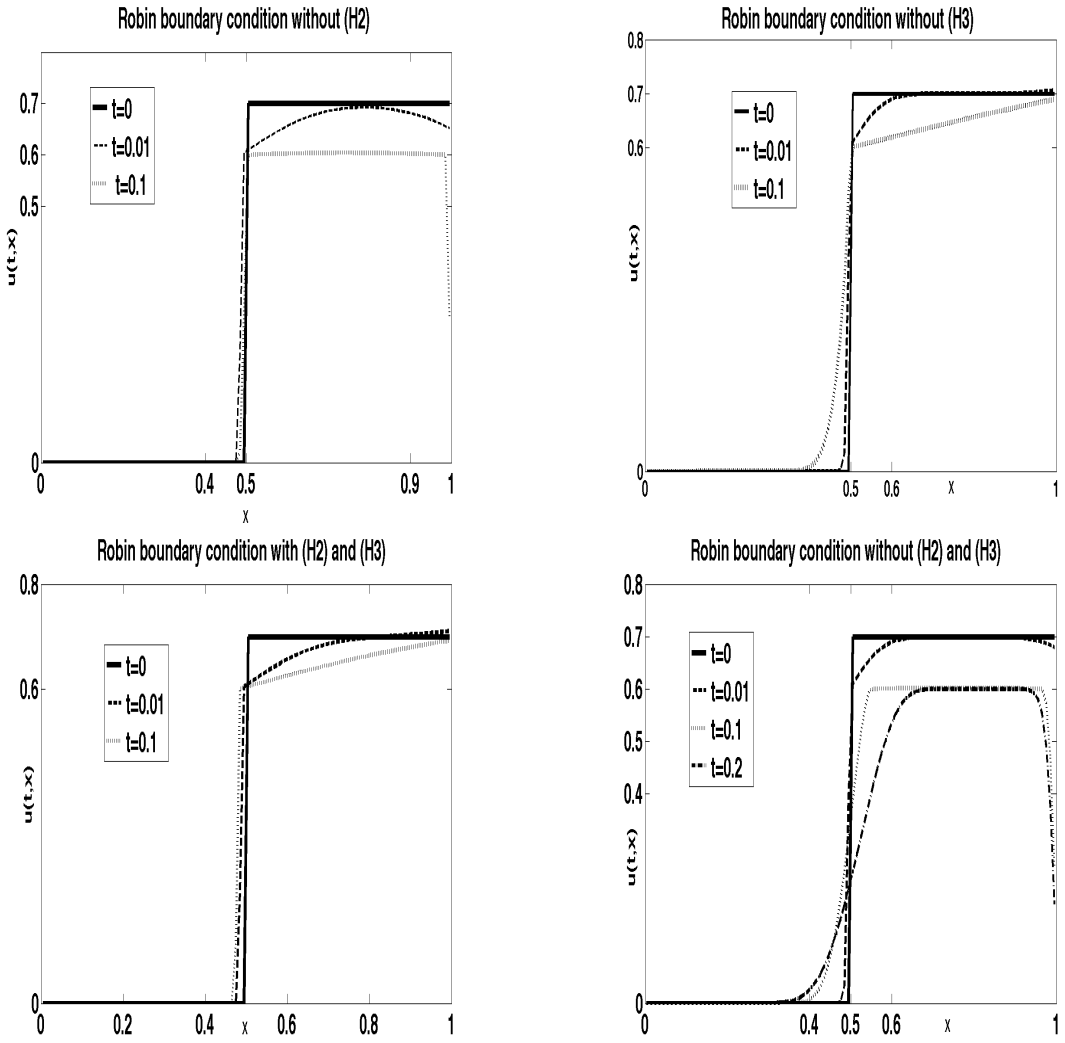

FIGURE 4.7 – Assumptions (H2) and (H3) in the case of Robin boundary problem

4.3.2 Conjectures and perspectives

First, let us describe several theoretical perspectives.

• Bounded entropy solution to the zero-flux problem seems to exist without (H1) (without (H3), for the Robin problem). We refer, in particular, to the hyperbolic case studied by Andreianov and Sbihi in [12]), where an entropy formulation has been proposed, with an indirect justification of existence. Because of the absence of a global L^∞ estimate on the approximate solutions (due to absence of (H1) or (H3)) convergence of numerical approximations has not yet been proved, even for the pure hyperbolic case of [12]. In general, it remains to find an appropriate entropy formulation for the degenerate parabolic problem, possibly using the insight from the new formulation of the Dirichlet case (Chapter 2) where the role of obstacle-type condition at the point u_c has been highlighted.

• Assumption (H2) in the Robin case ensures that the value $b(u)$ present in the integral on the boundary

makes sense, defined as $b(u)|_{(0,T)\times\partial\Omega} = \beta(b(u)|_{(0,T)\times\partial\Omega})$. In this case, in compliance with Lemma 1.5.8 we observe the absence of a boundary layer in the numerical sequence of solutions. Relaxing (H2), we could still define a boundary trace as $b(u)|_{(0,T)\times\partial\Omega} = b(u|_{(0,T)\times\partial\Omega})$ using the results of Kwon [50] and Appendix A of this thesis. But as the above numerical experiments show, a boundary layer may develop without assumption (H2). Moreover, (H2) was used in our proof of convergence of approximate solutions in Chapter 1. Therefore, while we think that the entropy formulation of Chapter 1 for Robin boundary condition is suitable even in absence of assumption (H2), the existence theorem for the Robin case without (H2) remains to be justified.

Finally, we briefly indicate two numerical perspectives.

- We expect soon investigate about implementation of the implicit scheme studied in Chapter 3.
- We will look more particularly about 2D implementation, to illustrate the results of Chapter 3.

Deuxième partie

Solution onde pour un système couplé dans un milieu hétérogène

Chapitre 5

Equation de Hamilton-Jacobi : propagation monotone d'un front

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous n'allons considérer qu'un modèle géométrique de propagation de front (on néglige l'effet de la température), ce qui revient à considérer $K(u) = 1$ dans l'équation (H). Dans ce cas, le problème (H) se ramène à :

$$(H_\star)\begin{cases} \xi_t + r(y)\sqrt{1+\xi_y^2} = \epsilon\dfrac{\xi_{yy}}{1+\xi_y^2} & y \in]0,1[,\ t>0 \\ \xi(t,1) = \xi(t,0) & t>0, \\ \xi_y(t,1) = \xi_y(t,0) & t>0, \\ \xi(0,y) = \xi_0(y) & y \in [0,1]. \end{cases}$$

Nous avons donc une équation de type Hamilton-Jacobi avec un terme de diffusion. Suivant les caractéristiques du milieu, le front peut être vu comme se propageant dans un milieu homogène (dans ce cas r est constante) où dans un milieu hétérogène (r varie suivant les différentes couches du matériau considéré). Le paramètre ϵ est le coefficient du terme de courbure.
Nous analyserons ensuite le problème $(H_\star)$ suivant certaines valeurs des paramètres r et ϵ. Ainsi, nous nous intéresserons tout d'abord au cas où la vitesse de propagation est nulle ($r = 0$). Dans ce cas, l' équation $(H_\star)$ se réduit à un problème de diffusion. Ensuite nous regarderons le cas sans terme de diffusion (ϵ est nul). Enfin, on s'intéressera au problème complet (c'est à dire r et ϵ sont non nuls). Ces observations nous permettrons de trouver une relation liant les coefficients ϵ et r pour avoir une propagation monotone (voir Définition 5.3.3) qui sera utile dans la suite de la thèse plus précisément au Chapitre 7.

5.2 Évolution du front sous le seul effet de la courbure ($r = 0$)

Dans le cas où le taux de combustion r n'est pas prise en compte dans l'équation du front, le problème $(H_\star)$, dégénère en un problème parabolique non linéaire. Une discrétisation par la méthode des

différences finies centrées du terme de diffusion permet d'avoir une approximation numérique de la solution. Ainsi, si on suppose δt le pas de temps et δy le pas en espace, on déduit le schéma suivant :

$$\xi_j^{n+1} = \xi_j^n + \epsilon\delta t \frac{\left(\xi_{j+1}^n - \xi_j^n\right) - \left(\xi_j^n - \xi_{j-1}^n\right)}{\delta y^2 + 0.25\left[\left(\xi_{j+1}^n - \xi_j^n\right) + \left(\xi_j^n - \xi_{j-1}^n\right)\right]^2}. \tag{5.1}$$

Ici $\xi_l^k = \xi(k\delta t, l\delta y)$ représente la position du front à l'instant $k\delta t > 0$ et au point $y = l\delta y$. L'équation (5.1) peut s'écrire sous la forme :

$$\xi_j^{n+1} = \alpha\xi_{j+1}^n + (1-2\alpha)\xi_j^n + \alpha\xi_{j-1}^n \tag{5.2}$$

avec $\alpha = \dfrac{\epsilon\delta t}{\delta y^2 + 0.25\left[\left(\xi_{j+1}^n - \xi_j\right) + \left(\xi_j^n - \xi_{j-1}^n\right)\right]^2} \geq 0.$

Pour que ξ_j^{n+1} soit une combinaison convexe de ξ_{j-1}^n, ξ_j^n et ξ_{j+1}^n, il faut que : $1 + 2\alpha \geq 0$ c'est à dire

$$2\frac{\epsilon\delta t}{\delta y^2 + 0.25\left[\left(\xi_{j+1}^n - \xi_j\right) + \left(\xi_j^n - \xi_{j-1}^n\right)\right]^2} \leq 1. \tag{5.3}$$

Etant donné que

$$\frac{\epsilon\delta t}{\delta y^2 + 0.25\left[\left(\xi_{j+1}^n - \xi_j\right) + \left(\xi_j^n - \xi_{j-1}^n\right)\right]^2} \leq \frac{\epsilon\delta t}{\delta y^2}, \tag{5.4}$$

alors une condition de stabilité du schéma est donnée par

$$\frac{\delta t}{\delta y^2} \leq \frac{1}{2\epsilon}. \tag{5.5}$$

On obtient sous la condition (5.5), un principe de maximum discret. Il n'y a pas de propagation, le front reste borné entre la valeur minimum et la valeur maximum du front initial. L'étude de ce cas s'avère très utile dans la compréhension du problème couplé $(H-P)$. En effet, il peut y arriver pour certaines données du problème que la température au front soit telle que $K(u) \to 0$. Cette situation serait donc équivalente à $r = 0$. Dans ce cas, un front initial droit restera immobile. Par contre un front initial sinusoïdal (par exemple $\xi_0(y) = \sin(2\pi y)$), va s'aplatir dans le temps (voir la Figure 5.1). On remarque alors que $\xi_j^{n+1} - \xi_j^n$ n'a pas un signe constant pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

5.3 Evolution du front avec r non nul

Dans cette section, on considérera deux cas possibles : le cas où ϵ est nul et celui où ϵ est non nul.

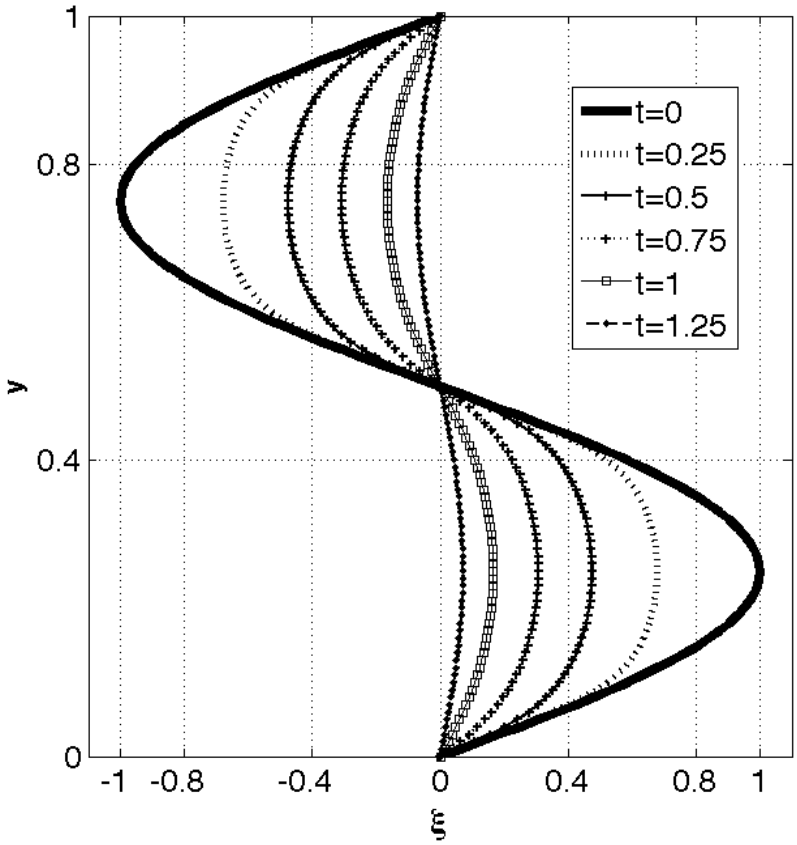

FIGURE 5.1 – Évolution d'un front sous le seul effet de la courbure

5.3.1 Propagation de front sans effet de courbure ($\epsilon = 0$)

Dans le cas où le coefficient de viscosité ϵ est nul (propagation sans effet de courbure), on se retrouve avec une équation de Hamilton-Jacobi. On propose un schéma de Godunov pour la discrétisation du problème $(H_\star)$. Ce schéma est inspiré des schémas hyperboliques. En effet, si on dérive l'équation de Hamilton-Jacobi suivante (avec r constante pour simplifier)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + rH\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big) = 0, \tag{5.6}$$

par rapport à y et en posant $w = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, on obtient l'équation hyperbolique suivante :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + r\frac{\partial H}{\partial y}(w) = 0. \tag{5.7}$$

Le schéma de Godunov pour la résolution de (5.7) est alors donné par :

$$w_j^{n+1} = w_j^n - r\frac{\delta t}{\delta y}\Big(H_{\mathrm{GOD}}(w_j^n, w_{j+1}^n) - H_{\mathrm{GOD}}(w_{j-1}^n, w_j^n)\Big) \tag{5.8}$$

où H_{GOD} est le flux numérique de Godunov défini comme suit :

$$H_{\mathrm{GOD}}(a,b) = \begin{cases} min_{v\in[a,b]}H(v) & \text{si } a \le b \\ \\ max_{v\in[b,a]}H(v) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme c'est la même fonction H qui apparaît dans les deux équations (5.6) et (5.7), on va utiliser le même flux numérique pour approcher (5.6). Nous allons donc discrétiser l'équation (5.6) comme suit :

$$v_j^{n+1} = v_j^n - r_j\delta t H_{\mathrm{GOD}}\Big(\frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{\delta y}, \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\delta y}\Big). \tag{5.9}$$

Remarque 5.3.1. *Le schéma* (5.8) *est un schéma à trois points et qui peut s'écrire sous la forme*

$$w_j^{n+1} = W(w_j^n, w_{j-1}^n, w_{j+1}^n).$$

Ce schéma sera dit monotone si W est une fonction croissante par rapport à chacune de ces trois variables. Il est connu que le schéma de Godunov est monotone sous la condition de type CFL suivante :

$$\frac{\delta t}{\delta y} \le \frac{1}{2\ \max\limits_{y\in[0,1]}(r)}. \tag{5.10}$$

Il existe plusieurs type de schémas monotones pour notre problème (Lax-Frederick, Rusanov, Godunov...). Nous avons choisi le schéma de Godunov pour son caractère upwind et le fait qu'il ne soit pas 'trop' diffusif.

5.3.2 Propagation de front avec effet de la courbure ($\epsilon \neq 0$)

Nous traitons maintenant le problème complet ($H_\star$) i.e. (r et ϵ non nul). Pour avoir un schéma numérique qui prend en compte l'effet de courbure, nous compléterons le schéma (5.9) par une discrétisation centrée du terme $\epsilon \frac{\xi_{yy}}{1+\xi_y^2}$. On obtient alors le schéma numérique suivant :

$$\xi_j^{n+1} = \xi_j^n - r_j \delta t H_{\mathrm{GOD}}\Big(\frac{\xi_j^n - \xi_{j-1}^n}{\delta y}, \frac{\xi_{j+1}^n - \xi_j^n}{\delta y}\Big) + \epsilon \delta t \frac{\Big(\xi_{j+1}^n - \xi_j^n\Big) - \Big(\xi_j^n - \xi_{j-1}^n\Big)}{\delta y^2 + 0.25\Big[\Big(\xi_{j+1}^n - \xi_j^n\Big) + \Big(\xi_j^n - \xi_{j-1}^n\Big)\Big]^2}.$$

Remarque 5.3.2. *Ce schéma est stable si la condition suivante est vérifiée*

$$\delta t \leq \min\Big(\frac{\delta y}{2 \max\limits_y r}, \frac{\delta y^2}{2\epsilon}\Big).$$

Cette condition sur le pas de temps est une conséquence de (5.5) *et* (5.10).
Notons que la présence du terme de courbure a un effet régularisant sur le front. En effet, comme le montrent la Figure 5.2 *(sans terme de courbure $\epsilon = 0$) et la Figure* 5.3 *(avec terme de courbure ici $\epsilon = 0.1$), on remarque un arrondissement des "coins". Ce constat est prévisible puisqu'on passe d'une équation d'Hamilton-Jacobi d'ordre un à une équation parabolique.*

5.3.3 Illustrations et observations numériques

On propose ici une définition qui jouera un rôle crucial dans la preuve de la monotonie du schéma qu'on adoptera pour le système couplé ($H - P$) (voir le Chapitre 7).

Définition 5.3.3. *On appellera une propagation monotone, une propagation telle que pour tout $t \geq 0$:*

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}(t, y) \leq 0 \quad \forall y \in [0,1], t \geq 0 \text{ c'est à dire } \frac{\xi_j^{n+1} - \xi_j^n}{t_{n+1} - t_n} \leq 0 \quad \forall n \geq 0, j \in \mathbb{N}. \tag{5.11}$$

S'il existe au moins un temps $t \geq 0$ tel que (5.11) *ne soit pas vérifié, alors la propagation sera dite non-monotone.*

Pour un front initial donné par une droite, la propagation du front se fait de la droite vers la gauche (voir Figure 5.4, pour un milieu homogène et Figure 5.5, pour un milieu hétérogène). On a bien une propagation monotone. C'est n'est pas toujours le cas pour un front initial quelconque. Par exemple, en partant d'un front initial sinusoïdal, on peut avoir une propagation non monotone. Si on prend $\epsilon = 0.1$, la propagation reste monotone dans les deux cas (voir Figures 5.6 et 5.7). Par contre, avec $\epsilon = 1$, on perd le caractère monotone de la propagation dans les deux précédents cas (voir Figures 5.8 et 5.9). Ces deux figures illustrent bien une propagation non monotone suivant la Définition 5.3.3. Cette observation nous suggère l'existence d'une relation entre r et ϵ pour éviter des propagations non-monotones. Pour des

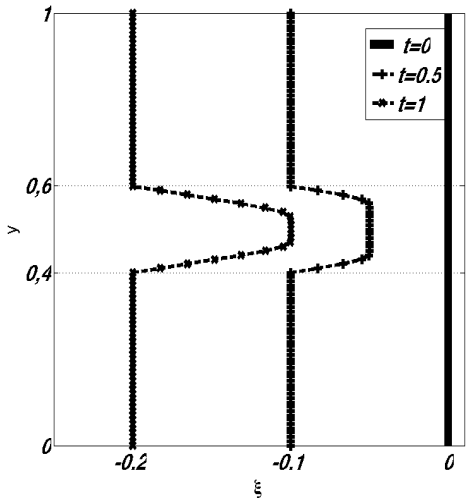

FIGURE 5.2 – Sans effet de courbure

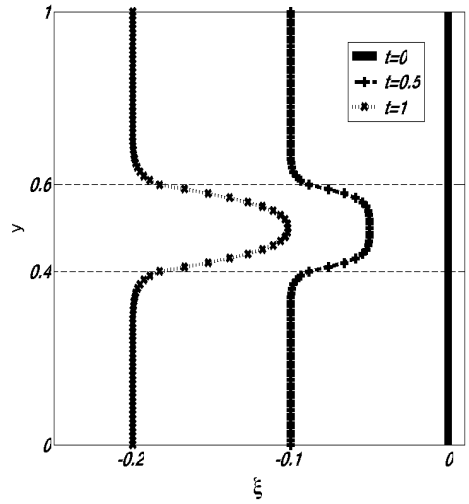

FIGURE 5.3 – Avec effet de courbure

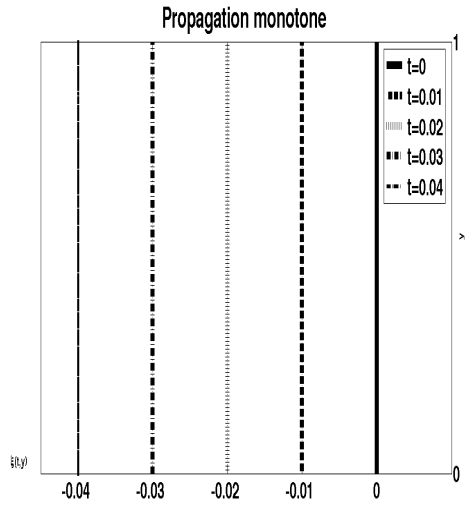

FIGURE 5.4

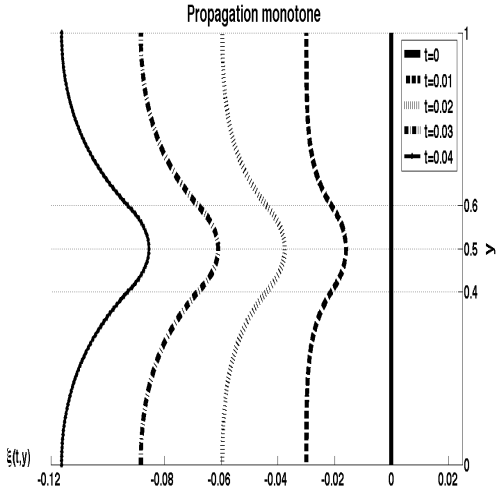

FIGURE 5.5

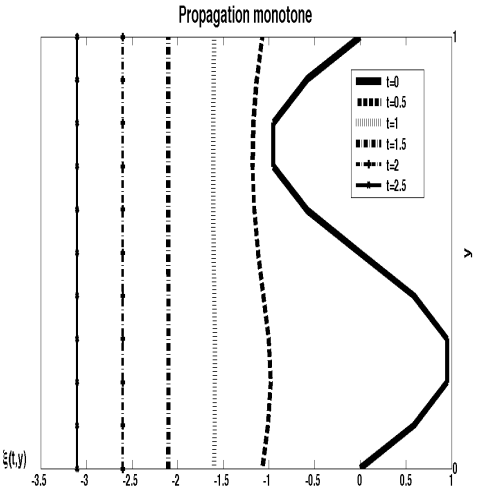

FIGURE 5.6

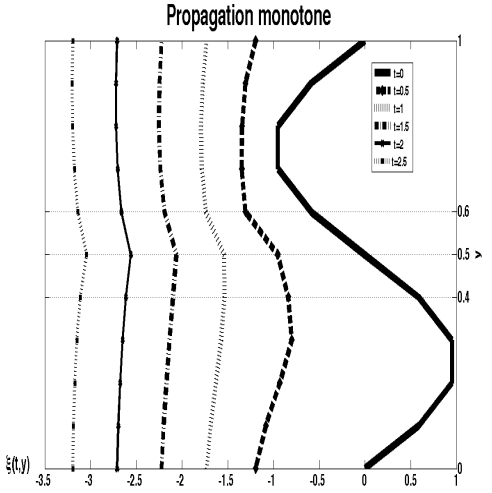

FIGURE 5.7

raisons de monotonie de notre schéma globale proposé au Chapitre 7 pour la discrétisation su système $(H - P)$, nous aurons besoin d'écarter les propagations non-monotones. Dans le paragraphe suivant, nous donnerons une condition suffisante pour avoir des propagations monotones.

Figures	Valeurs de ϵ	Valeurs de r	Type de propagation
5.8	1	1	Propagation non monotone
5.9	1	1	Propagation non monotone
5.6	0.1	1	Propagation monotone
5.7	0.1	1	Propagation monotone

TABLE 5.1 – Type de propagation avec différentes valeurs de r et ϵ

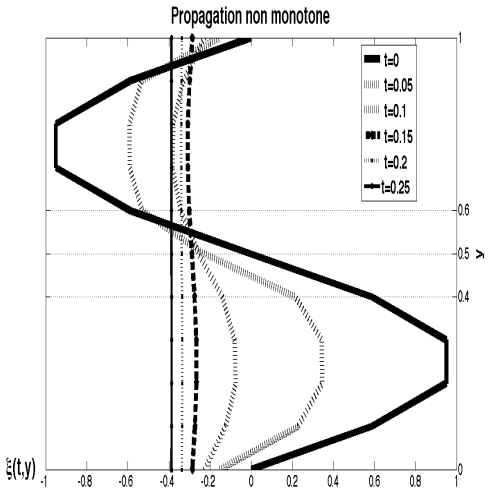

FIGURE 5.8

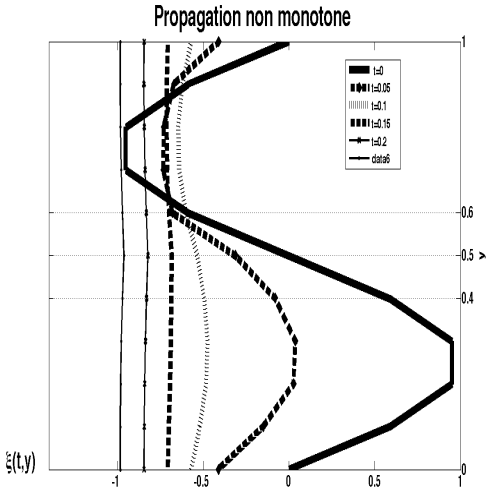

FIGURE 5.9

5.4 Condition de monotonie

L'objectif de cette partie est d'établir une condition sur ϵ, r et ξ_0 pour que ξ_t soit négative ou nulle, pour tout $t > 0$. Pour cela, on va faire appel à un résultat de principe de maximum pour des problèmes paraboliques.
Le principal résultat de ce chapitre est donné par le théorème suivant :

Théorème 5.4.1. *Pour tout r, ξ_0 et ξ suffisamment régulières, on a $\xi_t \leq 0$ pour tout $y \in [0,1]$ si :*

$$\epsilon \max_y \xi_{yy}(0,y) \leq r_{\min}. \tag{5.12}$$

Remarque 5.4.2. *Notons que dans le cas où $\max_y \xi_{0,yy} = 0$ alors ξ_t est strictement négatif pour tout $t > 0$.*

Preuve. On sait d'après [33], pour tout $\xi_0 \in W^{2,\infty}(]0,1[)$ que le problème $(H_\star)$ admet une unique solution telle que $\xi_y \in W^{1,\infty}(]0,+\infty[\times]0,1[)$.
Posons maintenant $V(t,y) = \xi_t$. En dérivant la première équation de $(H_\star)$ par rapport à la variable t on obtient

$$\frac{\partial \xi_t}{\partial t} + r(y)\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sqrt{1+\xi_y^2}\Big) - \epsilon\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\xi_{yy}}{1+\xi_y^2}\Big) = 0.$$

On calcule ensuite les dérivées partielles suivantes

$$\frac{\partial \xi_t}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t}; \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sqrt{1+\xi_y^2}\Big) &= \frac{\frac{\partial}{\partial t}\Big(1+\xi_y^2\Big)}{2\sqrt{1+\xi_y^2}} = \frac{\xi_y(\xi_t)_y}{\sqrt{1+\xi_y^2}} \\ &= \frac{\xi_y}{\sqrt{1+\xi_y^2}} V_y \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\xi_{yy}}{1+\xi_y^2}\Big) = \frac{\Big(1+\xi_y^2\Big)\Big(\xi_t\Big)_{yy} - \xi_{yy}\frac{\partial}{\partial t}\Big(1+\xi_y^2\Big)}{\Big(1+\xi_y^2\Big)^2}$$
$$= \frac{1}{\Big(1+\xi_y^2\Big)}V_{yy} - \frac{2\xi_{yy}\xi_y}{\Big(1+\xi_y^2\Big)^2}V_y. \tag{5.15}$$

Ainsi, d'après les relations (5.13), (5.14), (5.15), V vérifie l'équation parabolique

$$V_t + b(y)V_y - a(y)V_{yy} = 0 \text{ dans} \quad U =]0,T]\times]0,1[\tag{5.16}$$

avec :

$$a(t,y) = \frac{\epsilon}{1+\xi_y^2}$$
$$b(t,y) = r(y)\frac{\xi_y}{\sqrt{1+\xi_y^2}} + \frac{2\epsilon\xi_{yy}\xi_y}{\Big(1+\xi_y^2\Big)^2}.$$

Les fonctions a et b sont bornées vu que ξ_y et ξ_{yy} sont bornées. Par le principe de maximum, on déduit alors que

$$\max_{t,y} V(t,y) \leq \max_{y} V(0,y)$$

c'est à dire

$$\max_{t,y} \xi_t(t,y) \leq \max_{y} \xi_t(0,y). \tag{5.17}$$

Or

$$\xi_t(0,y) = \epsilon\frac{\xi_{yy}(0,y)}{1+\Big(\xi_y(0,y)\Big)^2} - r(y)\sqrt{1+\Big(\xi_y(0,y)\Big)^2}.$$

D'où $\xi_t(0,y) \leq 0$ si et seulement si

$$\forall y \in [0,1] \;\; \epsilon\xi_{yy}(0,y) \leq r(y)\Big(1+\Big(\xi_y(0,y)\Big)^2\Big)^{\frac{3}{2}}.$$

Une condition suffisante pour que $\xi_t(t,y) \leq 0$ est alors donnée par

$$\forall y \in [0,1], \quad \epsilon\xi_{yy}(0,y) \leq r(y). \tag{5.18}$$

C'est à dire

$$\epsilon \max_{y} \xi_{yy}(0,y) \leq r_{min}. \tag{5.19}$$

□

Remarque 5.4.3. *Dans le cas où $r = 0$ il est claire que $\xi_t \leq 0$ dès que $\xi_{yy} \leq 0$.*

Chapitre 6

Propagation d'un front en milieu homogène : le cas d'un problème à frontière libre en 1 D

6.1 Introduction

Avant de résoudre le problème complet (le système $(H-P)$), nous nous proposons ici de regarder le cas le plus simple d'une propagation d'un front droit en milieu homogène. Cela nous permettra de mettre en évidence entre autre les problèmes liés à la discrétisation de la condition limite au front. On se place en dimension un d'espace. Le système $(H-P)$ se réduit au système (H_0-P_0) suivant :

$$(H_0)\begin{cases} \xi_t & = r, \quad t>0 \\ \xi(0) & = 0. \end{cases}$$

$$(P_0)\begin{cases} u_t - du_{xx} & = 0 & \text{dans } x<\xi(t),\ t>0 \\ du_x & = r & \text{sur } x=\xi(t),\ t>0 \\ u(t,x) & \to 0 & x\to-\infty\ ,\ t>0 \\ u(0,x) & = u_0(x) & \text{dans } x\le\xi(0). \end{cases}$$

Ici, $u(t,x)$ représente toujours la température et $\xi(t)$ la position du front à l'instant t donné. La vitesse de propagation du front r est supposée constante tout comme le coefficient de diffusivité thermique d. Le problème consiste à trouver la température u dans le domaine délimité par la frontière libre (ici le front). Contrairement au cas où l'interface (la frontière libre) n'est pas connu d'avance (par exemple dans le cas des problèmes avec changement de phases [69]), la connaissance a priori du mouvement de l'interface peut nous permettre de nous placer dans un repère fixe lié au front. Pour cela un changement de variable pour fixer le front peut être envisagé. Ainsi à l'aide du changement de variable suivant : $z=x-\xi(t)$, on se ramène au système $(H_0-\widetilde{P_0})$ avec

$$(\widetilde{P_0})\begin{cases} u_t + ru_z - du_{zz} & = 0 & z<0,\ t>0 \\ du_z & = r & z=0,\ t>0 \\ u(t,z) & \to 0 & z\to-\infty\ ,\ t>0 \\ u(0,z) & = u_0(z). & -\infty<z\le 0 \end{cases}$$

Le reste de ce chapitre se présente comme suit : la section 6.2 est consacrée au comportement asymptotique en temps la solution du problème $(\widetilde{P_0})$ qui converge vers la solution onde (voir Définition 6.2.1). Dans la section 6.3, on propose un schéma monotone prenant en compte la condition limite au front. Enfin, dans la dernière section nous présentons quelques simulations numériques pour vérifier la convergence de la solution numérique vers l'unique solution onde.

6.2 Existence de solution onde du problème

Dans cette section, on s'intéressera au comportement asymptotique en temps de la solution de $(\widetilde{P_0})$. Remarquons qu'ici nous sommes dans le cas simple d'une équation parabolique linéaire avec des coefficients constants. L'existence d'une solution unique est assurée par des résultats classiques (voir par exemple [53]). La régularité de laquelle dépendant uniquement de celle de la condition initiale.
En utilisant les transformées de Laplace, nous prouverons la convergence vers une solution onde de la solution du problème lorsque t tend vers l'infini. Définissons d'abord la notion de solution onde pour le système d'équations couplées $(H_0 - \widetilde{P_0})$:

6.2.1 Notion de solution onde

Définition 6.2.1. *On appelle solution onde du système $(H_0-\widetilde{P_0})$, le couple (c, u) avec $c \in \mathbb{R}^+$ représentant la vitesse de propagation du front ($\xi(t) = -ct$) et u une température stationnaire dans le domaine.*

Remarque 6.2.2. *Etant donné que le front se propage avec une vitesse constante r, et $\exp(\frac{r}{d}z)$ est solution du problème stationnaire associé au problème d'évolution $(\widetilde{P_0})$ alors le couple $(r, \bar{u}(z) = \exp(\frac{r}{d}z))$ est une solution onde du système $(H_0-\widetilde{P_0})$ (au sens de la Définition 6.2.1). D'ailleurs dans ce cas, c'est l'unique solution onde.*

6.2.2 Convergence vers la solution onde

Soit u la solution du problème $(\widetilde{P_0})$. Définissons pour $p > 0$, $u^\star(p, z)$ la transformée de Laplace en temps de la fonction $u(t, z)$ donnée par :

$$u^\star(p, z) = \int_0^{+\infty} u(t, z) \exp(-pt) dt.$$

Remarque 6.2.3. *On sait qu'il existe une relation (théorème de la valeur finale) entre la limite à l'infini d'une fonction et la limite en zéro de sa transformée de Laplace. Si les limites indiquées existent alors*

$$\lim_{t \to +\infty} u(t, z) = \lim_{p \to 0} p u^\star(p, z). \tag{6.1}$$

Preuve. En effet, la transformée de Laplace de la dérivée de u par rapport à t donne :

$$(u_t)^\star(p, z) = \int_0^{+\infty} u_t(t, z) \exp(-pt) dt = p u^\star - u(0, z).$$

D'après le théorème de Lebesgue, la limite du membre de gauche quand p tend vers zéro est

$$\begin{aligned}\lim_{p\to 0}\int_0^{+\infty} u_t(t,z)\exp(-pt)dt &= \int_0^{+\infty} u_t(t,z)dt = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R u_t(t,z)dt\\ &= \lim_{R\to+\infty} u(R,z) - u(0,z)\\ &= \lim_{t\to+\infty} u(t,z) - u(0,z). \end{aligned} \tag{6.2}$$

La limite du membre de droite quand $p \to 0$ est

$$\lim_{p\to 0} pu^\star - u(0,z). \tag{6.3}$$

L'égalité cherchée s'obtient en comparant (6.2) et (6.3). □

Théorème 6.2.4. *On suppose que la donnée initiale u_0 est intégrable. Alors, la solution de $(\widetilde{P_0})$ converge vers la solution onde $\bar{u}(z) = \exp(\frac{r}{d}z)$ lorsque t tend vers l'infini.*

Preuve. Considérons le problème stationnaire

$$(\widetilde{S_0})\begin{cases} ru_z - du_{zz} &= 0 \quad z<0,\\ du_z &= r \quad z=0,\\ u(z) &\to 0 \quad z\to-\infty. \end{cases}$$

La fonction $\bar{u}(z) = exp(\frac{r}{d}z)$ est solution du problème $(\widetilde{S_0})$, si bien que la fonction $v(t,z) = u(t,z) - \bar{u}(z)$ est solution du problème

$$(\widetilde{P_1})\begin{cases} v_t + rv_z - dv_{zz} &= 0 \quad z<0,\ t>0\\ v_z &= 0 \quad z=0,\ t>0\\ v(t,z) &\to 0 \quad z\to-\infty\ ,\ t>0\\ v(0,z) &= v_0(z). \quad -\infty < z \le 0, \end{cases}$$

avec $v_0(z) = u_0(z) - \bar{u}(z)$. On est donc ramené à démontrer la convergence de $v(t,z)$ vers 0 quand $t \to \infty$. La transformée de Laplace de l'équation de v donne

$$pv^\star + rv_z^\star - dv_{zz}^\star = v_0. \tag{6.4}$$

Une solution de (6.4) est la somme d'une solution particulière de (6.4) et d'une solution de l'équation homogène associée à (6.4). Considérons alors l'équation homogène associée à (6.4)

$$dv_{zz}^\star - rv_z^\star - pv^\star = 0. \tag{6.5}$$

La solution de (6.5) est donnée par :

$$v^\star(p,z) = \widetilde{A}(p)\exp(c_1 z) + \widetilde{B}(p)\exp(c_2 z) \tag{6.6}$$

avec

$$c_1 = \frac{r - \sqrt{r^2+4dp}}{2d} < 0 \text{ et } c_2 = \frac{r + \sqrt{r^2+4dp}}{2d} > 0. \tag{6.7}$$

Il nous reste à trouver une solution particulière de (6.4). Pour cela, cherchons une solution particulière de (6.4) sous la forme :

$$v^\star(p,z) = A(p,z)\exp(c_1 z) + B(p,z)\exp(c_2 z). \tag{6.8}$$

La dérivée première de $v^\star$ par rapport à z est :

$$v_z^\star(p,z) = A_z\exp(c_1 z) + B_z\exp(c_2 z) + c_1 A\exp(c_1 z) + c_2 B\exp(c_2 z).$$

Cherchons une solution qui vérifie en plus :

$$A_z(p,z)\exp(c_1 z) + B_z(p,z)\exp(c_2 z) = 0. \tag{6.9}$$

Calculons ensuite la dérivée seconde de $v^\star$ par rapport à z :

$$v_{zz}^\star(p,z) = c_1 A_z\exp(c_1 z) + c_2 B_z\exp(c_2 z) + c_1^2 A\exp(c_1 z) + c_2^2 B\exp(c_2 z).$$

En écrivant que $v^\star$ est solution de (6.4), il reste, compte-tenue du fait que c_1 et c_2 annulent $p + rZ - dZ^2$,

$$-dc_1 A_z\exp(c_1 z) - dc_2 B_z\exp(c_2 z) = v_0. \tag{6.10}$$

On résout alors un système linéaire en A_z et B_z avec les équations (6.9) et (6.10) pour trouver :

$$\begin{cases} A_z(p,z) &= \dfrac{v_0}{d(c_2-c_1)}\exp(-c_1 z) \\ \\ B_z(p,z) &= \dfrac{v_0}{d(c_1-c_2)}\exp(-c_2 z). \end{cases}$$

Une solution de (6.4) est alors :

$$v^\star(p,z) = \widetilde{A}(p)\exp(c_1 z) + \widetilde{B}(p)\exp(c_2 z) + A(p,z)\exp(c_1 z) + B(p,z)\exp(c_2 z), \tag{6.11}$$

où

$$\begin{cases} A(p,z) &= \frac{1}{d(c_2-c_1)}\displaystyle\int_{-\infty}^{z} v_0(x)\exp(-c_1 x)dx \\ \\ B(p,z) &= \frac{1}{d(c_1-c_2)}\displaystyle\int_{-\infty}^{z} v_0(x)\exp(-c_2 x)dx. \end{cases}$$

Reste à déterminer $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ via les conditions aux limites.
Commençons par remarquer que la condition de Dirichlet $\lim\limits_{z\to-\infty} v(t,z) = 0$ implique $\lim\limits_{z\to-\infty} v^\star(p,z) = 0$.
En effet, soit $p > 0$, puisque $v(t,z)$ tend vers 0 lorsque $z \to -\infty$ alors d'après la définition de $v^\star$, il est facile de voir que $\forall\epsilon > 0$, $\lim\limits_{z\to-\infty} v^\star(p,z) \leq \dfrac{\epsilon}{p}$.
Faisons donc tendre z vers $-\infty$ dans (6.11) et regardons chacun des quatre termes résultants : On voit que $\widetilde{B}(p)\exp(c_2 z)$ tend vers zéro à l'infini car $c_2 > 0$.
Regardons maintenant le terme en $A(p,z)$. On a

$$A(p,z)\exp(c_1 z) = \frac{1}{d(c_2-c_1)}\int_{-\infty}^{z} v_0(x)\exp[c_1(z-x)]dx,$$

avec $c_1(z-x) \leq 0$, alors

$$A(p,z)\exp(c_1 z) \leq \frac{1}{d(c_2-c_1)}\int_{-\infty}^{z}|v_0(x)|dx.$$

En utilisant le fait que v_0 est dans L^1, il s'en suit que

$$\frac{1}{d(c_2-c_1)}\lim_{z\to-\infty}\int_{-\infty}^{z}|v_0(x)|dx = 0 \Rightarrow \lim_{z\to-\infty}A(p,z)\exp(c_1 z) = 0.$$

Examinons le terme $B(p,z)\exp(c_2 z)$:

$$B(p,z)\exp(c_2 z) = \frac{1}{d(c_1-c_2)}\int_{-\infty}^{z}v_0(x)\exp[c_2(z-x)]dx.$$

Dans un premier temps nous allons considérer une condition initiale v_0 à décroissance rapide plus précisément, nous allons imposer :

$$\lim_{z\longrightarrow-\infty}\int_{-\infty}^{z}v_0(x)\exp(-cx)dx = 0 \text{ pour un } c>0 \text{ donné.} \tag{6.12}$$

Par exemple, $v_0(x)$ de la forme $\exp(\gamma x)$ avec $\gamma > c$ convient.
Remarquons aussi, à ce stade, que $c_2 = c_2(p)$ via (6.7) et on s'intéresse ici à des p 'petits' c'est à dire à la limite quand $p \to 0$. Donc en prenant par exemple $c = \frac{r}{d} + 1$, sous l' hypothèse (6.12), B tend vers zéro quand z tend vers moins l'infini.
Ainsi lorsque z tend vers moins l'infini, nécessairement le terme restant $\widetilde{A}(p)\exp(c_1 z)$ est nul, c'est à dire $\widetilde{A}(p) = 0$. L'équation (6.11) devient :

$$\begin{aligned} v^\star(p,z) = \widetilde{B}(p)\exp(c_2 z) &+ \frac{1}{d(c_2-c_1)}\int_{-\infty}^{z}v_0(x)\exp[c_1(z-x)]dx \\ &+ \frac{1}{d(c_1-c_2)}\int_{-\infty}^{z}v_0(x)\exp[c_2(z-x)]dx. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Maintenant, nous allons utiliser la deuxième condition aux limites à savoir $v_z(t, z=0) = 0$ c'est à dire $v_z^\star(p,0) = 0$.
En dérivant (6.13) par rapport à z, on a

$$\begin{aligned} v_z^\star(p,z) = c_2\widetilde{B}(p)\exp(c_2 z) &+ \frac{c_1}{d(c_2-c_1)}\int_{-\infty}^{z}v_0(x)\exp[c_1(z-x)]dx \\ &+ \frac{c_2}{d(c_1-c_2)}\int_{-\infty}^{z}v_0(x)\exp[c_2(z-x)]dx + \frac{v_0(z)}{d(c_1-c_2)} + \frac{v_0(z)}{d(c_2-c_1)}. \end{aligned}$$

Ainsi, en $z = 0$ on a :

$$\begin{aligned} v_z^\star(p,0) = \frac{1}{d(c_2-c_1)}&\Big[c_1\int_{-\infty}^{0}v_0(x)\exp(-c_1 x)dx - c_2\int_{-\infty}^{0}v_0(x)\exp(-c_2 x)dx\Big] \\ &+ c_2\widetilde{B}(p). \end{aligned}$$

Puisque $v_z^\star(p,0) = 0$, nous trouvons

$$\widetilde{B}(p) = -\frac{1}{d(c_2-c_1)}\Big[\frac{c_1}{c_2}\int_{-\infty}^{0}v_0(x)\exp(-c_1 x)dx - \int_{-\infty}^{0}v_0(x)\exp(-c_2 x)dx\Big].$$

Par conséquent, une expression de $v^\star$ est donnée par :

$$\begin{aligned} v^\star(p,z) = & \frac{1}{d(c_2-c_1)} \int_{-\infty}^{z} v_0(x) \exp[c_1(z-x)]dx \\ & + \frac{1}{d(c_1-c_2)} \int_{-\infty}^{z} v_0(x) \exp[c_2(z-x)]dx \\ & - \frac{1}{d(c_2-c_1)} \frac{c_1}{c_2} \int_{-\infty}^{0} v_0(x) \exp(-c_1 x) \exp(c_2 z)dx \\ & + \frac{1}{d(c_2-c_1)} \int_{-\infty}^{0} v_0(x) \exp[c_2(z-x)]dx. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Maintenant nous allons vérifier que $v^\star$ est borné pour tout z lorsque p tend vers zéro. Pour voir cela, étudions les quatre termes de (6.14) lorsque p tend vers zéro. Pour p tendant vers zéro, on a c_1 tend vers zéro et c_2 tend vers $\frac{r}{d}$, d'où

$$\lim_{p\to 0} \frac{1}{d(c_2-c_1)} \int_{-\infty}^{z} v_0(x) \exp[c_1(z-x)]dx = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{z} v_0(x)dx \leq \frac{\|v_0\|_{L^1}}{r}.$$

Ensuite, sous l'hypothèse (6.12) le terme $B(p,z)\exp(c_2 z)$ est borné pour tout z. Il reste à examiner les deux derniers termes de (6.14). Tout d'abord, intéressons nous à $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} v_0(x) \exp(-c_1 x) \exp(c_2 z)dx$ on a

$$\int_{-\infty}^{0} v_0(x) \exp(-c_1 x) \exp(c_2 z)dx \leq \int_{-\infty}^{0} v_0(x)dx \leq \|v_0\|_{L^1} < \infty,$$

ce qui montre que

$$\lim_{p\to 0} \frac{-1}{d(c_2-c_1)} \frac{c_1}{c_2} \int_{-\infty}^{0} v_0(x) \exp(-c_1 x) \exp(c_2 z)dx = 0.$$

Regardons maintenant $\displaystyle\frac{1}{d(c_2-c_1)} \int_{-\infty}^{0} v_0(x) \exp[c_2(z-x)]dx$. Ce terme est borné d'après l'hypothèse (6.12) lorsque p tend vers zéro.
Finalement on déduit que $v^\star(p,z)$ reste borné quand p tend vers zéro, d'où

$$\lim_{p\to 0} pv^\star(p,z) = 0.$$

On conclut d'après (6.1), que sous l'hypothèse (6.12) de décroissance rapide de la condition initiale, v tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini.

Maintenant, considérons une condition initiale v_0 générale. On va approcher v_0 par une suite de conditions initiales $(v_{0,k})_k$ telle que la suite $(v_{0,k})_k$ pour tout k, soit à support compact. Comme les $(v_{0,k})_k$ vérifient (6.12), la suite de solutions $(v_k)_k$ converge vers 0 pour t tendant vers $+\infty$. On a

$$\|v(t,.)\| = \|v(t,.) - v_k(t,.) + v_k(t,.)\| \leq \|v(t,.) - v_k(t,.)\| + \|v_k(t,.)\|.$$

En utilisant le principe de maximum, on a $\|v - v_k\| \leq \|v_0 - v_{0,k}\|$, et donc

$$\|v(t,.)\| \leq \|v_0 - v_{0,k}\| + \|v_k(t,.)\|.$$

En passant d'abord à la limite en k puis en t, on obtient la convergence de v vers 0. Finalement en revenant à u, on a bien la convergence de $u(t,z)$ vers $\bar{u}(z)$ quand $t \to +\infty$. □

6.3 Discrétisation

Cette partie est consacrée à la discrétisation du problème $(\widetilde{P}_0)$. Nous utiliserons ici la méthode des différences finies. Soit δt le pas de temps. Pour les raisons numériques, nous considérerons $\Omega =]-L, 0[$ avec un $L > 0$, suffisamment grand et on prendra $u(t, z = -L) = 0$, $\forall t > 0$. On construit un maillage uniforme constitué d'une collection de point $(z_i)_{1,...,nz}$ avec pour pas d'espace uniforme $\delta z = \frac{L}{nz-1}$. Ainsi on localisera uns point z_i par $z_i = -L + (i-1)\delta z$ avec $i \in \{1, ..., nz\}$.

6.3.1 Discrétisation à l'intérieur du domaine

Nous utilisons un schéma de différences finies avec une discrétisation centrée pour le terme de diffusion et décentrée (upwind) pour le terme de convection. Nous obtenons ainsi pour $i = 2, ..., nz - 1$

$$u_i^{n+1} = \Big(r\frac{\delta t}{\delta z} + d\frac{\delta t}{\delta z^2}\Big)u_{i-1}^n + \Big(1 - r\frac{\delta t}{\delta z} - 2d\frac{\delta t}{\delta z^2}\Big)u_i^n + \frac{\delta t}{\delta z^2}u_{i+1}^n. \tag{6.15}$$

6.3.2 Discrétisation de la température au front

Nous pouvons approcher la température au front de plusieurs façons et faire une comparaison des méthodes afin de choisir la meilleure approximation de la température au front. Cette comparaison se base sur le faite qu'en partant avec une température initiale solution du problème stationnaire, la solution approchée du problème doit être proche de la valeur 1 au front. Notons u_f la température au front. On pose $\alpha = \dfrac{r}{d}$. On peut discrétiser la condition de Neumann de la façon suivante :

$$u_f^{n+1} = u_{f-1}^{n+1} + \alpha\delta z. \tag{6.16}$$

En effet,

$$du_z = r \Longrightarrow d\frac{u_f^{n+1} - u_{f-1}^{n+1}}{\delta z} = r \Longrightarrow u_f^{n+1} = u_{f-1}^{n+1} + \alpha\delta z.$$

Deux autres schémas, pour discrétiser la température au front sont données par les propositions suivantes :

Proposition 6.3.1. *Une discrétisation de la condition de Neumann est donnée par :*

$$u_f^{n+1} = \exp\Big(\frac{\ln(u_{f-1}^{n+1}) + \alpha\delta z}{1 + \alpha\delta z}\Big). \tag{6.17}$$

Preuve. On effectue un changement d'inconnue, en posant dans ce cas $v(t, z) = \ln(u(t, z))$. Par la dérivation des fonctions composées, on a

$$\begin{cases} u_t = \exp(v)v_t, \\ u_z = \exp(v)v_z; \\ u_{zz} = \exp(v)v_{zz} + \exp(v)v_z^2. \end{cases} \tag{6.18}$$

On obtient le problème suivant :

$$\begin{cases} v_t + rv_z - v_z^2 - dv_{zz} &= 0, & \text{pour } z < 0, \\ dv_z &= r\exp(-v); & \text{pour } z = 0. \end{cases} \tag{6.19}$$

On tire profit du calcul de la température u pour le problème $\widetilde{P}_0$ à l'instant $t = (n+1)\delta t$ jusqu'au noeud $-\delta z$ pour déterminer v_f^{n+1}. On utilise ensuite le changement d'inconnue, pour déduire la température au front à l'instant $(n+1)\delta t$.
La condition au bord de Neumann pour v se calcule comme suit :

$$dv_z = r\exp(-v_f) \Longrightarrow d\frac{v_f - v_{f-1}}{\delta z} = r\exp(-v_f) \Longrightarrow v_f = v_{f-1} - \frac{r}{d}\delta z\exp(-v_f).$$

La solution $u(t,x) = \exp(\frac{r}{d}z)$ tend vers 1 au front. Par conséquent v doit tendre vers 0 au front, ainsi on utilise le développement limité de $\exp(-v_f)$ au voisinage de 0, qui nous donne $\exp(-v_f) \approx 1 - v_f$. On obtient alors

$$v_f \approx \frac{v_{f-1} + \alpha\delta z}{1 + \alpha\delta z}. \tag{6.20}$$

On déduit alors

$$u_f^{n+1} \approx \exp\Big(\frac{\ln(u_{f-1}^{n+1}) + \alpha\delta z}{1 + \alpha\delta z}\Big).$$

□

Proposition 6.3.2. *Une troisième façon de discrétiser la condition de Neumann est de la façon suivante :*

$$u_f^{n+1} \approx \exp\Big(v_f^{n+1}\Big); \tag{6.21}$$

où v_f^{n+1} est solution de $v_f^{n+1} - v_{f-1}^{n+1} - \alpha\delta z\exp(-v_f^{n+1}) = 0$.

Preuve. Il s'agira de résoudre l'équation $g(v_f) = 0$ où $g(v_f) = v_f - v_{f-1} - \alpha\delta z\exp(-v_f)$. Pour rappel, la méthode de Newton, pour la résolution de $g(x) = 0$ s'écrit $g(x) = 0$

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}, \\ x_0 = 0; \end{cases} \tag{6.22}$$

Par cette méthode, on détermine v_f solution de $g(v_f) = 0$, et on en déduit alors $u_f^{n+1} = \exp(v_f^{n+1})$. □

Comparaison des trois méthodes pour différentes valeurs de α

Pour des raisons de simplicité, nous supposerons $r = 1$.
Pour des valeurs de d, on donne les valeurs de la température au front obtenus par les trois méthodes.

Valeurs de d	Méthode 1	Méthode 2	Méthode 3
1	1.0645	1.0246	1.0246
0.1	2	1.3591	1.4393
0.01	11	2.1387	4.1622
0.001	101	2.5957	21.6678
0.0001	1001	2.6996	144.7435

Nous constatons que la méthode 2 approche mieux la solution $u(t,z) = \exp(\alpha z)$.

Remarque 6.3.3. *Remarquons aussi que plus le maillage est fin (δz petit), mieux on est proche de la solution stationnaire.*

Lemme 6.3.4. *Le schéma* (6.15)*,* (6.17) *est monotone si la condition suivante est vérifiée :*

$$\delta t \leq \frac{\delta z^2}{r\delta z + 2d}. \tag{6.23}$$

Preuve. Le schéma (6.15) peut s'écrire sous la forme $u_i^{n+1} = W(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n)$, où W est une fonction continue de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Ce schéma est donc monotone si la fonction W est croissante par rapport à chacune de ses trois variables. Pour cela, il faut que :

$$\begin{cases} \frac{\delta t}{\delta z^2} \geq 0. \\ r\frac{\delta t}{\delta z} + d\frac{\delta t}{\delta z^2} \geq 0, \\ 1 - r\frac{\delta t}{\delta z} - 2d\frac{\delta t}{\delta z^2} \geq 0. \end{cases}$$

Ces inégalités sont vraies si et seulement si 6.23 est satisfaite. □

6.4 Convergence de la solution numérique vers la solution onde : quelques simulations numériques

Dans cette partie, nous vérifierons à travers des tests numériques que la solution numérique obtenue par le schéma (6.15), (6.17) sous le condition (6.23) converge vers une solution stationnaire (solution onde) quand t devient grand. Nous supposons $r = d = 1$, $\delta z = \frac{1}{10}$.
En démarrant avec une température initiale donnée par $u_0(z) = \exp(\frac{r}{d}z)$, et en suivant l'évolution de la température numérique (voir Figure 6.2 pour différent temps), on remarque qu'il y'a convergence vers la solution onde. Ce constat est attendu car la donnée initiale considérée est égale à la solution onde. En principe la solution devrait rester stationnaire, son évolution est due aux erreurs d'approximations.
Pour mieux illustrer cette convergence, nous comparons dans la Figure 6.4, l'évolution dans le temps la valeur de la solution numérique au front par rapport à la valeur de la solution exacte au front qui est 1.
Considérons une autre condition initiale moins régulière donnée par :

$$u_0(z)\begin{cases} \frac{r}{d}z + 1 & \text{si } \frac{-r}{2d} < z \leq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec une telle donnée initiale, la Figure 6.1 nous indique aussi que la solution numérique converge vers cette même solution onde $\exp(\frac{r}{d}z)$ dans t dévient grand.
Enfin, on effectue un autre test numérique avec une condition initiale discontinue donnée par

$$u_0(z)\begin{cases} \frac{r}{d} & \text{si } \frac{-r}{2d} < z \leq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'évolution de la température à différent temps est illustrée par la Figure 6.3. Ici, aussi ce test numérique confirme la convergence vers la solution onde.

Remarque 6.4.1. *Notons que plus le maillage est fin, plus les solutions numériques sont proches de la solution onde.*

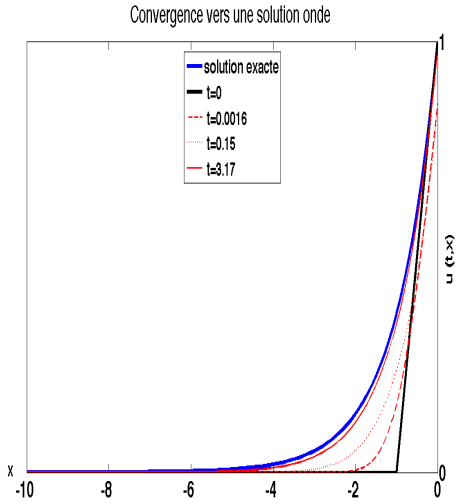

FIGURE 6.1

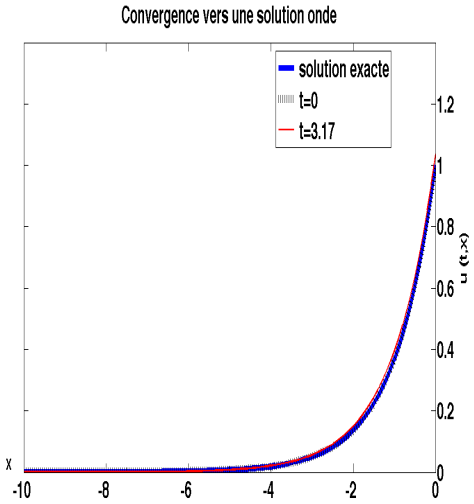

FIGURE 6.2

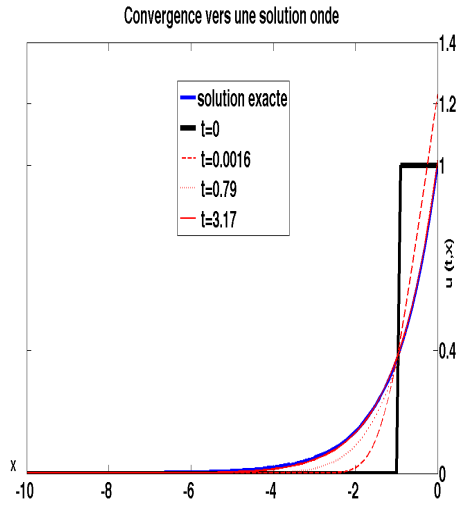

FIGURE 6.3

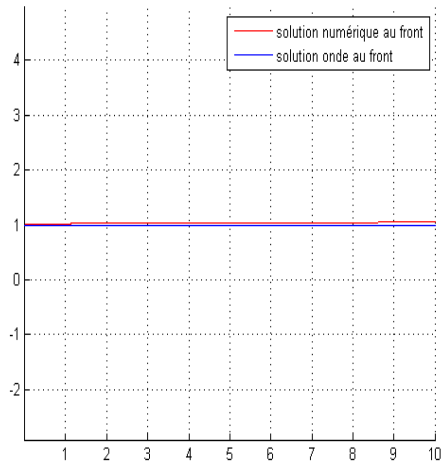

FIGURE 6.4

Chapitre 7

Propagation en milieu hétérogène : problème 2D

7.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à l'approximation numérique du problème complet c'est à dire la propagation d'un front initial périodique quelconque en milieu hétérogène (le problème 2D). L'objectif final est de vérifier la convergence (pour un temps long) de la solution numérique vers une solution onde dont l'existence à été prouvée par Alibaud et Namah dans [2]. Nous construisons un schéma numérique pour notre système couplé ($H-P$). Pour ce qui concerne la discrétisation de l'équation du front, nous allons nous inspirer du schéma vu au Chapitre 5 avec $K(u) \equiv 1$. Pour l'équation de la température, nous rappelons que nous avons un problème à frontière libre c'est à dire dans un domaine variable en temps Ω_t. Une solution serait de résoudre dans Ω_t, mais dans ce cas, on doit remailler à chaque pas de temps. Une autre façon de procéder serait de se ramener à un repère lié au front via le changement de variable $(x, y, t) \longrightarrow (z, y, t)$ avec $z = x - \xi(y, t)$. L'équation se complique avec l'apparition de dérivées croisées $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ au profit d'un domaine fixe. Ici, nous avons choisi d'adopter cette deuxième méthode. Ainsi, après le changement de variable visant à obtenir un domaine fixe par rapport au front, nous proposons un schéma pour discrétiser le problème couplé notamment en précisant la prise en compte de la condition limite au front. Nous prouvons ensuite la monotonie du schéma global. On termine cette deuxième partie de la thèse par une série de tests numériques (voir chapitre suivant) afin de vérifier la convergence de la solution numérique vers une solution onde.

7.2 Solution onde pour le système couplé ($H - P$)

Nous rappelons ici le système couplé formé du l'équation du front et de l'équation de la chaleur

$$(H)\begin{cases} \xi_t + rK(u_f)\sqrt{1+\xi_y^2} = \epsilon \dfrac{\xi_{yy}}{1+\xi_y^2} & y \in]0,1[, \quad t>0 \\ \xi(t,1) = \xi(t,0) & t>0, \\ \xi_y(t,1) = \xi_y(t,0) & t>0, \\ \xi_{|_{t=0}} = \xi_0(y) & y \in [0,1]. \end{cases}$$

$$(P)\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(\, d\, \nabla u) &= 0 & (x,y)\in\Omega_t,\quad t>0\\ d\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(t,.,y) &= \theta\beta V_n & (x,y)\in\Gamma_t,\quad t>0\\ u(t,x,y) &= 0 & x\to-\infty\\ u(t,x,1) &= u(t,x,0)\\ u_y(t,x,1) &= u_y(t,x,0)\\ u_{|_{t=0}} &= u_0(x,y). \end{cases}$$

Le domaine spatial repéré à chaque instant $t>0$ est donné par :

$$\begin{cases} \Omega_t = \{(x,y)\ \ /y\in]0,1[\text{ avec } x<\xi(t,y)\}\,,\\ \Gamma_t = \{(x,y)\ \ /x=\xi(t,y)\}\,,\\ \Gamma_0 = \partial\Omega_t\cap\{y=0\}\,,\\ \Gamma_1 = \partial\Omega_t\cap\{y=1\}\,. \end{cases}$$

On donne la définition de solution onde telle que présentée par Alibaud et Namah dans [2].

Définition 7.2.1. *Soient les paramètres r et d 1-périodiques en y. On appelle solution onde du système $(H-P)$, le triplet (c,v,u) avec $c\in\mathbb{R}^+$ une vitesse constante de propagation du front, $v=v(y)$ un profil établi du front et u une température stationnaire dans le domaine, de sorte qu' à partir d'un certain temps, le front s'écrit :*

$$\phi(t,y) = -ct + v(y).$$

et la température

$$u(t,x,y) = u(x,y).$$

On suppose dans toute la suite l'hypothèse suivante :

$$0<d_{\min}\le d\le d_{\max}; 0<r_{\min}\le r\le r_{\max} \text{ et } K \text{ une fonction positive bornée.} \tag{7.1}$$

Notre objectif ici est de vérifier qu'on a une convergence de la solution numérique vers une solution onde pour un temps long. C'est dire qu'à partir d'un certain temps, le profil du front devient stationnaire avec une vitesse constante et une température stationnaire.

7.3 Changement de variables

L'objectif du changement de variables est de se ramener à un domaine fixe lié au front. Ce qui évitera un problème de maillage lors de la discrétisation du problème (P). On note $y\in[0,1]$; $t\in[0,+\infty[$ et Ω_t un ouvert de $\mathbb{R}_-\times]0,1[$, de frontière $\partial\Omega_t$. On suppose que Γ_0 et Γ_1 sont identiques à une translation près. Le front $\xi(t,y)$ est une fonction régulière. Nous cherchons à déterminer u solution du problème :

$$(P)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(d\frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(d\frac{\partial u}{\partial y}) &= 0 & (x,y)\in\Omega_t,\ t>0\\ d\nabla u(t,x,y).\eta &= -\frac{\xi_t}{\sqrt{1+\xi_y^2}} & (x,y)\in\Gamma_t, t>0\\ u(t,x,y) &\to 0 & x\longrightarrow-\infty\\ u_{|_{t=0}} &= u_0(x,y)\\ u(t,x,1) &= u(t,x,0)\\ \frac{\partial u}{\partial y}(t,x,1) &= \frac{\partial u}{\partial y}(t,x,0). \end{cases}$$

La température initiale u_0 est une fonction positive bornée. De plus, on suppose qu'elle vérifie la condition de compatibilité à l'infini.
Considérons la bijection suivante :

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{G} & : \mathbb{R}^+ \times \Omega_t & \to & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \times [0,1] \\ & (t,x,y) & \mapsto & (\hat{t},\hat{x},\hat{y}) = \left\{ \begin{array}{l} \hat{x} = x - \xi(y,t) \\ \hat{y} = y \\ \hat{t} = t. \end{array} \right. \end{array} \tag{7.2}$$

Calculons ensuite les dérivées partielles par rapport aux nouvelles variables par la règle de la chaîne

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial}{\partial y} = -\xi_{\hat{y}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \\ \frac{\partial}{\partial t} = -\xi_{\hat{t}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \end{array} \right.$$

c'est à dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} d \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} d \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial}{\partial y} d \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(d \left(\xi_{\hat{y}}^2 \frac{\partial}{\partial \hat{x}} - \xi_{\hat{y}} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{y}} d \left(-\xi_{\hat{y}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} = -\xi_{\hat{t}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial}{\partial \hat{t}}. \end{array} \right.$$

Le changement de variable entraîne une modification du domaine spatial. Le nouveau domaine est défini comme suit :

$$\begin{aligned} &\widehat{\Omega} = \mathcal{G}(\Omega_t) =]-\infty, 0[\times]0,1[, \\ &\widehat{\partial\Omega_N} = \mathcal{G}(\Gamma_t) = \widehat{\partial\Omega} \cap \{\hat{x} = 0\}, \\ &\widehat{\partial\Omega_D} = \widehat{\partial\Omega} \cap \{\hat{x} \to -\infty\}, \\ &\widehat{\Gamma_1} = \widehat{\partial\Omega} \cap \{\hat{y} = 1\} = \Gamma_1, \\ &\widehat{\Gamma_0} = \widehat{\partial\Omega} \cap \{\hat{y} = 0\} = \Gamma_0. \end{aligned}$$

Ainsi, on se ramène à un domaine fixe. La nouvelle inconnue est alors $\hat{u}(\mathcal{G}(t,x,y)) = u(t,x,y)$. Le front $\xi(\hat{t},\hat{y}) = \xi(t,y)$ ainsi que les paramètres $\hat{d}(\hat{y}) = d(y)$ et $\hat{r}(\hat{y}) = r(y)$ ne changent pas.
La condition à l'infini s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t,x,y) \to 0 \text{ avec } x \longrightarrow -\infty \\ \Updownarrow \\ \hat{u}(\hat{t},\hat{x},\hat{y}) \to 0 \text{ avec } \hat{x} \longrightarrow -\infty. \end{array} \right. \tag{7.3}$$

La condition de Neumann est dans ce cas :

$$\hat{d} \left[\left(1 + \xi_{\hat{y}}^2 \right) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} - \xi_{\hat{y}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \right] = -\xi_{\hat{t}}. \tag{7.4}$$

En effet, nous avons $\frac{\partial \xi}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ et $\frac{\partial \xi}{\partial \hat{y}} = \frac{\partial \xi}{\partial y}$

$$d \nabla u.\eta = \frac{\hat{d}}{\sqrt{1 + \xi_{\hat{y}}^2}} \left[\left(1 + \xi_{\hat{y}}^2 \right) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} - \xi_{\hat{y}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \right]$$

$$\frac{\hat{d}}{\sqrt{1+\xi_{\hat{y}}^2}}\left[\left(1+\xi_{\hat{y}}^2\right)\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{x}}-\xi_{\hat{y}}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{y}}\right]=-\frac{\xi_{\hat{t}}}{\sqrt{1+\xi_{\hat{y}}^2}}.$$

En simplifiant par $\dfrac{1}{\sqrt{1+\xi_{\hat{y}}^2}}$, on trouve (7.4). Finalement, le changement de variables conduit au problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{t}}-\xi_{\hat{t}}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{x}}-\operatorname{div}(dM\nabla\hat{u}) &= 0 & \text{dans }]0,+\infty[\times\widehat{\Omega} \\ dM\nabla\hat{u}.\vec{i} &= -\xi_{\hat{t}} & \text{sur }]0,+\infty[\times\widehat{\partial\Omega_N} \\ \hat{u}(\hat{t},\hat{x},\hat{y}) &\to 0 & \text{sur }]0,+\infty[\times\widehat{\partial\Omega_D} \\ \hat{u}(0,\hat{x},\hat{y}) &= \hat{u}_0 & \text{dans } \widehat{\Omega} \\ \hat{u} & \text{ est } \hat{y}\text{-périodique} & \\ dM\nabla\hat{u}.\vec{j} & \text{ est } \hat{y}\text{-périodique.} & \end{cases}$$

avec

$$M=\begin{pmatrix}\left(1+\xi_{\hat{y}}^2\right) & -\xi_{\hat{y}}\\ -\xi_{\hat{y}} & 1\end{pmatrix}$$

et $\hat{u}_0(\hat{x},\hat{y})=u_0(x-\xi(0,y),y)$, $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0,\end{pmatrix}$ $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Pour simplifier les écritures, nous omettrons les "chapeaux". Finalement, on se ramène au problème suivant :

$$(T)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}-\xi_t\frac{\partial u}{\partial x}-\operatorname{div}(dM\nabla u) &= 0 & \text{dans }]0,+\infty[\times\Omega. \\ dM\nabla u.\vec{i} &= -\xi_t & \text{sur }]0,+\infty[\times\partial\Omega_N \\ u(t,x,y) &\to 0 & \text{sur }]0,+\infty[\times\partial\Omega_D \\ u(0,x,y) &= u_0 & \text{dans } \Omega \\ u & \text{ est } y\text{-périodique} & \\ dM\nabla u.\vec{j} & \text{ est } y\text{-périodique.} & \end{cases}$$

Remarque 7.3.1. *La matrice M est symétrique et les deux valeurs propres sont :*

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left(2+\xi_y^2-\xi_y\sqrt{4+\xi_y^2}\right)$$
$$\lambda_2=\frac{1}{2}\left(2+\xi_y^2+\xi_y\sqrt{4+\xi_y^2}\right).$$

Remarque 7.3.2. *Pour des raisons de traitement numérique, nous supposerons que le domaine spatial est* $\Omega=]-L,0[$ *avec* $L>0$ *suffisamment grand.*

7.4 Discrétisation

Dans cette partie, nous proposons une discrétisation numérique du système couplé $(T-H)$. Nous utiliserons une combinaison des méthodes de différences finies et d'éléments finis. On considère les pas d'espaces $\delta x=h_1>0$, $\delta y=h_2>0$ et un pas de temps $\delta t=\tau>0$. Ainsi, pour $y\in[0,1]$, on pose

$y_j = (j-1)h_2$ avec $j \in \{1, ..., ny\}$ où $ny = 1 + \frac{1}{h_2}$. De la même manière, pour $x \in [-L, 0]$, $L > 0$ suffisamment grand, on pose $x_i = -L + (i-1)h_1$ avec $i \in \{1, ..., nx\}$ où $nx = 1 - \frac{L}{h_1}$. Nous proposerons une discrétisation à l'intérieur du domaine et une discrétisation des conditions limites pour le problème de la température (T). En ce qui concerne l'approximation du front, nous proposerons une discrétisation similaire à celle vue au Chapitre 5.

7.4.1 Discrétisation de l'équation du front (H)

Pour la discrétisation de l'équation de Hamilton-Jacobi (H), nous utiliserons un schéma avec un flux numérique de Godunov. Considérons les notations suivantes :

$$\Delta_n\xi^- = \frac{\xi_j^n - \xi_{j-1}^n}{h_2}, \quad \Delta_n\xi^+ = \frac{\xi_{j+1}^n - \xi_j^n}{h_2}, \quad \Delta_n\xi = \frac{\xi_{j+1}^n - \xi_{j-1}^n}{2h_2}.$$

Une solution approchée est définie comme suit :
• Pour $y \in]0, 1[$ c'est à dire $j = 2, ..., ny-1$ et pour tout $n \geq 0$

$$\xi_j^{n+1} = \xi_j^n - r_j\tau K(u_{nx,j}^{n+1})g(\Delta_n\xi^-, \Delta_n\xi^+) + \frac{\epsilon\tau}{h_2}\frac{\Delta_n\xi^+ - \Delta_n\xi^-}{1 + 0.25(\Delta_n\xi^+ + \Delta_n\xi^-)^2}. \tag{7.5}$$

avec

$$\xi_j^0 = \xi_0(y_j). \tag{7.6}$$

Ici, $u_{nx,j}^{n+1}$ est l'approximation de la température au front à l'instant $t = (n+1)\tau$ au point y_j et g est le flux numérique de Godunov défini comme suit :

$$g(a,b) = \begin{cases} \min\limits_{v\in[a,b]} (\sqrt{1+v^2}) & \text{si } a \leq b \\ \\ \max\limits_{v\in[b,a]} (\sqrt{1+v^2}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

• Pour les conditions de bords, c'est à dire l'approximation du front à l'instant $(n+1)\tau$ aux points $y = 0$ et $y = 1$ (i.e. $j = 1$ et $j = ny$), nous avons d'après la condition de périodicité sur ξ et ξ_y :

$$\begin{cases} \xi_1^{n+1} = \frac{\xi_{ny-1}^{n+1} + \xi_2^{n+1}}{2} \\ \\ \xi_{ny}^{n+1} = \xi_1^{n+1}. \end{cases} \tag{7.7}$$

Lemme 7.4.1. *Le schéma* (7.5)*,* (7.7) *est stable si la condition suivante est vérifiée :*

$$\tau \leq \min\Big(\frac{h_2}{2\max\limits_y(r.K(u_f))}, \frac{h_2^2}{2\epsilon}\Big). \tag{7.8}$$

Remarque 7.4.2. *En supposant que* $0 < K(u) \leq 1$*, alors la relation* (7.8) *se réduit à :*

$$\tau \leq \min\Big(\frac{h_2}{2r_{\max}}, \frac{h_2^2}{2\epsilon}\Big). \tag{7.9}$$

Remarque 7.4.3. *Dans* (7.5)*, notre choix sur la discretisation du terme couplé $K(u_f)$ s'est porté sur la température au front à l'instant $(n+1)\tau$ en lieu et place de la température à l'instant $n\tau$. Ce choix est motivé par une interprétation physique du phénomène de propagation. En effet, pour observer la propagation du front dans le milieu, il est nécessaire de tenir compte de la contribution de la température qui y règne dans le milieu à l'instant donné plutôt qu'a l'instant précédent.*

7.4.2 Construction d'un schéma pour l'équation de la température (T) à l'intérieur du domaine

Nous nous intéressons ici à la discrétisation du problème de transport diffusion (T) à l'intérieur du domaine Ω. On utilisera un schéma Euler explicite en temps. En ce qui concerne le terme de transport, nous l'approcherons par une discrétisation upwind. Pour l'approximation du terme de diffusion, c'est à dire $-\operatorname{div}(dM\nabla u)$, notons que la discrétisation obtenue par une méthode de différences finies conduit à un schéma non monotone qui est due à la présence d'un terme de dérivée croisée plus précisément le terme $d\xi_y \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$. Pour y remédier, nous utiliserons une méthode d'éléments finis appropriée pour discrétiser ce terme de diffusion et ainsi proposer un schéma monotone. On considère un maillage conforme triangulaire (une triangulation de Ω) $\mathcal{T}_{h_1,h_2}$, pour simplifier, nous supposerons que $h_1 = h_2 = h$. Ainsi, on associe au point $P \in \Omega$ (cf. Figures 7.1, 7.2) l'ensemble formé des triangles $e_1 = (P\widehat{E}N)$, $e_2 = (P\widehat{N}O)$, $e_3 = (P\widehat{O}S)$, $e_4 = (P\widehat{S}E)$ de centres de gravité respectifs c_{e_k} $(k = 1, ..., 4)$ et de surface égale à $|e_i| = |e| = \frac{1}{2}h^2$. On pose ensuite $\Omega_P \equiv \bigcup_{i=1}^{4} e_i$ avec $\Omega_P \subset \Omega$ et $\Omega = \bigcup_P \Omega_P$. Rappelons que dans le cas classique où la matrice M est une matrice diagonale par exemple la matrice identité, la discrétisation du terme de diffusion par

$$-\Delta u(P) \approx \Big(C_P u_P + C_E u_E + C_N u_N + C_O u_O + C_S u_S\Big),$$

avec les coefficient $C_E = C_O = C_N = C_S = -\frac{1}{h^2} \leq 0$, et $C_P = -C_E - C_O - C_N - C_S$ et $u_\star$, la valeur de la solution approchée au noeud $\star$ conduit à un schéma monotone. Notre objectif est de donner une extension de ce schéma dans le cas d'une matrice symétrique. A cette fin, nous allons utiliser la méthode standard des éléments finis $\mathbb{P}_1$-conforme qui consiste à approcher une fonction f en un point P par f_h donnée par

$$f_h = \frac{1}{\displaystyle\int_{\Omega_P} \phi_P dxdy} \int_{\Omega_P} f\phi_P dxdy$$

avec ϕ_P la fonction d'interpolation classique au noeud P définie de Ω_P dans $\mathbb{R}^2$ par : $\phi_{P|_e} \in \mathbb{P}_1$ avec

$$\phi_P(P') = \begin{cases} 0 \text{ si } P' \neq P \\ \\ 1 \text{ si } P' = P. \end{cases}$$

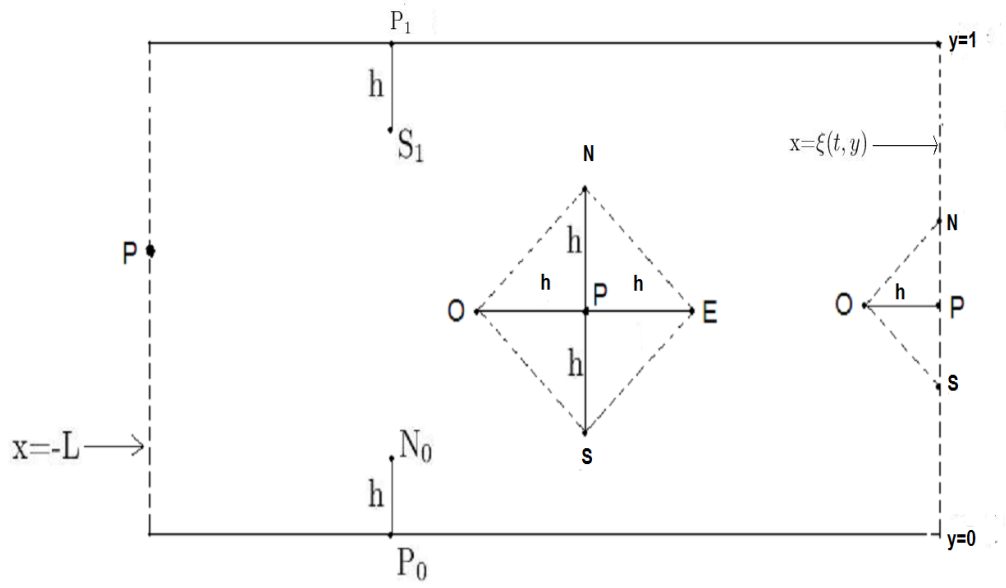

FIGURE 7.1 – Discrétisation du domaine

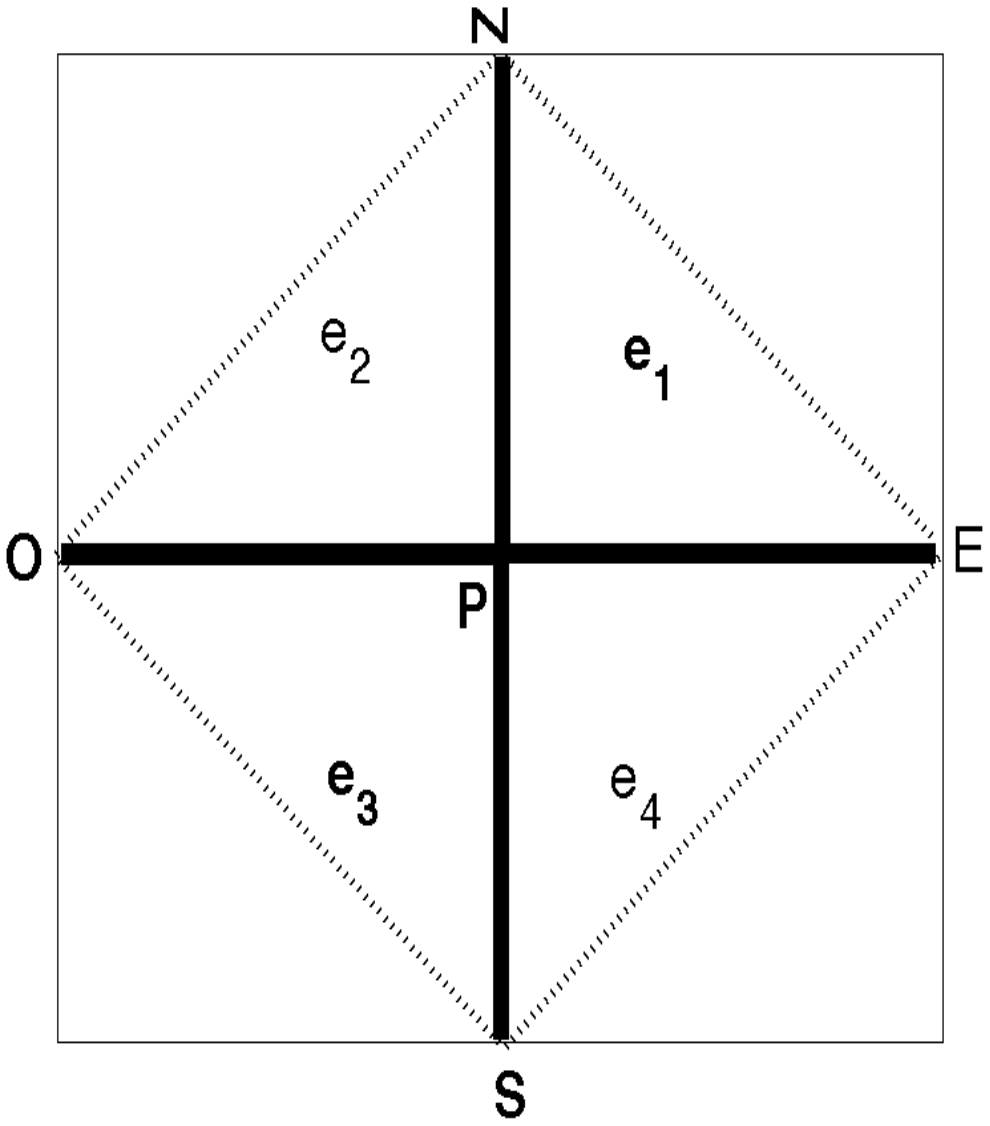

FIGURE 7.2 – Sous-domaine Ω_P

Dans ce cas où la fonction f est suffisamment régulière, l'erreur d'approximation est donnée par :

$$|f_h - f(P)| = \left| \frac{1}{\int_{\Omega_P} \phi_P dxdy} \int_{\Omega_P} (f - f(P))\phi_P dxdy \right|$$
$$\leq \|f - f(P)\|_{L^\infty} \leq h|\nabla f|_{L^\infty}.$$

Proposition d'un schéma monotone à l'intérieur du domaine :

Soit u_P^n l'approximation de u au point P et à l'instant n, pour tout point $P \in \Omega$. Nous proposons la discrétisation suivante pour l'approximation du problème (T) dans le domaine Ω par :

$$u_P^{n+1} = \theta_E u_E^n + \theta_N u_N^n + (1 - \theta_P)u_P^n + \theta_O u_O^n + \theta_S u_S^n \tag{7.10}$$

avec

$$\theta_P = |V_{j,n}|\frac{\tau}{h} + \frac{3\beta}{2}\tau\Big(2 + (\Delta_{n+1}\xi^+)^2\Big) + \frac{3\alpha}{2}\tau\Big(2 + (\Delta_{n+1}\xi^-)^2\Big);$$
$$\theta_E = \frac{\tau}{h}V_{j,n}^- + \frac{3\beta}{4}\tau\Big(1 + (\Delta_{n+1}\xi^+)^2 - \Delta_{n+1}\xi^+\Big) + \frac{3\alpha}{4}\tau\Big(1 + (\Delta_{n+1}\xi^-)^2 + \Delta_{n+1}\xi^-\Big);$$
$$\theta_O = \frac{\tau}{h}V_{j,n}^+ + \frac{3\beta}{4}\tau\Big(1 + (\Delta_{n+1}\xi^+)^2 + \Delta_{n+1}\xi^+\Big) + \frac{3\alpha}{4}\tau\Big(1 + (\Delta_{n+1}\xi^-)^2 - \Delta_{n+1}\xi^-\Big);$$
$$\theta_N = \frac{3\beta}{2}\tau; \quad \theta_S = \frac{3\alpha}{2}\tau.$$

Ici :

$$\alpha = \frac{1}{2h^2}\Big(d_j + d_{j-1}\Big); \quad \beta = \frac{1}{2h^2}\Big(d_{j+1} + d_j\Big); \quad V_{j,n} = -\frac{\xi_j^{n+1} - \xi_j^n}{\tau};$$
$$V_{j,n}^+ = \max(0, V_{j,n}); \quad V_{j,n}^- = \max(0, -V_{j,n}),$$

et où on a pris

$$u_P^0 = u(0, P). \tag{7.11}$$

Détaillons les différentes étapes qui conduisent au schéma (7.10). Rappelons que notre équation s'écrit sous la forme $\frac{\partial u}{\partial t} - \xi_t \frac{\partial u}{\partial x} - \text{div}(dM\nabla u) = 0$ avec M une matrice symétrique. Nous nous proposons d'abord de discrétiser le terme de transport et ensuite proposer un schéma pour l'approximation de $u_t - \text{div}(dM\nabla u) = 0$ avec M une matrice symétrique générale.

Lemme 7.4.4. *Considérons l'équation de transport*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ dans } \Omega$$

où α est la vitesse alors un schéma décentré (upwind) de $\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x}$ est donné par la discrétisation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \approx \begin{cases} \frac{u_P^{n+1} - u_P^n}{\tau} + \alpha_P \frac{u_E^n - u_P^n}{h_1} \text{ si } \alpha_P \leq 0, \\ \\ \frac{u_P^{n+1} - u_P^n}{\tau} + \alpha_P \frac{u_P^n - u_O^n}{h_1} \text{ si } \alpha_P > 0. \end{cases}$$

C'est à dire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{\tau}\Big[u_p^{n+1} - \frac{\alpha_P^- \tau}{h_1} u_E^n - \Big(1 - |\alpha_P| \frac{\tau}{h_1}\Big) u_P^n - \frac{\alpha_P^+ \tau}{h_1} u_O^n\Big], \tag{7.12}$$

avec $\alpha_P^+ = \max(0, \alpha_P)$ *et* $\alpha_P^- = \max(0, -\alpha_P)$.

Dans ce cas, on sait qu'il y a convergence du schéma sous une condition de stabilité de type CFL donnée par

$$\tau \leq \frac{h}{\|\alpha\|_{L^\infty}}.$$

Passons maintenant à la discrétisation du terme de diffusion. Donnons d'abord un résultat pour une équation de diffusion plus générale :

Lemme 7.4.5. *Soit la matrice symétrique réelle M définie par :*

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

qui vérifie les hypothèses suivantes

$$(Hyp) \begin{cases} M_{11} \geq \max\{|M_{21}|, |M_{12}|\} \\ \\ M_{22} \geq \max\{|M_{21}|, |M_{12}|\}. \end{cases}$$

Considérons l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(M \nabla u) = 0 \text{ dans } \Omega, \tag{7.13}$$

alors, on peut trouver des coefficients, $C_E \leq 0, C_O \leq 0, C_N \leq 0, C_S \leq 0$ *et* $C_P \geq 0$ *tels que le schéma obtenu par la discrétisation de* $-\operatorname{div}(M\nabla u)$ *donnée par :*

$$-\operatorname{div}(dM\nabla u)(P) \approx \frac{3}{4}\Big(C_P u_P + C_E u_E + C_N u_N + C_O u_O + C_S u_S\Big)$$

soit monotone sous la condition

$$\tau \leq \frac{4}{3C_P}.$$

Preuve. On applique la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ conforme à $f(P) = -\operatorname{div}(dM\nabla u)(P)$ c'est à dire en l'approchant par f_h comme suit

$$f_h(u) = -\frac{1}{\displaystyle\int_{\Omega_P} \phi_P dxdy} \int_{\Omega_P} \operatorname{div}(dM\nabla u)\phi_P dxdy,$$

et la solution u sera approchée par :

$$u_h = u_P\phi_P + u_E\phi_E + u_N\phi_N + u_O\phi_O + u_S\phi_S. \tag{7.14}$$

Les fonctions d'interpolations sont ainsi définies :

$$\phi_E = \frac{1}{h}\begin{cases} x \text{ dans } e_1 \\ 0 \text{ dans } e_2 \\ 0 \text{ dans } e_3 \\ x \text{ dans } e_4 \end{cases} ; \phi_N = \frac{1}{h}\begin{cases} y \text{ dans } e_1 \\ y \text{ dans } e_2 \\ 0 \text{ dans } e_3 \\ 0 \text{ dans } e_4 \end{cases} ;$$

$$\phi_O = -\frac{1}{h}\begin{cases} 0 \text{ dans } e_1 \\ x \text{ dans } e_2 \\ x \text{ dans } e_3 \\ 0 \text{ dans } e_4 \end{cases} ; \phi_S = -\frac{1}{h}\begin{cases} 0 \text{ dans } e_1 \\ 0 \text{ dans } e_2 \\ y \text{ dans } e_3 \\ y \text{ dans } e_4 \end{cases} ;$$

et $\phi_P = 1 - (\phi_E + \phi_N + \phi_O + \phi_S)$ c'est à dire

$$\phi_P = 1 - \frac{1}{h}\begin{cases} x+y \text{ dans } e_1 \\ -x+y \text{ dans } e_2 \\ -x-y \text{ dans } e_3 \\ x-y \text{ dans } e_4 \end{cases} = 1 - \frac{1}{h}\begin{cases} g_1(x,y) \text{ dans } e_1 \\ -g_2(x,y) \text{ dans } e_2 \\ -g_1(x,y) \text{ dans } e_3 \\ g_2(x,y) \text{ dans } e_4. \end{cases}$$

Notons que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_P} \phi_P dxdy &= \sum_{i=1}^{4} \int_{e_i} \phi_P de \\ &= \int_{\Omega_P} de - \frac{1}{h}\int_{\Omega_P} \Big[g_1 \mathcal{I}_{e_1} - g_1 \mathcal{I}_{e_3} + g_2 \mathcal{I}_{e_4} + g_2 \mathcal{I}_{e_2}\Big] de \\ &= 4|e| - \frac{1}{h}\int_{e_1} g_1 de_1 + \frac{1}{h}\int_{e_3} g_1 de_3 - \frac{1}{h}\int_{e_4} g_2 de_4 + \frac{1}{h}\int_{e_2} g_2 de_2.\end{aligned}$$

Ensuite, l'utilisation de la formule du centre conduit à

$$\int_{\Omega_P} \phi_P dxdy = 4|e| - |e|\frac{1}{h}\Big(g_1(c_{e_1}) - g_1(c_{e_3}) + g_2(c_{e_4}) - g_1(c_{e_2})\Big) = \frac{4}{3}|e|.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{4}{3} f_h(u_h) &= -\frac{1}{|e|}\left[\int_{\partial\Omega_P} (dM\nabla u_h)\phi_P.\nu d\sigma - \int_{\Omega_P} (dM\nabla u_h).\nabla\phi_P dxdy\right] \\ &= \frac{1}{|e|}\int_{\Omega_P} (dM\nabla u_h).\nabla\phi_P dxdy \\ &= \frac{1}{|e|}\int_{\Omega_P} \Big(dM\nabla(u_P\phi_P + u_E\phi_E + u_N\phi_N + u_O\phi_O + u_S\phi_S)\Big).\nabla\phi_P dxdy \\ &= \sum_{i=1}^{4}\Big(C_P^i u_P + C_E^i u_E + C_N^i u_N + C_O^i u_O + C_S^i u_S\Big)\end{aligned}$$

où les $C_\star^i$ sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}C_\star^i &= \frac{1}{|e_i|}\int_{e_i} (dM\nabla\phi_\star).\nabla\phi_P dxdy = \Big((dM)^{e_i}\nabla\phi_\star.\nabla\phi_P\Big)_{|e_i} \\ &= \Big((dM)^{e_i}\Big)^T\Big(\nabla\phi_P.\nabla\phi_\star\Big)_{|e_i}\end{aligned} \tag{7.15}$$

avec

$$(dM)^{e_i} = \frac{1}{|e_i|}\int_{e_i}(dM)dxdy = \frac{2}{h^2}\int_{e_i}(dM)dxdy$$
$$\approx (dM)_{|_{e_i}}.$$

Comme

$$\nabla\phi_E = \frac{1}{h}\begin{cases}\vec{i}\text{ dans } e_1\\ \vec{0}\text{ dans } e_2\\ \vec{0}\text{ dans } e_3\\ \vec{i}\text{ dans } e_4\end{cases};\nabla\phi_N = \frac{1}{h}\begin{cases}\vec{j}\text{ dans } e_1\\ \vec{j}\text{ dans } e_2\\ \vec{0}\text{ dans } e_3\\ \vec{0}\text{ dans } e_4\end{cases};$$

$$\nabla\phi_O = -\frac{1}{h}\begin{cases}\vec{0}\text{ dans } e_1\\ \vec{i}\text{ dans } e_2\\ \vec{i}\text{ dans } e_3\\ \vec{0}\text{ dans } e_4\end{cases};\nabla\phi_S = -\frac{1}{h}\begin{cases}\vec{0}\text{ dans } e_1\\ \vec{0}\text{ dans } e_2\\ \vec{j}\text{ dans } e_3\\ \vec{j}\text{ dans } e_4\end{cases};$$

$$\nabla\phi_P = -\frac{1}{h}\begin{cases}\vec{i}+\vec{j}\text{ dans } e_1\\ -\vec{i}+\vec{j}\text{ dans } e_2\\ -\vec{i}-\vec{j}\text{ dans } e_3\\ \vec{i}-\vec{j}\text{ dans } e_4;\end{cases}$$

alors

$$\left((dM)^{e_i}\right)^T\nabla\phi_P = -\frac{1}{h}\begin{cases}\left((dM)^{e_1}\right)^T\vec{x}+\left((dM)^{e_1}\right)^T\vec{y}\text{ dans } e_1\\ -\left((dM)^{e_2}\right)^T\vec{x}+\left((dM)^{e_2}\right)^T\vec{y}\text{ dans } e_2\\ -\left((dM)^{e_3}\right)^T\vec{x}-\left((dM)^{e_3}\right)^T\vec{y}\text{ dans } e_3\\ \left((dM)^{e_4}\right)^T\vec{x}-\left((dM)^{e_4}\right)^T\vec{y}\text{ dans } e_4.\end{cases}$$

Par conséquent, la relation (7.15) permet d'obtenir :

$$C_E^{e_i} = -\frac{1}{h^2}\begin{cases}(dM)_{11}+(dM)_{21} & \text{dans } e_1\\ 0 & \text{dans } e_2\\ 0 & \text{dans } e_3\\ (dM)_{11}-(dM)_{21} & \text{dans } e_4\end{cases}\quad C_N^{e_i} = -\frac{1}{h^2}\begin{cases}(dM)_{22}+(dM)_{12} & \text{dans } e_1\\ (dM)_{22}-(dM)_{12} & \text{dans } e_2\\ 0 & \text{dans } e_3\\ 0 & \text{dans } e_4\end{cases}$$

$$C_O^{e_i} = -\frac{1}{h^2}\begin{cases}0 & \text{dans } e_1\\ (dM)_{11}-(dM)_{21} & \text{dans } e_2\\ (dM)_{11}+(dM)_{21} & \text{dans } e_3\\ 0 & \text{dans } e_4\end{cases}\quad C_S^{e_i} = -\frac{1}{h^2}\begin{cases}0 & \text{dans } e_1\\ 0 & \text{dans } e_2\\ (dM)_{22}+(dM)_{12} & \text{dans } e_3\\ (dM)_{22}+(dM)_{12} & \text{dans } e_4\end{cases}$$

et $C_P^{e_i} = -\left(C_E^{e_i}+C_N^{e_i}+C_O^{e_i}+C_S^{e_i}\right)$.
En posant ensuite :

$$C_\star = \sum_{i=1}^{4} C_\star^{e_i},$$

et sous l'hypothèse (Hyp), on a les coefficients C_E, C_O, C_N, C_S qui sont négatifs et le coefficient C_P est positif, nous obtenons la discrétisation suivante :

$$-\operatorname{div}(dM\nabla u)(P) \approx f_p(u_h) = \frac{3}{4}\Big(C_P u_P + C_E u_E + C_N u_N + C_O u_O + C_S u_S\Big).$$

Maintenant, en passant à la discrétisation de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(dM\nabla u) = 0$, avec ici u_P^n la la solution approchée à l'instant $n\tau$, $n \in \mathbb{N}$, on obtient le schéma suivante :

$$u_P^{n+1} = \frac{3}{4}\tau\Big(C_P u_P^n + C_E u_E^n + C_N u_N^n + C_O u_O^n + C_S u_S^n\Big) + \Big(1 - \frac{3}{4}\tau C_P\Big)u_P^n.$$

Ce schéma est bien monotone sous la condition $\tau \leq \frac{3}{4C_P}$. □

Application à notre problème (T) :

Nous proposons maintenant un schéma monotone pour la discrétisation de l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \xi_t \frac{\partial u}{\partial x} - \operatorname{div}(dM\nabla u) = 0 \text{ dans } \Omega. \tag{7.16}$$

Nous discrétiserons le terme de convection par le schéma upwind et le terme de diffusion par le schéma proposé au Lemme 7.4.5 et le terme temporel par un schéma Euler explicite. En ce qui concerne le terme de transport, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \xi_t \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{\tau}\Big[u_p^{n+1} - \frac{V_{j,n}^-\tau}{h_1}u_E^n - \Big(1 - |V_{j,n}|\frac{\tau}{h_1}\Big)u_P^n - \frac{V_{j,n}^+\tau}{h_1}u_O^n\Big]. \tag{7.17}$$

Ensuite pour le terme de diffusion, la matrice M est donnée dans notre cas par

$$M = \begin{pmatrix} \Big(1 + \xi_y^2\Big) & -\xi_y \\ -\xi_y & 1 \end{pmatrix}$$

On peut donc appliquer le Lemme 7.4.5 sous l'hypothèse $|\xi_y| \leq 1$. On obtient ainsi

$$-\operatorname{div}(dM\nabla u)(P) \approx f_h(u_h) = \frac{3}{4}\Big(C_P u_P + C_E u_E + C_N u_N + C_O u_O + C_S u_S\Big), \tag{7.18}$$

où les coefficients $C_\star$ sont déterminés de la façon suivante :

$$C_E^{e_i} = -\frac{1}{h^2}\begin{cases} \frac{d_{j+1}+d_j}{2}\Big(1 + \Big(\Delta_{n+1}\xi^+\Big)^2 - \Delta_{n+1}\xi^+\Big) & \text{dans } e_1 \\ 0 & \text{dans } e_2 \\ 0 & \text{dans } e_3 \\ \frac{d_j+d_{j-1}}{2}\Big(1 + \Big(\Delta_{n+1}\xi^-\Big)^2 + \Delta_{n+1}\xi^-\Big) & \text{dans } e_4 \end{cases}$$

$$C_N^{e_i} = -\frac{1}{h^2}\begin{cases} \frac{d_{j+1}+d_j}{2}\Big(1 - \Delta_{n+1}\xi^+\Big) & \text{dans } e_1 \\ \frac{d_{j+1}+d_j}{2}\Big(1 + \Delta_{n+1}\xi^+\Big) & \text{dans } e_2 \\ 0 & \text{dans } e_3 \\ 0 & \text{dans } e_4 \end{cases}$$

$$C_O^{e_i} = -\frac{1}{h^2}\begin{cases} 0 & \text{dans } e_1 \\ \frac{d_{j+1}+d_j}{2}\Big(1+\Big(\Delta_{n+1}\xi^+\Big)^2+\Delta_{n+1}\xi^+\Big) & \text{dans } e_2 \\ \frac{d_j+d_{j-1}}{2}\Big(1+\Big(\Delta_{n+1}\xi^-\Big)^2-\Delta_{n+1}\xi^-\Big) & \text{dans } e_3 \\ 0 & \text{dans } e_4 \end{cases}$$

$$C_S^{e_i} = -\frac{1}{h^2}\begin{cases} 0 & \text{dans } e_1 \\ 0 & \text{dans } e_2 \\ \frac{d_j+d_{j-1}}{2}\Big(1-\Delta_{n+1}\xi^-\Big) & \text{dans } e_3 \\ \frac{d_j+d_{j-1}}{2}\Big(1+\Delta_{n+1}\xi^-\Big) & \text{dans } e_4, \end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} C_E &= -\beta\Big(1+(\Delta_{n+1}\xi^+)^2-\Delta_{n+1}\xi^+\Big)-\alpha\Big(1+(\Delta_{n+1}\xi^-)^2+\Delta_{n+1}\xi^-\Big)<0; \\ C_O &= -\beta\Big(1+(\Delta_{n+1}\xi^+)^2+\Delta_{n+1}\xi^+\Big)-\alpha\Big(1+(\Delta_{n+1}\xi^-)^2-\Delta_{n+1}\xi^-\Big)<0; \\ C_N &= -2\beta<0; \quad C_S=-2\alpha<0; \\ C_P &= \beta\Big(4+2(\Delta_{n+1}\xi^+)^2\Big)+\alpha\Big(4+2(\Delta_{n+1}\xi^-)^2\Big)>0, \end{aligned}$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2h^2}\Big(d_j+d_{j-1}\Big) \text{ et } \beta = \frac{1}{2h^2}\Big(d_{j+1}+d_j\Big).$$

On déduit alors le schéma suivant construit alors le schéma avec les relations (7.17) et (7.18) pour l'équation complète (7.16)

$$\begin{aligned} u_P^{n+1} = &\Big[\frac{V_{j,n}^+}{h}-\frac{3}{4}C_O\Big]\tau u_O^n-\frac{3}{4}\tau C_S u_S^n+\Big[1-\Big(\frac{|V_{j,n}|}{h}+\frac{3}{4}C_P\Big)\tau\Big]u_P^n \\ &+\Big[\frac{V_{j,n}^-}{h}-\frac{3}{4}C_E\Big]\tau u_E^n-\frac{3}{4}\tau C_N u_N^n, \end{aligned}$$

c'est à dire le schéma (7.10).

Remarque 7.4.6. *L'hypothèse* (*Hyp*) *est superflue dans notre cas. Cette hypothèse dans le cas général d'une équation de diffusion permet d'avoir les coefficients,* $C_E \le 0$, $C_O \le 0$, $C_N \le 0$, $C_S \le 0$ *et* $C_P \ge 0$*, pour assurer la monotonie. Dans notre cas, nous obtenons la monotonie, sans faire intervenir cette hypothèse grâce à la structure de la matrice M et la contribution du terme de transport. En effet, on a*

Lemme 7.4.7. *Le schéma* (7.10) *est monotone sous la condition suivante :*

$$\tau \le \frac{h^2}{|V_\infty|h+6d_{\max}}, \text{ avec } V_\infty = max_{j,n}|V_{j,n}|. \tag{7.19}$$

De plus sous l'hypothèse (7.19) *et en tenant compte de* (7.11) *on a le résultat de stabilité suivant :*

$$\min(u_P^0) \le u_P^n \le \max(u_P^0). \tag{7.20}$$

Preuve. Le schéma (7.10) peut s'écrire sous la forme $u_P^{n+1} = W(u_P^n, u_S^n, u_N^n, u_O^n, u_E^n)$. C'est donc un schéma à cinq points. Elle est monotone si la fonction W est croissante par rapport à chacune de ces cinq variables. Compte tenue du fait que les coefficients $C_E,\ C_O,\ C_N,\ C_S$ sont négatifs, alors

$$\theta_O = \frac{V_{j,n}^+}{h} - \frac{3}{4}C_O \geq 0; \quad \theta_E = \frac{V_{j,n}^-}{h} - \frac{3}{4}C_E \geq 0$$

$$\theta_N = -\frac{3}{4}\tau C_N \geq 0; \quad \theta_S = -\frac{3}{4}\tau C_S \geq 0.$$

Ainsi, pour que u_P^{n+1} soit combinaison convexe de u_P^n, u_S^n,u_N^n, u_E^n, u_O^n, il faut que :

$$1 - |V_{j,n}|\frac{\tau}{h} + \frac{3\beta}{2}\tau\Big(2 + (\Delta_{n+1}\xi^+)^2\Big) + \frac{3\alpha}{2}\tau\Big(2 + (\Delta_{n+1}\xi^-)^2\Big) \geq 0, \tag{7.21}$$

c'est à dire

$$1 - \tau\Big[\frac{|V_{j,n}|}{h} + \frac{3\beta}{2}\Big(2 + (\Delta_{n+1}\xi^+)^2\Big) + \frac{3\alpha}{2}\Big(2 + (\Delta_{n+1}\xi^-)^2\Big)\Big] \geq 0, \tag{7.22}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\tau &\leq \frac{1}{\frac{|V_{j,n}|}{h} + \frac{3\beta}{2}\Big(2 + (\Delta_{n+1}\xi^+)^2\Big) + \frac{3\alpha}{2}\Big(2 + (\Delta_{n+1}\xi^-)^2\Big)} \\ \tau &\leq \frac{1}{\frac{|V_{j,n}|}{h} + 3\beta + 3\alpha}.\end{aligned} \tag{7.23}$$

De plus, on a $3\beta + 3\alpha \leq \frac{6d_{\max}}{h^2}$. En utilisant cette inégalité dans (7.23), on obtient

$$\tau \leq \frac{h^2}{|V_{j,n}|h + 6d_{\max}} \leq \frac{h^2}{|V_\infty|h + 6d_{\max}}.$$

avec $V_\infty = max_{j,n}|V_{j,n}|$. □

Remarque 7.4.8. *Une condition moins contraignante que la relation* (7.19) *dans le cas où* $K(u) \leq 1$ *et* ϵ *petit est donnée par :*

$$\tau \leq \frac{h^2}{rh + 6d_{\max}}. \tag{7.24}$$

7.4.3 Discrétisation des conditions limites

Dans cette partie, nous allons proposer une discrétisation des conditions au limites. On utilise ici une méthode des différences finis. Pour chaque point $P \in \partial\Omega$, nous associerons les points voisins (cf. Figures 7.1 et 7.3). D'abord, pour traduire la condition limite à moins l'infini, on prendra $u(t, -L, y) = 0$ pour L suffisamment grand et pour tout t et y. Ensuite, pour tout point $P_k \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$; $k \in \{0, 1\}$ (voir les Figures 7.1 et 7.3) nous proposons l'approximation suivante :

$$u_{P_0}^{n+1} = u_{P_1}^{n+1} = \frac{u_{N_0}^{n+1} + u_{S_1}^{n+1}}{2}. \tag{7.25}$$

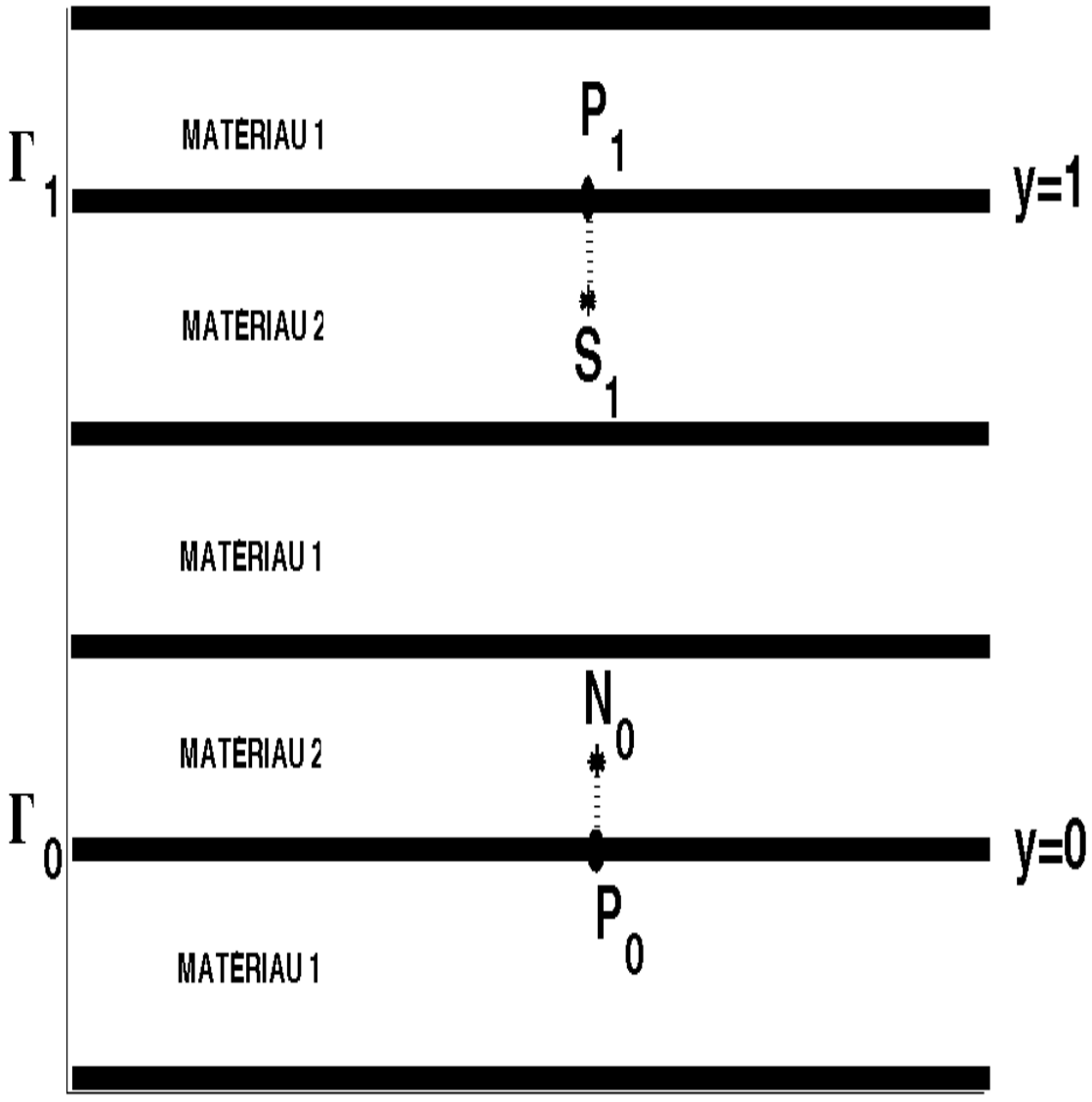

FIGURE 7.3 – Domaine périodique

En effet, rappelons que

$$\begin{aligned} dM\nabla u.\vec{j} &= \begin{pmatrix} d\left(1+\xi_y^2\right) & -d\xi_y \\ -d\xi_y & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d\left(1+\xi_y^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} - d\xi_y \frac{\partial u}{\partial y} \\ -d\xi_y \frac{\partial u}{\partial x} + d\frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -d\xi_y \frac{\partial u}{\partial x} + d\frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned}$$

est $y-$ périodique. Compte tenue de la périodicité de ξ_y et de d, la périodicité de $dM\nabla u.\vec{j}$ se ramène donc à la périodicité en y de $\frac{\partial u}{\partial y}$. Ainsi, u et $\frac{\partial u}{\partial y}$ $y-$ périodiques revient à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} u_{P_1}^{n+1} - u_{S_1}^{n+1} &= u_{N_0}^{n+1} - u_{P_0}^{n+1} \\ \\ u_{P_0}^{n+1} &= u_{P_1}^{n+1}. \end{cases}$$

Ce système a pour solution :

$$\begin{cases} u_{P_1}^{n+1} = \frac{u_{N_0}^{n+1} + u_{S_1}^{n+1}}{2} \\ \\ u_{P_0}^{n+1} = u_{P_1}^{n+1}. \end{cases} \tag{7.26}$$

Il reste à discrétiser la température au front. Pour cette discrétisation, nous nous inspirons de la discrétisation proposée en dimension un au Chapitre 6. En effet, pour $P \in \Gamma_t$, nous allons faire appel à la transformation suivante :

$$u_P^{n+1} = \exp(v_P^{n+1}) \tag{7.27}$$

où v_P^{n+1} est obtenue en résolvant l'équation

$$-\vartheta_N v_N^{n+1} + \vartheta_P v_P^{n+1} - \vartheta_S v_S^{n+1} = \vartheta_{\text{ext}} \tag{7.28}$$

avec :

$$\begin{aligned} \vartheta_N &= \frac{d_j}{h}(-\Delta_{n+1}\xi)^-; \quad \vartheta_S = \frac{d_j}{h}(-\Delta_{n+1}\xi)^+ \\ \vartheta_P &= \frac{d_j}{h}\left[1 + (\Delta_{n+1}\xi)^2 + |\Delta_{n+1}\xi|\right] + V_{j,n} \\ \vartheta_{\text{ext}} &= \frac{d_j}{h}\left[1 + (\Delta_{n+1}\xi)^2\right]\log(u_O^{n+1}) + V_{j,n}. \end{aligned}$$

Remarque 7.4.9. *Comme dans le cas du problème en dimension un (voir Chapitre 6) cette transformation permet de mieux approcher la température au front qui aurait tendance à devenir très grand sinon.*

Détaillons maintenant les différentes étapes qui conduisent à (7.28). La condition de Neumann est donnée par

$$dM\nabla u.\vec{i} = -\xi_t \text{ sur }]0,+\infty[\times\partial\Omega_N. \tag{7.29}$$

L'idée pour avoir une bonne approximation est de s'inspirer du cas du problème en dimension un (voir Chapitre 6). Nous effectuons donc un changement d'inconnu en posant :

$$v(t,x,y) = \log(u(t,x,y)) \tag{7.30}$$

Alors, v satisfait au front :

$$dM\nabla v.\vec{i} = -\exp(-v)\xi_t \text{ sur }]0,+\infty[\times\partial\Omega_N. \tag{7.31}$$

Pour les mêmes raisons qu'en dimension un, nous approchons $\exp(-v)$ par un développement limité d'ordre un en zéro c'est à dire par $1-v$.
Nous proposons alors la discrétisation suivante pour (7.31) basée sur la méthode des différences finies

$$\begin{aligned} &d_j\Big(1+(\Delta_{n+1}\xi)^2\Big)\frac{v_P^{n+1}-v_O^{n+1}}{h} - d_j\Big(-\Delta_{n+1}\xi\Big)^-\frac{v_N^{n+1}-v_P^{n+1}}{h} \\ &+ d_j\Big(-\Delta_{n+1}\xi\Big)^+\frac{v_P^{n+1}-v_S^{n+1}}{h} = -V_{j,n}\Big(1-v_P^{n+1}\Big), \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} &\left[\frac{d_j}{h}\Big(1+\Big(\Delta_{n+1}\xi\Big)^2+|\Delta_{n+1}\xi|\Big)+V_{j,n}\right]v_P^{n+1} - \frac{d_j}{h}\Big(-\Delta_{n+1}\xi\Big)^-v_N^{n+1} \\ &-\frac{d_j}{h}\Big(-\Delta_{n+1}\xi\Big)^+v_S^{n+1} = \frac{d_j}{h}\Big(1+\Big(\Delta_{n+1}\xi\Big)^2\Big)v_O^{n+1}+V_{j,n}. \end{aligned}$$

On obtient alors l'équation (7.28) en posant :

$$\begin{aligned} \vartheta_N &= \frac{d_j}{h}(-\Delta_{n+1}\xi)^-; \quad \vartheta_S = \frac{d_j}{h}(-\Delta_{n+1}\xi)^+ \\ \vartheta_P &= \frac{d_j}{h}\Big[1+(\Delta_{n+1}\xi)^2+|\Delta_{n+1}\xi|\Big]-V_{j,n} \\ \vartheta_{\text{ext}} &= \frac{d_j}{h}\Big[1+(\Delta_{n+1}\xi)^2\Big]v_O^{n+1}-V_{j,n}. \end{aligned}$$

Ensuite, dans le cas où le système (7.28) est régulier, on déduit alors la solution approchée u_P^{n+1} pour tout point P appartenant au front par :

$$u_P^{n+1} = \exp(v_P^{n+1}).$$

Lemme 7.4.10. *Une condition suffisante pour l'existence d'une solution approchée au front est donnée par :*

$$V_{j,n} = -\frac{\xi_j^{n+1}-\xi_j^n}{\tau} \geq 0, \forall n>0, j\in\{1,...,ny\}. \tag{7.32}$$

Remarque 7.4.11. *La condition* 7.32 *correspond à une propagation monotone (voir Chapitre* 5*).*

Preuve. La discrétisation de la condition de Neumann étant obtenue à partir de la résolution d'une équation matricielle, l'existence d'une température approchée u_P^{n+1} pour tout point P du front est alors assurée par la régularité de la matrice. Une condition suffisante pour que cette matrice soit inversible est d'avoir $V_{j,n} \geq 0$ pour tout n (c'est à dire une propagation monotone, voir Chapitre 5). En effet, en supposant que $v_{f,j}^{n+1}$ est la température approchée au front (obtenue par la transformation (7.30)) en un point $y = (j-1)h$, l'équation (7.28) s'écrit :

$$-\vartheta_{N,j} v_{f,j+1}^{n+1} + \vartheta_P v_{f,j}^{n+1} - \vartheta_{S,j} v_{f,j-1}^{N+1} = \vartheta_{\text{ext},j}; \quad j = 1, ..., ny-1.$$

En posant :

$$\widetilde{M}_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & -1 \\ -\vartheta_{S,2} & \vartheta_{P,2} & -\vartheta_{N,2} & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & -\vartheta_{S,ny-1} & \vartheta_{P,ny-1} & -\vartheta_{N,ny-1} \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_f = \begin{pmatrix} v_{f,1} \\ \vdots \\ v_{f,ny} \end{pmatrix} \text{ et } \quad N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vartheta_{\text{ext},2} \\ \vdots \\ \vartheta_{\text{ext},ny-1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

on obtient le système matriciel suivant :

$$\tilde{M}_f v_f = N. \tag{7.33}$$

Ensuite, en prenant en compte la condition de périodicité de ξ et ξ_y au front, c'est à dire

$$\begin{cases} v_{f,1}^{n+1} & = \frac{v_{f,2}^{n+1} + v_{f,ny-1}^{n+1}}{2} \\ \\ v_{f,ny}^{n+1} & = v_{f,1}^{n+1}, \end{cases} \tag{7.34}$$

on déduit le système équivalent suivant : $M_1 v_f^1 = N_1$ où :

$$M_1 = \begin{pmatrix} (\vartheta_{P,2} - \frac{\vartheta_{S,2}}{2}) & \vartheta_{S,2} & -\vartheta_{S,2} & 0 & & & 0 & 0 \\ -\vartheta_{S,3} & \vartheta_{P,3} & -\vartheta_{N,3} & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & -\vartheta_{S,ny-2} & \vartheta_{P,ny-2} & -\vartheta_{N,ny-2} \\ \frac{-\vartheta_{N,ny-1}}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\vartheta_{N,ny-1} & (\vartheta_{P,ny-1} + \frac{\vartheta_{N,ny-1}}{2}) \end{pmatrix}$$

$$v_f^1 = \begin{pmatrix} v_{f,2} \\ \vdots \\ v_{f,ny-1} \end{pmatrix}; \quad N_1 = \begin{pmatrix} \vartheta_{\text{ext},2} \\ \vdots \\ \vartheta_{\text{ext},ny-1} \end{pmatrix}.$$

Une condition suffisante pour que la matrice M_1 soit inversible est par exemple qu'elle soit à diagonale strictement dominante c'est à dire :

$$\begin{cases} |\vartheta_{P,2} - \frac{\vartheta_{S,2}}{2}| & > \frac{3}{2}|\vartheta_{S,2}|, \\ |\vartheta_{P,j}| & > 2|\vartheta_{S,j}|, \quad j := 3, ..., ny-2 \\ |\vartheta_{P,ny-1} - \frac{\vartheta_{S,ny-1}}{2}| & > \frac{3}{2}|\vartheta_{S,ny-1}|. \end{cases}$$

Ce qui revient à prouver que pour tout $j = 2, ..., ny-1$, $|\vartheta_{P,j}| > 2|\vartheta_{S,j}|$. Cette dernière inégalité est bien vérifiée pour $V_{j,n} \geq 0$. □

7.5 Propriété de monotonie du schéma global

Dans cette section, nous nous intéressons à la monotonie du schéma proposé pour le système $(H-P)$. Nous donnons les conditions sous lesquelles le schéma proposé est monotone.

Proposition 7.5.1. *Le schéma numérique global* (7.5)*,* (7.7)*,* (7.10)*,* (7.25)*,* (7.27) *est monotone sous les conditions :*

$$V_{j,n} = -\frac{\xi_j^{n+1} - \xi_j^n}{\tau} \geq 0, \forall n > 0, j \in \{1, ..., ny\}, \tag{7.35}$$

$$\tau \leq \min\Big(\frac{h}{2\max\limits_y r.K(u_f)}, \frac{h^2}{2\epsilon}, \frac{h^2}{|V_\infty|h + 6d_{\max}}\Big). \tag{7.36}$$

La preuve de ce théorème utilise en plus des résultats de monotonie déjà étudiés dans les sections précédentes, la condition d'existence de la température approchée au front qui est donnée par (7.35).
Maintenant nous allons regarder de plus près la relation (7.35). Dans le Chapitre 5, nous avons trouvé une relation liant ϵ, r et $\xi_0(y)$ pour que ξ_t soit négative (propagation monotone) dans le cas où la fonction d'Arrhenius est égale à 1. Ici, nous allons généraliser ce résultat pour un certain nombre de fonctions K.

Proposition 7.5.2. *Supposons que la fonction K vérifie l'hypothèse suivante :*

$$\text{il existe un réel } K_0 > 0 \text{ tel que pour tout } u \in \mathbb{R}, \quad K(u) \geq K_0. \tag{7.37}$$

Alors, pour tout r, ξ_0 et ξ suffisamment régulières, on a $\xi_t \leq 0$ pour tout $y \in [0,1]$ si :

$$\epsilon \max_y \xi_{yy}(0,y) \leq r_{\min} K_0. \tag{7.38}$$

Preuve. Dans le cas où le taux de combustion est donné par $rK(u_f)$ avec K satisfaisant 7.37, on a :

$$\begin{aligned}
\xi_t &= -rK(u_f)\sqrt{1+\xi_y^2} + \epsilon\frac{\xi_{yy}}{1+\xi_y^2} \\
&= -rK_0\frac{K(u_f)}{K_0}\sqrt{1+\xi_y^2} + \epsilon\frac{\xi_{yy}}{1+\xi_y^2} \\
&= -rK_0\sqrt{1+\xi_y^2} + rK_0\sqrt{1+\xi_y^2} - rK_0\frac{K(u_f)}{K_0}\sqrt{1+\xi_y^2} + \epsilon\frac{\xi_{yy}}{1+\xi_y^2} \\
&= -rK_0\sqrt{1+\xi_y^2} + \epsilon\frac{\xi_{yy}}{1+\xi_y^2} + rK_0\Big(1-\frac{K(u_f)}{K_0}\Big)\sqrt{1+\xi_y^2}
\end{aligned}$$

Si l'on se place sous les hypothèses de la Proposition 5.4.1, alors $-rK_0\sqrt{1+\xi_y^2} + \epsilon\frac{\xi_{yy}}{1+\xi_y^2} \leq 0$ sous la relation (7.38). Pour toute fonction K satisfaisant 7.37 on a $1 - \frac{K(u_f)}{K_0} \leq 0$. Ainsi ξ_t est négative si l'inégalité (7.38) est vérifiée. □

Remarque 7.5.3. *Notons que dans le cas où* $\max_y(\xi_0)_{yy} = 0$ *alors* $\xi_t \leq 0$.

Le théorème suivant est une conséquence du Proposition 7.5.1 et de la Proposition 7.5.2.

Théorème 7.5.4. *Sous l'hypothèse* 7.37 *et pour tout r, ξ_0 suffisamment régulières, le schéma* (7.5)*,* (7.7)*,* (7.10)*,* (7.25)*,* (7.27) *est monotone sous les conditions :*

$$\tau \leq \min\Big(\frac{h}{2r_{\max}}, \frac{h^2}{2\epsilon}, \frac{h^2}{|V_\infty|h + 6d_{\max}}\Big);$$

$$\epsilon \max_y \xi_{yy}(0,y) \leq r_{\min} K_0.$$

Chapitre 8

Simulations et convergence numérique vers une solution onde dans un milieu hétérogène

8.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons construit un schéma monotone pour discrétiser le système d'équations $(H-P)$. La validation de notre schéma passe après l'étude de la monotonie par une série de simulations numériques. Ainsi ce chapitre sera consacré non seulement à des tests numériques mais aussi à l'interprétation des résultats. L'objectif à travers ces tests vise à vérifier la convergence de la solution numérique pour un temps long vers une solution onde (voir la Définition 7.2.1). C'est à dire qu'en temps long, observer une température stationnaire, une vitesse de propagation constante et un profil du front établi. Nous aborderons plusieurs situations possibles. Dans un premier temps, nous nous intéresserons au cas d'un système d'équations quasi-couplé c'est à dire que la propagation du front se fait indépendamment de la température du milieu ($K(u) \equiv 1$). Dans ce cas, on sait déjà qu'il existe d'après les tests numériques une solution onde numérique décrivant la propagation du front pour un temps long, il ne reste plus qu'à étudier le comportement de la température numérique dans le temps. On regardera tout d'abord son évolution au front, puis en un autre point "intérieur" appartenant au domaine Ω. Ensuite, nous regarderons de plus près ce qui se passe lorsque la fonction d'Arrhenius est donnée par $K(u_f) = \exp(-\frac{1}{u_f})$. On observera la propagation du front, l'évolution de la température au front et aussi l'évolution de la température hors du front pour des temps long. Enfin, nous donnerons quelques remarques observables sur la solution onde numérique. On fixera tout au long de nos simulation numérique $\epsilon = 0.01$ et on prendra pour pas de temps $\delta y = \delta x = 0.1$. Toutes les illustrations présentées dans ce chapitre concerneront un milieu hétérogène. Les paramètres r et d varient de façon périodiques suivant les couches de matériaux considérées, pour cela nous prendrons dans nos simulations les fonctions r et d données par :

$$d(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0.4 \leq y \leq 0.6, \\ 2 & \text{sinon} \end{cases} \qquad r(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0.4 \leq y \leq 0.6, \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

8.2 Illustrations et convergence numérique vers une solution onde dans le cas d'un système quasi-couplé ($K(u) = 1$)

Dans cette section, on s'intéresse au cas d'une propagation s'effectuant avec la fonction d'Arrhenius donnée par une constante. Dans ce cas, la température du milieu n'a aucune influence sur la propagation du front. L'existence d'un front numérique (solution onde) est évidente comme vue dans l'introduction de la thèse. Le profil du front à partir d'un certain temps devient constant et le front se propage avec une vitesse de propagation c_ϵ qui dépend du coefficient ϵ. De plus, on sait que cette vitesse de propagation tend vers $r_{\max} = \max(r_1, r_2)$ lorsque ϵ tend vers zéro. Pour vérifier la convergence vers la solution numérique (r, v, u), il ne nous reste plus à étudier le comportement de la température dans le temps. On s'intéressera d'abord au comportement de la température numérique au front, ensuite à son comportement hors du front.

8.2.1 Comportement dans le temps de la température numérique au front

Intéressons nous maintenant au comportement de la température au front pour un temps long. Les Figures 8.1 et 8.2 montrent l'évolution de la température au front en un point $y^\star$ donné en partant respectivement d'un front initial droit et d'un front initial sinusoïdal. On constate que les courbes décrivant les Figures 8.1 et 8.2 tendent vers une asymptote c'est à dire que les températures numériques au front deviennent stationnaire dans le temps.

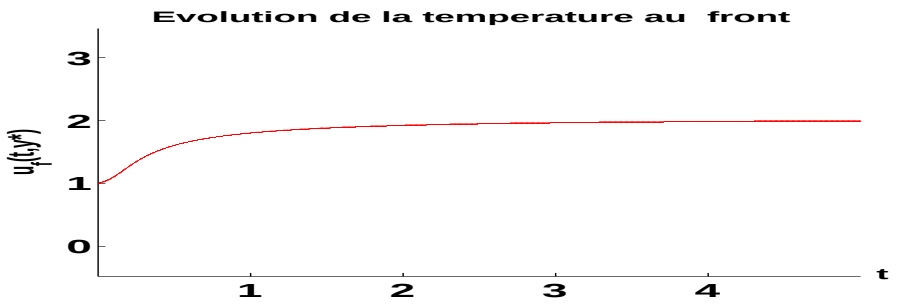

FIGURE 8.1 – Système quasi-couplé : Evolution de la température au front en un point y donné avec un front initial droit

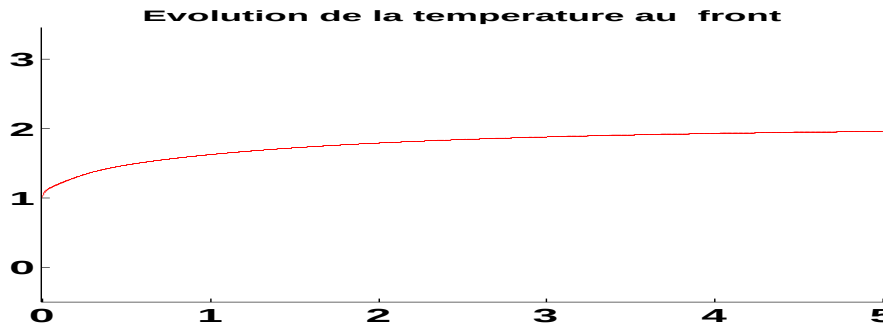

FIGURE 8.2 – Système quasi-couplé : Evolution de la température au front en un point y donné avec un front initial sinusoïdal

Figures	Front initial	Temperature initiale	Point $y^\star \in [0,1]$
8.1	$\xi_0(y) = 0$	$u_0(x,y) = \exp(-\frac{r}{d}\|x\|)$	0.5
8.2	$\xi_0(y) = sin(2\pi y)$	$u_0(x,y) = \exp(-\frac{r}{d}\|x\|)$	0.5

TABLE 8.1 – Données utilisées pour obtenir les Figures 8.1 et 8.2

8.2.2 Comportement dans le temps de la température numérique hors du front

Dans la sous-section précédente, mous avons vu que le profil de la température au front dévient stationnaire à partir d'un certains temps donné. Il est tout naturel de s'interroger aussi sur le comportement dans le temps de la température hors du front. Ainsi, avec les mêmes données (voir Table 8.1) avec $x = -0.4$ (Figure 8.3) on observe bien un profil stationnaire (à $t \approx 5$). Ce constat prouve bien la convergence vers une solution onde. On pourra conclure qu'au alentour de $t = 5$, il existe bien un triple (c_ϵ, v, u), ou c est la vitesse de propagation du front ; $v = v(y)$ le profil établi du front ($\phi(t,y) = -ct + v(y)$) et $u = u(x,y)$ la température stationnaire.

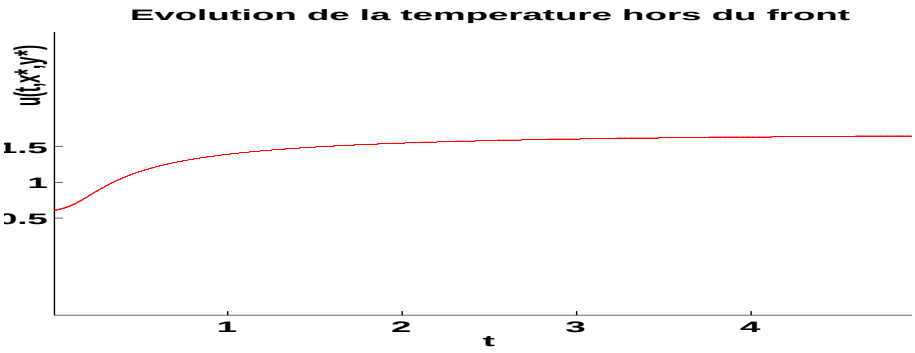

FIGURE 8.3 – Système quasi-couplé : Evolution de la température en un point $(x, y) \in \Omega$ donné avec un front initial sinusoïdal

8.3 Illustrations et convergence numérique vers une solution onde dans le cas d'un système couplé $K(u_f) = \exp(-\frac{1}{u_f})$

Considérons un front de flamme qui se propage dans un milieu hétérogène donné. Un modèle plus réaliste prendra en compte les interactions entre la température (chaleur) du milieu et la propagation du front, le système sera donc couplé via la fonction d'Arrhenius. Ici, on prendra la fonction d'Arrhenius type c'est à dire $K(u_f) = \exp(-\frac{1}{u_f})$ pour laquelle on se propose de vérifier sur un plan numérique l'existence d'une solution onde. Dans un premier temps, on regardera le comportement du front numérique pour des temps long et en second lieu, on s'intéressera à l'évolution de la température au front.

8.3.1 Propagation du front

Pour vérifier l'existence d'un front solution onde numérique, on calcule la valeur numérique de la vitesse de propagation du front en un point donné c'est à dire entre deux temps t_n et t_{n+1} tel que $t_{n+1} - t_n = 1$ (voir Tableau 8.3 et 8.4). On remarque qu'au cours de son évolution, la vitesse de la propagation tend vers une constante. On observe aussi un profil stationnaire du front numérique dans le temps (les Figures 8.4 et 8.5).

Figures	Front initial
8.4	$\xi_0(y) = 0$
8.5	$\xi_0(y) = sin(2\pi y)$

TABLE 8.2 – Données utilisées pour obtenir les Figures 8.4 et 8.5

$\lvert\xi(t_{n+1},y_1)-\xi(t_n,y_1)\rvert$ avec $y_1=0.1$ et $t=1...9$	valeur	$\lvert\xi(t_{n+1},y_2)-\xi(t_n,y_2)\rvert$ avec $y_1=0.5$ et $t=1...9$	valeur
$\lvert\xi(2,y_1)-\xi(1,y_1)\rvert$	0.5846	$\lvert\xi(2,y_2)-\xi(1,y_2)\rvert$	0.5816
$\lvert\xi(3,y_1)-\xi(2,y_1)\rvert$	0.9155	$\lvert\xi(3,y_2)-\xi(2,y_2)\rvert$	0.9121
$\lvert\xi(4,y_1)-\xi(3,y_1)\rvert$	1.0629	$\lvert\xi(4,y_2)-\xi(3,y_2)\rvert$	1.0582
$\lvert\xi(5,y_1)-\xi(4,y_1)\rvert$	1.1155	$\lvert\xi(5,y_2)-\xi(4,y_2)\rvert$	1.1126
$\lvert\xi(6,y_1)-\xi(5,y_1)\rvert$	1.14	$\lvert\xi(6,y_2)-\xi(5,y_2)\rvert$	1.1383
$\lvert\xi(7,y_1)-\xi(6,y_1)\rvert$	1.1536	$\lvert\xi(7,y_2)-\xi(6,y_2)\rvert$	1.1526
$\lvert\xi(8,y_1)-\xi(7,y_1)\rvert$	1.1591	$\lvert\xi(8,y_2)-\xi(7,y_2)\rvert$	1.1589
$\lvert\xi(9,y_1)-\xi(8,y_1)\rvert$	1.1601	$\lvert\xi(9,y_2)-\xi(8,y_2)\rvert$	1.1599

TABLE 8.3 – Calcul de la vitesse numérique de la solution onde avec un front initial droit

$\lvert\xi(t_{n+1},y_1)-\xi(t_n,y_1)\rvert$ avec $y_1=0.1$ et $t=1...9$	valeur	$\lvert\xi(t_{n+1},y_2)-\xi(t_n,y_2)\rvert$ avec $y_1=0.5$ et $t=1...9$	valeur
$\lvert\xi(2,y_1)-\xi(1,y_1)\rvert$	0.5611	$\lvert\xi(2,y_2)-\xi(1,y_2)\rvert$	0.5833
$\lvert\xi(3,y_1)-\xi(2,y_1)\rvert$	0.8534	$\lvert\xi(3,y_2)-\xi(2,y_2)\rvert$	0.8794
$\lvert\xi(4,y_1)-\xi(3,y_1)\rvert$	1.0185	$\lvert\xi(4,y_2)-\xi(3,y_2)\rvert$	1
$\lvert\xi(5,y_1)-\xi(4,y_1)\rvert$	1.0898	$\lvert\xi(5,y_2)-\xi(4,y_2)\rvert$	1.09
$\lvert\xi(6,y_1)-\xi(5,y_1)\rvert$	1.1249	$\lvert\xi(6,y_2)-\xi(5,y_2)\rvert$	1.1242
$\lvert\xi(7,y_1)-\xi(6,y_1)\rvert$	1.1436	$\lvert\xi(7,y_2)-\xi(6,y_2)\rvert$	1.1434
$\lvert\xi(8,y_1)-\xi(7,y_1)\rvert$	1.1551	$\lvert\xi(8,y_2)-\xi(7,y_2)\rvert$	1.1549
$\lvert\xi(9,y_1)-\xi(8,y_1)\rvert$	1.1599	$\lvert\xi(9,y_2)-\xi(8,y_2)\rvert$	1.1598

TABLE 8.4 – Calcul de la vitesse numérique de la solution onde avec un front initial sinusoïdal

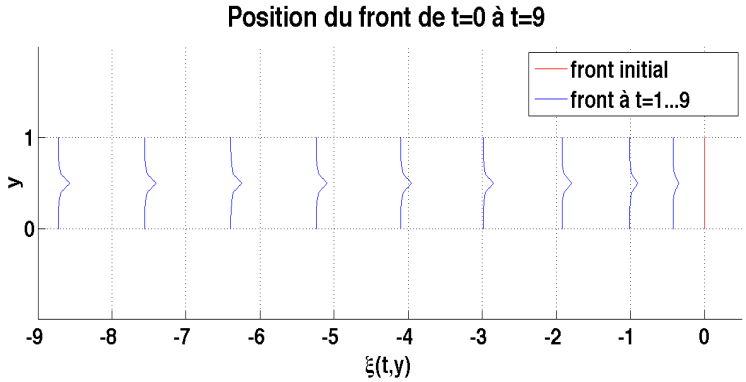

FIGURE 8.4 – Propagation d'un front initial droit : convergence vers la solution onde

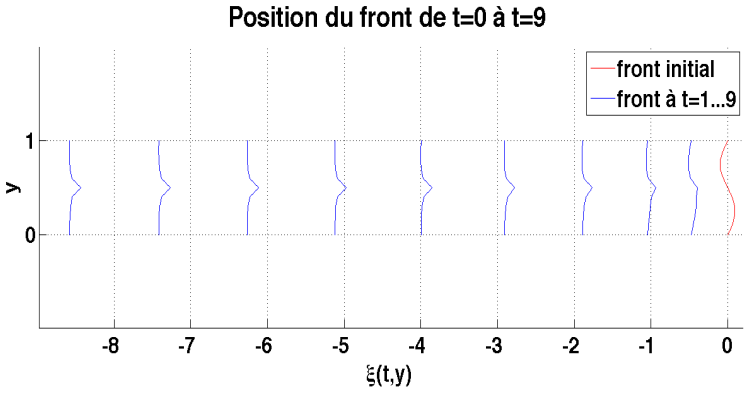

FIGURE 8.5 – Propagation d'un front initial sinusoïdal : convergence vers la solution onde

8.3.2 Comportement dans le temps de la température numérique au front

Dans cette sous section, on s'intéressera particulièrement au comportement de la température au front. En considérant un point $y^\star \in [0,1]$ donné, on constate que la température numérique au front au point $y^\star$ converge bien vers un profil stationnaire dans le temps, cela peut être observé sur les Figures 8.6 et 8.7. On remarque que contrairement au cas où $K(u) = 1$, le profil stationnaire de la température prend plus de temps avant de s'établir. En effet, en comparant les Figures 8.1 , 8.2 et 8.6, 8.7, on observe que un régime stationnaire au alentour de $t = 5$ dans le cas quasi-couplé ($K(u_f) = 1$) contre $t \approx 10$ dans le cas qui nous intéresse ici. On vois bien que dans le cas quasi-couplé, la température au front croit avant de se stabiliser alors que pour le cas couplé avec $K(u_f) = \exp(-\frac{1}{u_f})$, elle décroît jusqu'a une température frontale minimum avant de croitre et enfin se stabiliser (voir aussi la Figure 8.8 qui est un zoom de la Figure 8.7 entre t=0 et t=1.5).

Figures	Front initial	Temperature initiale	Point $y^\star$
8.6	$\xi_0(y) = 0$	$u_0(x,y) = \exp(-\frac{r}{d}\|x\|)$	0.5
8.7	$\xi_0(y) = sin(2\pi y)$	$u_0(x,y) = \exp(-\frac{r}{d}\|x\|)$	0.5

TABLE 8.5 – Données utilisées pour obtenir les Figures 8.6 et 8.7

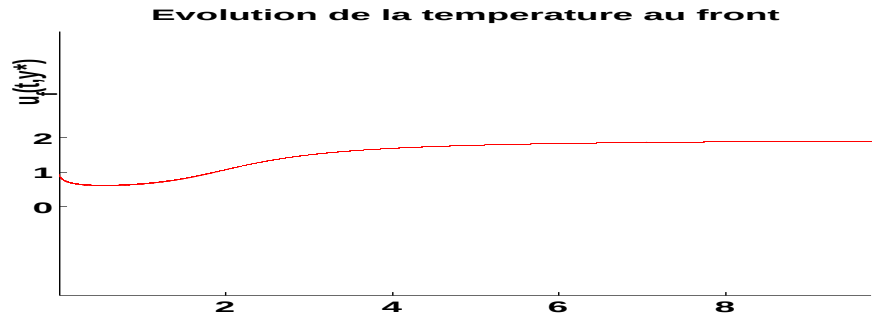

FIGURE 8.6 – Système couplé : Evolution de la température au front en un point y donné avec un front initial droit

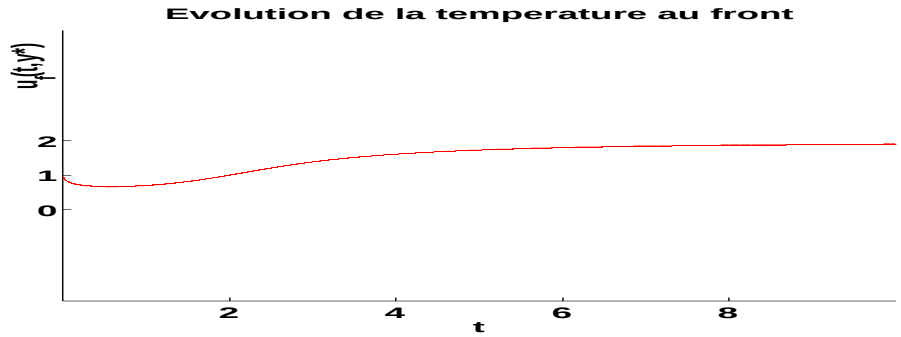

FIGURE 8.7 – Système couplé : Evolution de la température au front en un point y donné avec un front initial sinusoïdal

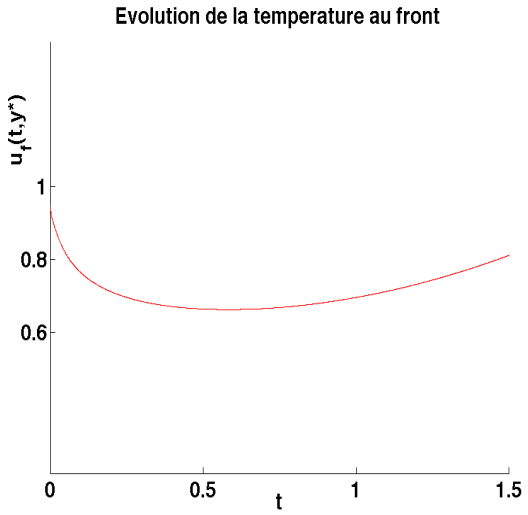

FIGURE 8.8 – Zoom de la Figure 8.7

8.3.3 Comportement dans le temps de la température numérique hors du front

On considère un point de coordonné (x, y) à l'intérieur du domaine. En suivant l'évolution de la température en ce point, on observe avec les mêmes données (voir Table 8.5) un régime stationnaire (Figure 8.9). Cette observation confirme une fois de plus, la convergence de la solution numérique vers une solution onde numérique.

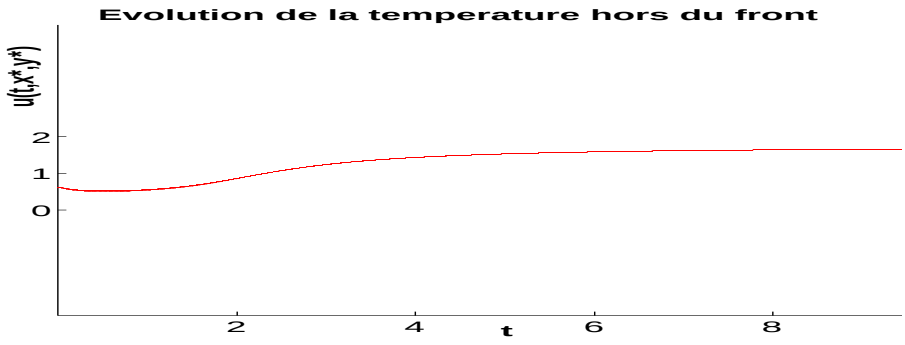

FIGURE 8.9 – Système couplé : Evolution de la température en un point $(x, y) \in \Omega$ donné avec un front initial sinusoïdal

8.4 Quelques remarques sur la solution onde numérique

Considérons un milieu constitué de deux matériaux superposés de façon périodique (voir Figure 2 dans l'introduction de la thèse), l'un supposé "rapide" et l'autre "lent" où le matériau "rapide" étant le meilleur conducteur. Comme attendu, le profil du front est plus avancé dans le matériau "rapide" (voir Figures 8.4 8.5). Par contre, en ce qui concerne la température au front, elle s'avère être plus élevée dans le matériau lent contrairement à l'intuition qu'on peut avoir (voir Figure 8.10 pour un front initial sinusoïdal et Figure 8.11 pour un front initial donné par une droite). De plus, en s'intéressant au profil de la température numérique onde (à $t = 10$ par exemple), en fonction de x en un point y_1 dans le matériau 'rapide' et y_2 dans le matériaux 'lent", on observe bien que la température reste toujours plus élevée dans le milieu lent (voir Figure 8.12).

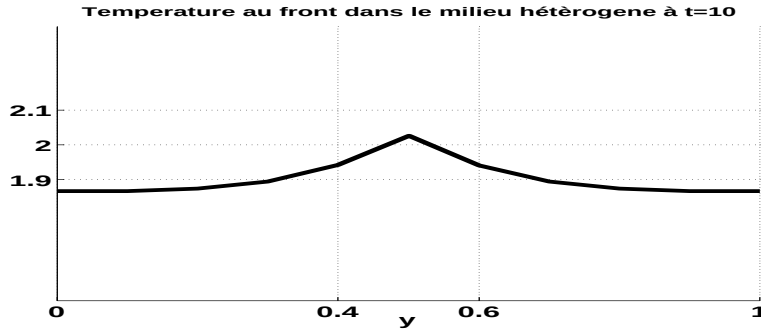

FIGURE 8.10 – Avec un front initial sinusoïdal

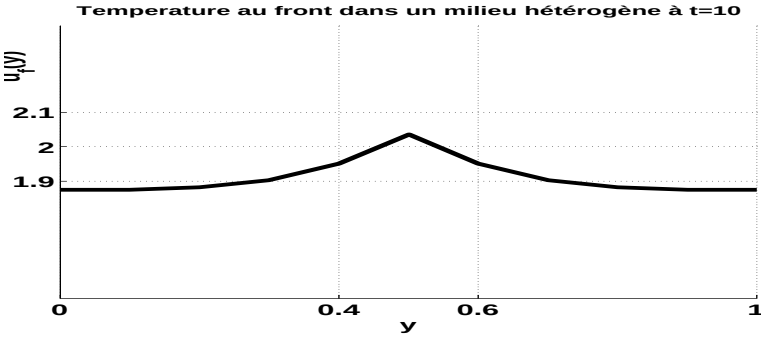

FIGURE 8.11 – Avec un front initial droit

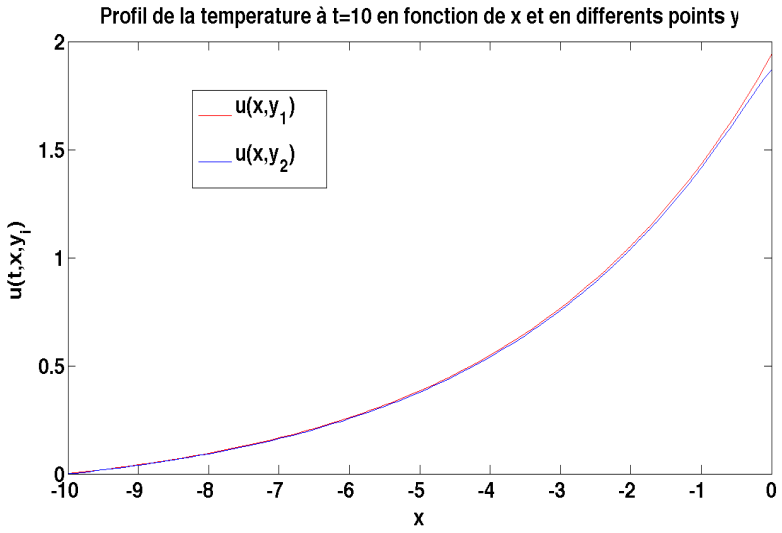

FIGURE 8.12 – Profil de la température en deux points y_i donnés à t=10

Troisième partie

Appendix

Annexe A

Existence of strong trace of solutions to degenerate parabolic equation

This part is devoted to the proof of existence of strong trace at the boundary of Ω reached by L^1 convergence for the degenerate parabolic-hyperbolic equation (E_p). We assume that $\partial\Omega$ is regular. We proceed as follows : first we set T a regular cut-off function (in the hyperbolic zone) and justify that T is a quasi-solution of the hyperbolic operation $v \longmapsto v_t + \operatorname{div} f(v)$. The notion of quasi-solution introduced by Panov (see [66]), ensures existence of strong trace of solution u under non linearity assumption on f and ϕ (see Chapter 1, Definition 1.3.1). After, we impose that $\phi(u^D) \in L^2(0,T,H^1(\Omega))$ which guarantees the existence of strong trace in the non degenerate parabolic zone. By introducing a bijective function Ψ, we prove global existence of strong trace. Moreover, we propose an application for the boundaries conditions study in this thesis (zeroflux, Robin and Dirichlet). Let us give the definition of strong trace in the L^1 sense and some properties. Recall that a general result of existence of strong trace of solution to degenerate parabolic equation has been prove by Y.S Kwon in [50]. In this Appendix, we give another way to obtain this result.

A.1 Definition and properties of strong trace

Definition A.1.1 (Vasseur [74])**.** *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^\ell$ with Lipschitz boundary* [1]*. A function $u \in L^\infty(\Omega)$ possess a strong trace $\gamma u \in L^\infty(\partial\Omega)$, at boundary $\partial\Omega$ if for every compact set $K \subset\subset \partial\Omega$*

$$ess \lim_{s\to 0} \int_K |u(s,\hat{x}) - \gamma u(\hat{x})| d\mathcal{H}^{\ell-1}(\hat{x}) = 0. \tag{A.1}$$

Lemma A.1.2. *Let $u \in L^\infty(\Omega)$ (respectively $v \in L^\infty(\Omega)$) such that the strong trace $\gamma u \in L^\infty(\partial\Omega)$ (respectively $\gamma v \in L^\infty(\partial\Omega)$) exists. Then, $\gamma(u+v)$ exists. Moreover $\gamma(u+v) = \gamma(u) + \gamma(v)$.*

Proof. This is a direct consequence of Definition A.1.1 since $\gamma(u+v) = \gamma(u) + \gamma(v)$ satisfies the above limit. □

1. In [66], Panov state the framework of C^1 regular domains, but as in [74] it can be generalize a Lipschitz boundary .

Lemma A.1.3. *Let $u \in L^\infty(\Omega)$ such that the strong trace $\gamma u \in L^\infty(\partial\Omega)$ exists. For all continuous function $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ then $\gamma(G(u))$ exists and $\gamma(G(u)) = G(\gamma u)$.*

Proof. Note first that this result is a direct consequence of Definition A.1.1 if G is a Lipschitz-continuous function. Then, the lemma holds by using a sequence (G_n) of Lipschitz-continuous functions that converges uniformly to G on $[-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty]$. □

A.2 Notion of quasi-solution

We denote by $M(Q)$ the set of Radon measures on Q, *i.e.* the dual space of $C(Q)$:

$$\nu \in M(Q) \text{ if } \forall K \subset\subset Q, \quad |\nu|(K) < \infty$$

and by $M_{b,\partial\Omega}$ the set of Radon measures finite up to the boundary of Ω *i.e*

$$\nu \in M_{b,\partial\Omega} \text{ if } \quad \sup_{\omega\subset\subset\Omega} |\nu|((t,s)\times\omega) < \infty, \forall 0 < t < s < T.$$

Notice that for $\nu \in M_{b,\partial\Omega}$, $\sup_{0<t<s<T.} |\nu|((t,s)\times\omega)$ can be infinite.

Now, consider a measure $\mu \in M_{b,\partial\Omega}$ and the hyperbolic equation :

$$v_t + \operatorname{div} \widetilde{f}(v) = -\mu \text{ in } Q =]0,T[\times\Omega. \tag{A.2}$$

We shall state the recent notion of quasi-solution for the operator $v \longmapsto v_t + \operatorname{div} \widetilde{f}(v)$ introduced by Panov (see [65]). In [65], Panov proves, for each k in some dense set of $\mathbb{R}$, the existence of a strong trace of the normal component of Kruzhkov's entropy vector flux $sign(v-k)(\widetilde{f}(v) - \widetilde{f}(k)).\eta$ which can be written by $sign(\tilde{v}-k)(\widetilde{f}(\tilde{v}) - \widetilde{f}(k)).\eta$, for any quasi-solution v. Moreover, in the case where $\widetilde{f}$ is not constant in a non-degenerate interval, $\tilde{v} \in L^\infty(\Sigma)$ is unique and it is the strong trace of this quasi-solution v.

Definition A.2.1. *A bounded measurable function $v \in [0, u_{\max}]$ is called quasi-solution of $v \longmapsto v_t + \operatorname{div} \widetilde{f}(v)$ if for $k \in [0, u_{\max}]$*

$$\partial_t|v-k| + \operatorname{div}\Big(sign(v-k)(\widetilde{f}(v) - \widetilde{f}(k))\Big) = -\mu_k \text{ in } D'(Q), \tag{A.3}$$

where $\mu_k \in M_{b,\partial\Omega}(Q)$.

Remark A.2.2. *i) We precise that a function satisfying* (A.3) *is not a priori a weak solution of* (A.2)*. In fact from* (A.3) *with $k = 0$ it follows that*

$$v_t + div\widetilde{f}(v) = -\mu \text{ in } D'(Q), \qquad \text{with } \mu \in M_{b,\partial\Omega}(Q).$$

ii) Remark that if v is an entropy sub- and super-solution, then

$$\partial_t(v-k)^+ + \operatorname{div}(sign^+(v-k)(\widetilde{f}(v) - \widetilde{f}(a))) = -\mu_k^+ \text{ in } D'(Q), \tag{A.4}$$

$$\partial_t(v-k)^- + \operatorname{div}(sign^-(v-k)(\widetilde{f}(v) - \widetilde{f}(k))) = -\mu_k^- \text{ in } D'(Q), \tag{A.5}$$

with $\mu_k^\pm \in M(\Omega)$ not necessarily in $M_{b,\partial\Omega}$.
iii) Notice that due to (A.4) *and* (A.5)*, if v is quasi-solution then for each $a, b \in \mathbb{R}$*

$$T_{[a,b]}(v)_t + div\widetilde{f}(T_{[a,b]}(v)) = -\mu_{a,b} \text{ in } D'(Q), \tag{A.6}$$

where $\mu_{a,b} \in M_{b,\partial\Omega}(Q)$.

To establish that a given function v is a quasi-solution for the operator $v \longmapsto v_t + \operatorname{div} \widetilde{f}(v)$, we will often use the following version of the argument that can be found in [[65], p 8 − 9] :

Lemma A.2.3. *Let $\mathcal{F} \in L^\infty(Q)$ and assume that $\operatorname{div}\mathcal{F} = \mu + \nu$, where μ is a measure finite up to the boundary and ν is a positive measure. Then ν is also finite up to the boundary. In particular, $\mathcal{F}$ is a divergence measure fields on Q.*

Proof. Consider $\{\xi_\delta\}_{\delta>0}$ a boundary layer sequence *i.e.* ξ_δ is a sequence of $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ such that $\lim_{\delta\to 0} \xi_\delta = 1$ pointwise in Ω, $0 \le \xi_\delta \le 1$, $\|\nabla\xi_\delta\|_{L^1} < cte$ and $\xi_\delta = 0$ on $\partial\Omega$. Then, thanks to Lebesgue's theorem, we have

$$\nu(Q) = \lim_{\delta\to 0} \langle \mu, \xi_\delta \rangle - \int_0^T \int_\Omega \mathcal{F}.\nabla\xi_\delta \le |\mu|(Q) + \|\mathcal{F}\|_\infty \|\nabla\xi_\delta\|_{L^1} \le C.$$

□

A.3 Existence of strong trace

Theorem A.3.1. *(Existence of strong trace for vanishing viscosity limits) Assume that $u = \lim_{\epsilon\to 0} u^\epsilon$ (in the a.e. sense) and the following estimates hold*

$$\|u^\epsilon\|_{L^\infty} \le cst; \quad \|\nabla\phi(u^\epsilon|)\|_{L^2(Q)} \le cst \text{ and } \|\epsilon\nabla u^\epsilon\|_{L^2(Q)} \le cst. \tag{A.7}$$

Then, u is local entropy solution and there exists a strong trace $\gamma u \in L^\infty((0,T)\times\partial\Omega)$ on the boundary.

Proof. Consider $T \in C^2(\mathbb{R})$ such that : $T(x) = 0$ if $x \le 0$, increasing on $[0, u_c]$ and $T(x) = u_c$ if $x \ge u_c$ and denote by $v = T(u)$. Taking in (P_ϵ), $T'(u^\epsilon)\xi(t)\psi(x)$ as a test function, we find

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left\langle u_t^\epsilon, T^{'}(u^\epsilon)\psi(x)\right\rangle \xi(t)dt \\
&- \int_0^T \int_\Omega f(u^\epsilon)\psi(x)\xi(t).\nabla T'(u^\epsilon)dxdt - \int_0^T \int_\Omega f(u^\epsilon)T'(u^\epsilon)\xi(t).\nabla\psi(x)dxdt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \nabla\phi_\epsilon(u^\epsilon)T'(u^\epsilon)\xi(t).\nabla\psi(x)dxdt + \int_0^T \int_\Omega \nabla\phi_\epsilon(u^\epsilon)\psi\xi.\nabla T'(u^\epsilon) = 0.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

By using chain rule, the first integral of (A.8) gives

$$A = \int_0^T \langle u_t^\epsilon, T'(u^\epsilon)\psi(x)\rangle \xi(t)dt = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} T(u^\epsilon); \psi\otimes\xi \right\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}. \tag{A.9}$$

The second integral and third integral of (A.8) gives

$$\begin{aligned} B &= -\int_0^T \int_\Omega f(u^\epsilon)\psi(x)\xi(t).\nabla T'(u^\epsilon)dxdt - \int_0^T \int_\Omega f(u^\epsilon)T'(u^\epsilon)\xi.\nabla\psi \\ &= -\int_0^T \int_\Omega f(u^\epsilon)T''(u^\epsilon).\nabla u^\epsilon\psi\xi dxdt_- \int_0^T \int_\Omega f(u^\epsilon)T'(u^\epsilon)\xi.\nabla\psi \\ &= -\int_0^T \int_\Omega \nabla.\left(\int_0^{u^\epsilon} f(s)T''(s)ds\right)\xi\psi - \int_0^T \int_\Omega f(u^\epsilon)T'(u^\epsilon)\xi.\nabla\psi \\ &= \int_0^T \int_\Omega \nabla.\left(\int_0^{u^\epsilon} f'(s)T'(s)ds\right)\psi\xi \\ &= \int_0^T \int_\Omega \operatorname{div}\widetilde{f}(T(u^\epsilon))\psi(x)\xi(t)dxdt. \end{aligned} \tag{A.10}$$

The two last integrals of (A.8) give

$$\begin{aligned} E &= \int_0^T \int_\Omega \nabla\phi_\epsilon(u^\epsilon)T'(u^\epsilon)\xi.\nabla\psi + \int_0^T \int_\Omega \nabla\phi_\epsilon(u^\epsilon)\psi.\xi.\nabla T'(u^\epsilon) \\ &= \epsilon\int_0^T \xi(t)\int_\Omega \nabla T(u^\epsilon).\nabla\psi + \epsilon\int_0^T \int_\Omega T''(u^\epsilon)|\nabla u^\epsilon|^2\psi\xi \\ &= -\epsilon\langle\Delta T(u^\epsilon), \xi(t)\psi(x)\rangle + \epsilon\int_0^T \int_\Omega T''(u^\epsilon)|\nabla u^\epsilon|^2\psi\xi. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Now adding (A.9), (A.10) and (A.11), we obtain :

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{\partial}{\partial t}T(u^\epsilon); \psi\otimes\xi\right\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} + \int_0^T \int_\Omega \operatorname{div}\widetilde{f}(T(u^\epsilon))\psi(x)\xi(t)dxdt \\ &- \epsilon\int_0^T \int_\Omega \Delta T(u^\epsilon)\xi(t)\psi(x) + \epsilon\int_0^T \int_\Omega T''(u^\epsilon)|\nabla u^\epsilon|^2\psi\xi = 0. \end{aligned} \tag{A.12}$$

We set $v^\epsilon = T(u^\epsilon)$, by density of $\mathcal{D}(0,T)\otimes\mathcal{D}(\Omega)$ in $\mathcal{D}(Q)$ then we have

$$v_t^\epsilon + \operatorname{div}\widetilde{f}(v^\epsilon) = \epsilon\Delta v^\epsilon - \mu^\epsilon \text{ in } \mathcal{D}'(Q). \tag{A.13}$$

Where $\mu^\epsilon = \epsilon T''(u^\epsilon)|\nabla u^\epsilon|^2$ is an $L^1(Q)$ function thanks (A.7) we have assumed.
Take $\xi \in C^\infty(Q)$ and consider $\eta = T'(u^\epsilon)sign_\beta^+(T(u^\epsilon) - a)\xi$ with $a \in [0, u_c]$. Then, there exists α in the same interval such that $a = T(\alpha)$ and for any $\xi \in C_0^\infty(Q)$, (A.18) yields

$$\begin{aligned} &\int_Q \Big(T''(u^\epsilon)sign_\beta^+(T(u^\epsilon) - a) + sign_\beta'^+(T(u^\epsilon) - a)|T'(u^\epsilon)|^2\Big)\nabla\phi_\epsilon(u^\epsilon)\nabla u^\epsilon\xi dxdt \\ = &\int_Q \Big\{\int_\alpha^{u^\epsilon} T'(\sigma)sign_\beta^+(T(\sigma) - a)d\sigma\xi_t + \int_\alpha^{u^\epsilon} T'(\sigma)sign_\beta^+(T(\sigma) - a)f'(\sigma)d\sigma\nabla\xi\Big\}dxdt \\ &- \int_Q \Big\{\nabla\xi\nabla\int_\alpha^{u^\epsilon} T'(\sigma)sign_\beta^+(T(\sigma) - a)[\epsilon + \phi'(\sigma)]d\sigma\Big\}dxdt \end{aligned}$$

i.e., since $T'\phi' = 0$ and $v^\epsilon = T(u^\epsilon)$,

$$\begin{aligned}
&\epsilon \int_Q \Big(T''(u^\epsilon) sign^+_\beta(v^\epsilon - a) + sign'^+_\beta(v^\epsilon - a)|T'(u^\epsilon)|^2 \Big) |\nabla u^\epsilon|^2 \xi dxdt \\
= &\int_Q \Big\{ \int_\alpha^{u^\epsilon} T'(\sigma) sign^+_\beta(T(\sigma) - a) d\sigma \xi_t + \int_\alpha^{u^\epsilon} T'(\sigma) sign^+_\beta(T(\sigma) - a) f'(\sigma) d\sigma \nabla\xi \Big\} dxdt \\
&-\epsilon \int_Q \Big\{ \nabla\xi \nabla \int_\alpha^{u^\epsilon} T'(\sigma) sign^+_\beta(T(\sigma) - a) d\sigma \Big\} dxdt
\end{aligned}$$

and, since $T' = 0$ in $\mathbb{R}\backslash]0, u_c[$,

$$\begin{aligned}
&\lim_\beta \epsilon \int_Q sign'^+_\beta(v^\epsilon - a)|\nabla v^\epsilon|^2 \xi dxdt + \epsilon \int_Q T''(u^\epsilon) sign^+(v^\epsilon - a)|\nabla u^\epsilon|^2 \xi dxdt \\
= &\int_Q \Big\{ \int_\alpha^{u^\epsilon} T'(\sigma) sign^+(T(\sigma) - a) d\sigma \xi_t + \int_\alpha^{T^{-1}(v^\epsilon)} T'(\sigma) sign^+(T(\sigma) - a) f'(\sigma) d\sigma \nabla\xi \Big\} dxdt \\
&-\epsilon \int_Q \Big\{ \nabla\xi \nabla \int_\alpha^{u^\epsilon} T'(\sigma) sign^+(T(\sigma) - a) d\sigma \Big\} dxdt.
\end{aligned}$$

Since $a = T(\alpha)$, one gets that

$$\begin{aligned}
&\varpi^\epsilon_a(\xi) + \int_Q sign^+(v^\epsilon - a)\mu^\epsilon \xi dxdt \\
= &\int_Q \Big\{ \int_{T(\alpha)}^{v^\epsilon} sign^+(\sigma - a) d\sigma \xi_t + \int_{T(\alpha)}^{v^\epsilon} sign^+(\sigma - a) f'(T^{-1}(\sigma)) d\sigma \nabla\xi \Big\} dxdt \\
&-\epsilon \int_Q \Big\{ \nabla\xi \nabla \int_{T(\alpha)}^{v^\epsilon} sign^+(\sigma - a) d\sigma \Big\} dxdt \\
= &\int_Q \Big\{ [v^\epsilon - a]^+ \xi_t + sign^+(v^\epsilon - a) \int_{T(\alpha)}^{v^\epsilon} f'(T^{-1}(\sigma)) d\sigma \nabla\xi \Big\} dxdt \\
&-\epsilon \int_Q \Big\{ \nabla\xi \nabla (v^\epsilon - a)^+ \Big\} dxdt
\end{aligned}$$

where $\varpi^\epsilon_a(\xi) := \epsilon \lim_{\beta \to 0} \int_Q sign'^+_\beta(v^\epsilon - a)|\nabla v^\epsilon|^2 \xi dxdt$.

Denoting by $\widetilde{f}(t) = \int_0^{T^{-1}[\min(u_c, t^+)]} f'(\sigma)T'(\sigma)d\sigma$, for any $a \in [0, u_c]$ and any non-negative $\xi \in C_0^\infty(Q)$, we obtain

$$\begin{aligned}
&\int_Q (v^\epsilon - a)^+ \xi_t + sign^+(v^\epsilon - a)(\widetilde{f}(v^\epsilon) - \widetilde{f}(a)).\nabla\xi - \epsilon \nabla (v^\epsilon - a)^+ . \nabla\xi dxdt \\
&= \int_0^T \int_\Omega sign^+(v^\epsilon - a)\mu^\epsilon \xi dxdt + \varpi^\epsilon_a(\xi). \qquad \text{(A.14)}
\end{aligned}$$

If $a > u_c$, then both sides of the above equation are null.

If $a < 0$, then, since $\xi \in C_0^\infty(Q)$ and $sign_\beta'^+(v^\epsilon - a) = 0$ if $\beta < -a$,

$$\begin{aligned}
&\int_Q (v^\epsilon - a)^+ \xi_t + sign^+(v^\epsilon - a)(\widetilde{f}(v^\epsilon) - \widetilde{f}(a)).\nabla\xi - \epsilon\nabla(v^\epsilon - a)^+.\nabla\xi dxdt \\
&= \int_Q v^\epsilon \xi_t + \widetilde{f}(v^\epsilon).\nabla\xi - \epsilon\nabla v^\epsilon.\nabla\xi dxdt = \int_0^T \int_\Omega \mu^\epsilon \xi dxdt \\
&= \int_0^T \int_\Omega sign^+(v^\epsilon - a)\mu^\epsilon \xi dxdt + \varpi_a^\epsilon(\xi).
\end{aligned}$$

Note that ϖ_a^ϵ exists, irrespective of the approximation of $sign_\beta^+$, and is non negative due to the fact that the limit of the other terms exists, and of course, it is a non-negative measure.
Now, using the convergence of u^ϵ to u and the continuity of the function T, we obtain firstly that

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_Q (v^\epsilon - a)^+ \xi_t + sign^+(v^\epsilon - a)\Big(\widetilde{f}(v^\epsilon) - \widetilde{f}(a)\Big).\nabla\xi - \epsilon\nabla(v^\epsilon - a)^+.\nabla\xi dxdt \\
= &\int_Q (v - a)^+ \xi_t + sign^+(v - a)(\widetilde{f}(v) - \widetilde{f}(a)).\nabla\xi dxdt.
\end{aligned}$$

Since $sign^+(v^\epsilon - a)\mu^\epsilon$ is bounded in $L^1(Q)$, up to a subsequence denoted in the same way, it converges weakly in the sense of the bounded measures to a bounded measure denoted by μ_a.
Thus, ϖ_a^ϵ converges in the sense of the distribution to a non negative distribution ϖ_a, *i.e.* a non negative Radon measure. Then,

$$\int_Q (v - a)^+ \xi_t + sign^+(v - a)\Big(\widetilde{f}(v) - \widetilde{f}(a)\Big).\nabla\xi dxdt = \langle \mu_a, \xi\rangle + \langle \varpi_a; \xi\rangle, \tag{A.15}$$

and, for $b > a$,

$$\int_Q (v - b)^+ \xi_t + sign^+(v - b)\Big(\widetilde{f}(v) - \widetilde{f}(b)\Big).\nabla\xi dxdt = \langle \mu_b, \xi\rangle + \langle \varpi_b; \xi\rangle \tag{A.16}$$

with $v = T(u)$ solution of (A.2). Here the quantities μ_a and μ_b are two measures finite up to the boundary and ϖ_a, ϖ_b are non negative measure. Then by Lemma A.2.3, we have that ϖ_a, ϖ_b are finite up boundary. Since (A.15) and (A.16), we deduce

$$T_{[a,b]}(v)_t + div\widetilde{f}(T_{[a,b]}(v)) = -\gamma_{a,b} \text{ in } D'(Q), \text{ where } \gamma_{a,b} = \gamma_a + \gamma_b$$

Then v is quasi-solution, therefore as $\widetilde{f}$ is non degenerate (else $f' \circ T^{-1} = cte$ on an interval (a, b), then $f' = cte$ on an interval $(T^{-1}(a), T^{-1}(b))$ and $\widetilde{f}$ is non degenerate), then by Panov argument the strong trace exist for $v = T(u)$. Moreover, $\phi(u) = \lim_{\epsilon\to 0} \phi(u^\epsilon)$ in $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ and $\phi(u^\epsilon) \to \phi(u))$ strongly in $L^2(Q)$ then thanks to Lemma 1.5.8 (Chapter 1), there exists a strong trace $\gamma\phi(u)$ of $\phi(u)$ on Σ in the L^2 sense and then in the L^1 sense.
Let us note $\Psi(x) = T(x)+\phi(x)-x^-$. The function Ψ is a continuous bijection from $[0, u_{\max}]$ on $\Psi([0, u_{\max}])$ and $\Psi(u) = v + \phi(u)$. v and $\phi(u)$ have a strong trace, γv and $\gamma\phi(u)$, then by to Lemma A.1.2 $\Psi(u)$ possess a strong trace $\gamma\Psi = \gamma v + \gamma\phi(u)$. Afterwards, Ψ^{-1} is continuous on $\Psi[0, u_{\max}]$, therefore by Lemma A.1.3 u possesses a strong trace

$$\gamma u = \Psi^{-1}(\gamma\Psi(u)) = \Psi^{-1}(\gamma T(u) + \phi(u)_{|\Sigma}) = \Psi^{-1}(\gamma T(u) + \gamma\phi(u)).$$

□

A.4 Application for boundary value problems

Here, we apply the result of Theorem A.3.1 of existence of strong trace of the solution for the three kind of boundary condition (zero-flux, Robin, Dirichlet) that we investigate in this thesis.

Corollary A.4.1. *(Case of zero flux boundary problem)*
Consider the zero flux boundary problem (P_1) *under assumption* (H1)*) and other assumptions of Chapter* 1*. Then If* $\ell \geq 1$*, there exists an entropy solution u of* (P_1) *in the sense of Definition* 1.2.2 *that has strong trace* γu *on the boundary. In particular, if* $\ell = 1$*, the unique entropy solution of* (P_1) *has strong boundary trace.*

Proof. This is a consequence of Theorems 1.3.5, 1.4.1 and Theorem A.3.1. □

Remark A.4.2. *(Case of Robin problem)*
In the same case, we can extend this corollary to the Robin boundary problem. Under the hypothesis of Chapter 1*, for* $\ell \geq 1$ *there exists an entropy solution u of* (P_2) *in the sense of Definition* 1.5.1 *that has strong trace* γu *on the boundary. In particular, if* $\ell = 1$*, the unique entropy solution of* (P_2) *has strong boundary trace.*

From now, we consider the Dirichlet boundary problem $(\tilde{P}_3)$ in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^\ell$ with Lipschitz boundary

$$(\widetilde{P}_3)\begin{cases} u_t + \operatorname{div}(f(u) - \nabla\phi(u)) &= 0 \ \text{ in } \ Q =]0,T[\times\Omega, \\ u(0,x) &= u_0 \ \text{ in } \ \Omega \\ u(t,x) &= u^D(t,x) \ \text{ on } \ \Sigma =]0,T[\times\partial\Omega. \end{cases}$$

Here u_0 and u^D are bounded measurable functions. We approximate $\phi(u)$ by $\phi_\epsilon(u^\epsilon) = \phi(u^\epsilon) + \epsilon Id(u^\epsilon)$ for each $\epsilon > 0$. We obtain the following regularized problem $(\tilde{P}_3^\epsilon)$:

$$(\widetilde{P}_3^\epsilon)\begin{cases} u_t^\epsilon + \operatorname{div} f(u^\epsilon) - \Delta\phi_\epsilon(u^\epsilon) &= 0 & \text{in} \quad Q = (0,T)\times\Omega, \\ u^\epsilon(0,x) &= u_0^\epsilon(x) & \text{in} \quad \Omega, \\ u^\epsilon(t,x) &= u^D(t,x) & \text{on} \quad \Sigma = (0,T)\times\partial\Omega, \end{cases}$$

where $(u_0^\epsilon)_\epsilon$ is a sequence of smooth functions that converges to u_0 a.e and respects the minimum/maximum values of u_0.

Theorem A.4.3. *There exists a function solution* $u^\epsilon \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q) \cap C([0,T],L^2(\Omega))$ *for the problem* $(\widetilde{P}_3^\epsilon)$ *such that* $u^\epsilon(0,.) = u_0^\epsilon$, $u^\epsilon_{|_\Sigma} = u^D$, $u_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ *and for all* $\xi(t,x) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *:*

$$\int_0^T \langle u_t^\epsilon, \xi\rangle_{H^{-1}(\Omega);H_0^1(\Omega)}\, dt - \int_0^T \int_\Omega \left(f(u^\epsilon) - \nabla\phi_\epsilon(u^\epsilon)\right).\nabla\xi dxdt = 0 \tag{A.17}$$

Proof. The existence (and uniqueness) of such solution to $(\widetilde{P}_\epsilon^3)$ follows from standard arguments, see [71], [58]. □

Remark A.4.4. *For any non-negative* $\varphi \in C_0^\infty([0,T[\times\Omega)$*, any Lipschitz-continuous function* η *and any constant* α*, one has that*

$$\begin{aligned} &\int_Q \eta'(u^\epsilon)\nabla\phi_\epsilon(u^\epsilon)\nabla u^\epsilon\varphi dxdt - \int_\Omega \int_\alpha^{u_0^\epsilon} \eta(\sigma)d\sigma\varphi(0,.)dx^\epsilon \\ = &\int_Q \Big\{ \int_\alpha^{u^\epsilon} \eta(\sigma)d\sigma\varphi_t + \int_\alpha^{u^\epsilon} \eta(\sigma)f'(\sigma)d\sigma\nabla\varphi - \nabla\varphi\nabla \int_\alpha^{u^\epsilon} \eta(\sigma)[\epsilon + \phi'(\sigma)]d\sigma\Big\}dxdt. \end{aligned}$$

In particular, for any parameter k, if $\alpha = k$ and η is an approximation of $sign(. - k)$, one gets that

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad & \int_Q \Big\{(u^\epsilon - k)^\pm \varphi_t + sign^\pm(u^\epsilon - k)[f(u^\epsilon) - f(k)]\nabla\varphi - \nabla\varphi\nabla(\phi(u^\epsilon) - \phi(k))^\pm\Big\}dxdt \\ & -\epsilon \int_Q \nabla|u^\epsilon - k|\nabla\varphi dxdt + \int_\Omega |u_0^\epsilon - k|\varphi(0,.)dx. \end{aligned}$$

In particular, u^ϵ is a "local entropy solution" of $(\widetilde{P}_3^\epsilon)$ in the sense of Definition entrocarrillo-P. Furthermore, set $M := \max\{\|u^D\|_{L^\infty(\Sigma)}, \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}\}$. If $k \geq M$ (respectively $k \leq M$) we can extend the inequalities (A.18) *up to the boundaries $\Sigma \cup (\{0\} \times \Omega)$.*

Lemma A.4.5. *Assume that $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u^D \in L^2(0,T; H^{1/2}(\partial\Omega)) \cap L^\infty(\Sigma)$ and $u_t^D \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$. Then the estimates* (A.7) *are satisfied.*

Remark A.4.6. *Notice that in the case where $\Omega = (a,b)$ is a bounded interval of $\mathbb{R}$ and u^D is constant in t, the assumptions of Lemma* A.4.5 *hold.*

Proof. First, take $k = M$ (respectively $k = -M$) in the up-to-the-boundary inequality (A.18) (with $sign^+$ respectively $sign^-$), we get $\|u^\epsilon\|_{L^\infty(Q)} \leq M$. In the sequel, we take f, ϕ restricted to $[-M, M]$.
We take $(u^\epsilon - u^D)\mathbf{1}_{[0,t]}$ as test function in (A.17) and use the formalism of [3].

$$\begin{aligned} & \int_0^t \Big\langle (u^\epsilon - u^D)_t; u^\epsilon - u^D \Big\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \int_0^t \int_\Omega u_t^D (u^\epsilon - u^D) dxds \\ & - \int_0^t \int_\Omega f(u^\epsilon).\nabla(u^\epsilon - u^D) dxds + \int_0^t \int_\Omega \nabla\phi_\epsilon(u^\epsilon).\nabla(u^\epsilon - u^D) dxds = 0. \end{aligned} \tag{A.18}$$

Denote the four terms in the left-hand side of (A.18) by A, B, E and G respectively, we calculate :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\|u^\epsilon(t,.) - u^D(t,.)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2}\|u^\epsilon(0,.) - u^D(0,.)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \frac{1}{2}\|u^\epsilon(t,.) - u^D(t,.)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C. \end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned} |-B| &\leq C(u^D)\|u^\epsilon - u^D\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))} \\ &\leq \frac{1}{4}\|u^\epsilon - u^D\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}^2 + (C(u^D))^2 \\ &\leq \frac{1}{4}\|u^\epsilon - u^D\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}^2 + C. \end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned} |E| &= \left|-\int_0^t \int_\Omega f(u^\epsilon).\nabla u^\epsilon dxds + \int_0^t \int_\Omega f(u^\epsilon).\nabla u^D dxds\right| \\ &\leq \left|\int_0^t \int_\Omega f(u^\epsilon).\nabla u^\epsilon dxds\right| + \left|\int_0^t \int_\Omega f(u^\epsilon).\nabla u^D dxds\right| \\ &\leq \left|\int_0^t \int_\Omega \operatorname{div}\left(\int_0^{u^\epsilon} f(r)dr\right) dxds\right| + C(u^D)\|f\|_\infty \\ &\leq \left|\int_0^t \int_{\partial\Omega}\left(\int_0^{u^\epsilon} f(r)dr\right).\eta d\mathcal{H}^{\ell-1} ds\right| + C \leq C. \end{aligned} \tag{A.21}$$

$$
\begin{aligned}
G =& \epsilon \int_0^t \int_\Omega \nabla u^\epsilon . \nabla (u^\epsilon - u^D) + \int_0^t \int_\Omega \nabla \phi(u^\epsilon) . \nabla u^\epsilon - \int_0^t \int_\Omega \nabla \phi(u^\epsilon) . \nabla u^D \\
&\geq \epsilon \int_0^t |\nabla u^\epsilon|^2 - \frac{\epsilon}{2} \int_0^t \int_\Omega |\nabla u^\epsilon|^2 - \frac{\epsilon}{2} \int_0^t \int_\Omega |\nabla u^D|^2 \\
&+ \frac{1}{\|\phi'\|_\infty} \int_0^t \int_\Omega |\nabla \phi(u^\epsilon)|^2 - \frac{\alpha}{2} \int_0^t \int_\Omega |\nabla \phi(u^\epsilon)|^2 - \frac{1}{2\alpha} \int_0^t \int_\Omega |\nabla u^D|^2. \qquad \text{(A.22)}
\end{aligned}
$$

For all $t \leq T$, from (A.19)-(A.22) we have

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \|u^\epsilon(t,.) - u^D(t,.)\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon \int_0^t |\nabla u^\epsilon|^2 + C \int_0^t \int_\Omega |\nabla \phi(u^\epsilon)|^2 \\
&\leq C + \frac{1}{4} \|u^\epsilon - u^D\|^2_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}. \qquad \text{(A.23)}
\end{aligned}
$$

Taking the sup over t in $[0, T]$, we obtain

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4} \|u^\epsilon - u^D\|^2_{L^\infty(0,T;\Omega)} + \epsilon \int_0^T |\nabla u^\epsilon|^2 + C \int_0^T \int_\Omega |\nabla \phi(u^\epsilon)|^2 \\
&\leq C + \frac{1}{4} \|u^\epsilon - u^D\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}. \qquad \text{(A.24)}
\end{aligned}
$$

Therefore

$$
\epsilon \int_0^T |\nabla u^\epsilon|^2 + C \int_0^T \int_\Omega |\nabla \phi(u^\epsilon)|^2 \leq C. \qquad \text{(A.25)}
$$

□

Corollary A.4.7. *(Case of Dirichlet boundary problem)*
Assume that $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u^D \in L^2(0,T; H^{1/2}(\partial\Omega)) \cap L^\infty(\Sigma)$, $u_t^D \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$ and (f, ϕ) is non degenerate in the sense of Definition 1.3.1. *Then the strong trace γu of solution u for the Dirichlet boundary problem exists.In particular, for problem (P_3^ϵ) considered in Chapter* 2, *there exists a subsequence u^ϵ that converges to a limit u a.e.. Moreover, the limit u is a local entropy solution and admits a strong boundary trace.*

We refer to Chapter 2 for the up-to-the-boundary entropy formulation and uniqueness of entropy solution u to (P_3).

Remark A.4.8. *Analogous arguments apply for the stationary problem associated to $(\widetilde{P}_3)$. In particular, the result holds for problem (S_3) associated to (P_3).*

Integral-process solutions in the nonlinear semi group theory

This part of the thesis is devoted to a generalization of integral solution in the nonlinear semigroup theory. Given a Banach space X and an m-accretive operator $A \subset X \times X$, a function $u \in C([0,T];X)$ is called integral solution (see Bénilan [16] and [17, 19, 15]) of the abstract evolution problem

$$u' + Au \ni h, \quad u(0) = u_0 \tag{B.26}$$

if, $\|\cdot\|$ being the norm and $[u,v] := \lim_{\lambda\downarrow 0} \frac{\|u+\lambda v\|-\|u\|}{\lambda}$ the bracket on X, one has $u(0) = u_0$ and

$$\forall (\hat{u},\hat{z}) \in A \quad \|u(t)-\hat{u}\| - \|u(s)-\hat{u}\| \leq \int_s^t [u(\tau)-\hat{u}\,,\, h(\tau)-\hat{z}] \;\; \forall s,t \in [0,T],\;\; s \leq t. \tag{B.27}$$

We refer to [17] for the proof of uniqueness of an integral solution and to [15] for some generalizations. Here, we present a variant of the above notion that we call *integral process solution*. This notion is motivated by an application in the setting where X is a Lebesgue space on $\Omega \subset \mathbb{R}^\ell$ and u is a *weak* limit of approximate solutions. The inspiration comes from the idea of *entropy-process solution* closely related to Young measures' techniques (see [42] and references therein), in the context of the Chapter 3.

B.1 Notion of integral-process solutions

We consider here a Banach space X (in application to the problem (P_1), we will take $X = L^1(\Omega)$) and the multivalued operator $A : X \times X \longrightarrow X$ defined by its graph. We study the general evolution problem $u' + Au \ni h$, $u(0) = u_0$. In our application, A is formally defined by $Au = \operatorname{div} f(u) - \Delta\phi(u)$ with zero-flux boundary condition. In the sequel, we suppose that the operator A is m-accretive and u_0 belongs to $\overline{D(A)}$. We refer to [17] for definition and to [7, 9] and Chapter 3 for proof of these properties in our concrete setting which is our final purpose. In relation with the classical notion of integral solution to the abstract evolution problem introduced in the thesis of Ph. Bénilan, see e.g. [17], [13] we consider a new notion of solution called integral-process solution which depend on an additional variable $\alpha \in (0,1)$. The purpose here is to prove that the integral-process solution of (E) coincides with mild and integral solutions. Therefore the interest of the notion of integral-process solution resides only in the fact that it may appear from some weak convergence arguments, (see Chapter 3 for the example we have in mind). Let us recall the notion of mild solution. In the sequel, $\|.\| = \|.\|_X$ is the norm in X.

Definition B.1.1. *A mild solution of the abstract problem $u' + Au \ni h$ on $[0,T]$ is a function $u \in C([0,T];X)$ such that for $\sigma > 0$ there is an $\sigma-$ discretization $D_A^N(t_0,....,t_N,h_1,...,h_N)$ of $u' + Au \ni h$ on*

$[0,T]$ *which has an* $\sigma-$ *approximate solution* v *satisfying*

$$\|u(t)-v(t)\| \leq \sigma \text{ for } t_0 \leq t \leq t_N. \tag{B.28}$$

Recall that a $\sigma-$ approximate solution v of $u'+Au \ni h$ on $[0,T]$ is the solution of an $\sigma-$ discretization $D_A^N(t_0,....,t_N,h_1,...,h_N)$:

$$\frac{v_i-v_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} + Av_i \ni h_i, \quad i=1,2,...,N \tag{B.29}$$

where $h \approx \sum_{i=1}^{N} h_i 1_{]t_{i-1},t_i]}$ and $|t_i-t_{i-1}| \leq \sigma$. Further, v is an $\sigma-$ approximate solution of the abstract initial value problem (E) if also $t_0=0$ and $\|v_0-u_0\| \leq \sigma$.

Theorem B.1.2. *Let* A *be m-accretive in* $L^1(\Omega)$ *and* $u_0 \in \overline{D(A)}$. *Then the abstract initial-value problem* $u'+Au \ni h$ *on* $(0,T]$, $u(0)=u_0$ *has a unique mild solution* u *on* $[0,T]$. *Moreover* u *is the unique function on* $C([0,T],X)$ *such that for all* $(\hat{u},z) \in A$

$$\|u(t)-\hat{u}\| - \|u(s)-\hat{u}\| \leq \int_s^t \Big[u(\tau)-\hat{u}, g(\tau)-z\Big]d\tau \tag{B.30}$$

for $0 \leq s \leq t \leq T$.
Here, $[a,b] := \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\|a+\lambda b\|-\|a\|}{\lambda}$ *is the bracket on* X *(see [17]). In particular if* $X=L^1$ *then* $[a,b]_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega sign(a)bdx + \int_{\{a=0\}} |b|dx$.

For the proof, we refer to [17].
A function u satisfying (B.30) is called integral solution. Here, we consider a seemingly more general notion of solution inspired by [6] [59], [9].

Definition B.1.3. *Let* A *be an accretive operator and* $g \in L^1(0,T;X)$. *A function* $v(t,\alpha)$ *is an integral-process solution of abstract problem* $v'+Av \ni g$ *on* $[0,T]$, $v(0,\alpha)=v_0$, *if* v *satisfy for all* $(\hat{v},z) \in A$

$$\int_0^1 \Big(\|v(t,\alpha)-\hat{v}\| - \|v(s,\alpha)-\hat{v}\|\Big)d\alpha \leq \int_0^1\int_s^t \Big[v(\tau,\alpha)-\hat{v}, g(\tau)-z\Big]d\tau d\alpha \tag{B.31}$$

for $0<s\leq t\leq T$ *and the initial condition is satisfied in the sense*

$$ess\text{-}\lim_{t\downarrow 0} \int_0^1 \|v(t,\alpha)-v_0\|d\alpha = 0. \tag{B.32}$$

Such generalization of the notion of integral solution is a purely technical hint, indeed, we show that integral-process solutions coincide with the unique integral solution in the following sense.

Theorem B.1.4. *Assume that* A *be m-accretive in* X *and* $u_0 \in \overline{D(A)}$, u *is an integral-process solution if and only if* u *is independent on* α *and for all* α, $u(.,\alpha)$ *coincide with the unique integral and mild solution.*

The result will follow directly from the proposition given bellow.

Proposition B.1.5. *Let A be an accretive operator. If v is an integral-process solution of $v' + Av \ni g$ on $[0,T]$, $v(0,\alpha) \equiv v_0$ and u is a mild solution of $u' + Au \ni h$ on $[0,T]$, $u(0) = u_0$ then*

$$\int_0^1 \|u(t) - v(t,\alpha)\| d\alpha \leq \int_0^1 \|u_0 - v_0\| d\alpha + \int_0^t \int_0^1 \Big[u(\tau) - v(\tau,\alpha), h(\tau) - g(\tau)\Big] d\tau d\alpha \tag{B.33}$$

for a.e. $t \in [0,T]$.

Proof. Let u_k^n, $k = 1, ..., N_n$ be a solution of the σ_n discretization $D_A(0 = t_0^n, t_1^n, ..., t_{N_n}^n)$ of $u' + Au \ni h$ on $[0,T]$. Set $\delta_k^n = t_k^n - t_{k-1}^n$ and let $0 \leq a \leq b \leq T$. Since v is an integral-process solution of $v'(t,\alpha) + Av \ni g$ we have :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big(\|v(b,\alpha) - u_k^n\| - \|v(a,\alpha) - u_k^n\|\Big) d\alpha \\
&\leq \int_0^1 \int_a^b \Big[v(\tau,\alpha) - u_k^n, g(\tau) - h_k^n + \frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{\delta_k^n}\Big] d\alpha d\tau \\
&\leq \int_0^1 \int_a^b \Big[v(\tau,\alpha) - u_k^n, g(\tau) - h_k^n\Big] d\alpha d\tau \\
&+ \frac{1}{\delta_k^n} \int_0^1 \int_a^b \Big(\|v(\tau,\alpha) - u_{k-1}^n\| - \|v(\tau,\alpha) - u_k^n\|\Big) d\alpha d\tau.
\end{aligned} \tag{B.34}$$

Where we have used the inequality

$$\begin{aligned}
\Big[v(\tau,\alpha) - u_k^n, g(\tau) - h_k^n + \frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{\delta_k^n}\Big] &\leq \Big[v(\tau,\alpha) - u_k^n, g(\tau) - h_k^n\Big] \\
&+ \frac{1}{\delta_k^n}\Big(\|v(\tau,\alpha) - u_{k-1}^n\| - \|v(\tau,\alpha) - u_k^n\|\Big)
\end{aligned} \tag{B.35}$$

which follows from the facts that $\Big[X, Y + Z\Big] \leq \Big[X, Y\Big] + \Big[X, Z\Big]$; $\Big[X, eY\Big] = e\Big[X, Y\Big]$ if $e > 0$ and $\Big[X, Y\Big] \leq \dfrac{\|X + eY\| - \|X\|}{e}$. Multiplying (B.34) by δ_n^k and summing over $k = j+1, j+2, ..., i$ we find that :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=j+1}^{i} \int_0^1 \delta_k^n \Big(\|v(b,\alpha) - u_k^n\| - \|v(a,\alpha) - u_k^n\|\Big) d\alpha \\
&\leq \sum_{k=j+1}^{i} \delta_k^n \int_0^1 \int_a^b \Big\|\Big[v(\tau,\alpha) - u_k^n, g(\tau) - h_k^n\Big] d\tau d\alpha \\
&+ \int_0^1 \int_a^b \Big(\|v(\tau,\alpha) - u_j^n\| - \|v(\tau,\alpha) - u_i^n\|\Big) d\tau d\alpha.
\end{aligned} \tag{B.36}$$

Next, we assume that $\sigma_n \to 0$ and the σ_n- approximate solution of $u' + Au \ni h$ locally converge uniformly to the mild solution u on $[0, T[$. Set

$$\phi_n(\iota, \lambda, \alpha) = \|v(\iota,\alpha) - u_{k_{(\lambda)}}^n\| \text{ for } 0 \leq \iota \leq T; \text{ where } k(\lambda) \text{ is defined by } t_{k_{(\lambda)}-1}^n < \lambda \leq t_{k_{(\lambda)}}^n.$$

Then $\phi_n(\iota, \lambda, \alpha) \to \|v(\iota,\alpha) - u(\lambda)\|$ uniformly on $[0, T[\times[0, T[\times[0, 1]$. Hence

$$\Big|\|v(\iota,\alpha) - u(\lambda)\| - \|v(\iota,\alpha) - u_{k_{(\lambda)}}^n\|\Big| \leq \|u_{k_{(\lambda)}}^n - u(\lambda)\| \to 0. \tag{B.37}$$

Therefore, if we choose i, j depending on n so that $t_j^n \to c$, $t_i^n \to d$ as $n \to \infty$ we have

$$\sum_{k=j+1}^{i} \delta_k^n \|v(\iota,\alpha) - u_k^n\| \to \int_c^d \|v(\iota,\alpha) - u(\lambda)\| d\lambda \text{ for } \iota \in [0,T]. \tag{B.38}$$

Moreover with $\iota = \tau$, we get

$$\int_a^b \|v(\tau,\alpha) - u_j^n\| d\tau \to \int_a^b \|v(\tau,\alpha) - u(c)\| d\tau \text{ and} \tag{B.39}$$

$$\int_a^b \|v(\tau,\alpha) - u_i^n\| d\tau \to \int_a^b \|v(\tau,\alpha) - u(d)\| d\tau. \tag{B.40}$$

From now, let

$$F_n(\lambda,\alpha) = \int_a^b \Big[v(\tau,\alpha) - u_k^n, g(\tau) - h_k^n \Big] d\tau \text{ for } t_{k-1}^n < \lambda \le t_k^n. \tag{B.41}$$

Then

$$\begin{aligned} &\Big| \sum_{k=j+1}^{i} \Big(\delta_k^n F_n(\lambda,\alpha) - \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \int_a^b \Big[v(\tau,\alpha) - u_k^n, g(\tau) - h(\lambda) \Big] d\tau d\lambda \Big) \Big| \\ &\le \sum_{k=j+1}^{i} \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \int_a^b \|h_k^n - h(\lambda)\| d\tau d\lambda \le \sigma_n (b-a) \end{aligned} \tag{B.42}$$

and therefore

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=j+1}^{i} \delta_k^n F_n(\lambda,\alpha) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=j+1}^{i} \int_{t_{k-1}^n}^{t_n^k} \int_a^b \Big[v(\tau,\alpha) - u_k^n, g(\tau) - h(\lambda) \Big] d\tau d\lambda. \tag{B.43}$$

Since $u_k^n \to u(\lambda)$ and $t_k^n \to \lambda$ as $n \to 0$ and the bracket $\Big[\cdot,\cdot\Big]$ is the upper-semicontinuous, we deduce from (B.43) that

$$\begin{aligned} &\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=j+1}^{i} \delta_k^n \int_a^b \Big[v(\tau,\alpha) - u_k^n, g(\tau) - h_k^n \Big] d\tau = \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{t_j^n}^{t_i^n} F_n(\lambda,\alpha) d\lambda \\ &\le \int_c^d \int_a^b \Big[v(\tau,\alpha) - u(\lambda), g(\tau) - h(\lambda) \Big] d\tau d\lambda. \end{aligned} \tag{B.44}$$

As previously, the convergence is uniform in $\alpha \in [0,1]$, therefore we can integrate in α under the limit in (B.39), (B.40), (B.44) and obtain

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_c^d \Big(\|v(b,\alpha) - u(\lambda)\| - \|v(a,\alpha) - u(\lambda)\| \Big) d\lambda d\alpha \\ &\le \int_0^1 \int_c^d \int_a^b \Big[v(\tau,\alpha) - u(\lambda), g(\tau) - h(\lambda) \Big] d\tau d\lambda d\alpha \\ &+ \int_0^1 \int_c^d \Big(\|v(\tau,\alpha) - u(c)\| - \|v(\tau,\alpha) - u(d)\| \Big) d\tau d\alpha. \end{aligned} \tag{B.45}$$

Now, we set :

$$\varpi(s,t,\alpha) = \int_0^1 \|v(s,\alpha) - u(t)\| d\alpha$$
$$\Pi(s,t,\alpha) = \int_0^1 \Big[v(s,\alpha) - u(t), g(s) - h(t) \Big] d\alpha.$$

Recall that $u \in C([0,T];X)$ and ess-$\lim_{t\downarrow 0} \int_0^1 \|v(t,\alpha) - u_0\| d\alpha = 0$. Then, v is continuous a.e. for any Lebesgue point on $[0,T]$. The function ϖ and Π are continuous in t and integrable in s

$$\varphi(t,t) - \varphi(s,s) \leq \int_s^t \Pi(\tau) d\tau = \int_0^t \Pi(\tau) d\tau - \int_0^s \Pi(\tau) d\tau. \tag{B.46}$$

Then

$$\Xi(t) = \varphi(t,t) - \int_0^t \Pi(\tau) d\tau \leq \varphi(s,s) - \int_0^s \Pi(\tau) d\tau = \Xi(s) \text{ for a.e. } t, s \in [0,T]. \tag{B.47}$$

The function Ξ is continuous at 0^+, therefore $\Xi(t) \leq \Xi(0)$. This is equivalent to (B.33). □

Conclusion et perspectives

La problématique de cette thèse était d'étudier d'une part, les problèmes paraboliques dégénérés avec des conditions aux limites et d'autre part un système couplé d'équations paraboliques modélisant un problème à frontière libre.
Dans la première partie, nous nous somme intéressés aux problèmes aux limites mêlant des phénomènes paraboliques et hyperboliques. Divers outils ont été exploités, notamment les techniques issues de la théorie des semi-groupes non-linéaires. Elles ont joué un rôle primordial pour contourner les difficultés résultantes quant à la prise en compte des conditions au bord dans les formulations entropiques pour établir des résultats d'unicité via un argument de comparaison "faible-fort". Nous avons aussi étudié une approximation de la solution d'un problème de flux nul au bord par la méthode des volumes finis sur un maillage admissible, dans le but d'établir la convergence de la méthode et d'illustrer le comportement des solutions et la façon dont la condition aux limites est réalisée. La grande difficulté ici est que contrairement au problème de Dirichlet, où on arrive à prouver que la solution entropique processus est en fait une solution entropique, la formulation utilisée pour imposer la condition de flux nul au bord ne nous permet pas d'arriver directement à ce type de de résultat. Il nous a fallu définir une toute nouvelle notion purement technique de solution appelée *solution processus intégrale* ; nous montrons qu'elle coïncide avec l'unique solution intégrale dans la théorie des semi-groupes non-linéaires et que la limite de notre schéma numérique vérifie bien une formulation processus-intégrale. Nous avons aussi essayé de comprendre la manière dont on pourrait définir une notion entropique pour le problème de Dirichlet en terme d'un graphe maximal monotone prescrivant le lien entre la valeur de la solution au bord et celle du flux normal. L'originalité de ce travail tiens du fait que nous arrivons à interpréter la condition de Dirichlet en mettant en évidence un graphe maximal monotone combinant une contrainte du type Bardos-LeRoux-Nédélec et une contrainte du type obstacle d'origines hyperbolique et parabolique dégénérée, respectivement. Nous parvenons ainsi à une interprétation explicite de la condition au bord. Nous avons ainsi essayé d'unifier la plupart des techniques existantes dans la littérature. Ce travail mérite d'être enrichi car il pourrait s'étendre à des conditions au bord plus générales. La partie numérique de cette étude nous a donné une vision du rôle que pourraient jouer certaines hypothèses théoriques que nous avons utilisé. Nous pensons qu'on pourra s'affranchir de certaines de ces hypothèses et affaiblir d'autres dans des futures travaux.
La deuxième partie de cette thèse traite d'un problème à frontière libre. Dans le cas présent la frontière libre est un front de flamme qui se propage dans un domaine hétérogène périodique. La complexité du modèle qui est décrit ici par l'équation de la chaleur (température) couplée avec une équation du front (de type Hamilton-Jacobi) est directement liée au mouvement du front. Nous avons construit en combinant les méthodes d'éléments finis et de différences finies un schéma monotone pour discrétiser ce problème. La grande difficulté, pour garantir la monotonie, réside dans la discrétisation de la tem-

pérature au front. S'inspirant du modèle particulièrement simple d'une propagation en dimension un d'espace, nous proposons une approximation de la température au front en dimension deux d'espace par une technique de changement d'inconnue. Pour la preuve de la monotonie de notre schéma, il nous a fallu définir une notion de *'propagation monotone'* liée au mouvement du front pour pouvoir assurer l'existence de la température discrète au front. Malgré que ce travail se concentre essentiellement sur l'analyse numérique, cette partie de la thèse nous a donné un large aperçu des difficultés et certaines techniques caractéristiques de l'étude des problèmes à frontière libre. Nous espérons continuer ce travail sur le plan numérique en essayant par exemple d'autre méthode de discrétisation tel que la méthode des volumes finis utilisée dans la première partie et aussi prouver des résultats de convergence de la suite des solutions. Cette partie du travail est une suite d'un récent travail de N. Alibaud et G. Namah, qui ont démontré l'existence de solution onde. Nous espérons aussi continuer leur analyse théorique et si possible prouvé un résultat d'unicité de solution onde.

En conclusion, cette thèse nous a permis d'aborder plusieurs thématiques liant l'analyse numérique et l'étude théorique des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique, elliptique et parabolique. Elle nous offre ainsi une grande ouverture sur des aspects aussi bien théoriques que numériques des mathématiques. Ayant opté pour le monde de la recherche, nous sommes déterminé à élargir nos domaines de compétence grâce à cette belle expérience car comme le disait le célèbre mathématicien Laurent Schwartz :« Trouver quelque chose en mathématiques, c'est vaincre une inhibition et une tradition. ».

Bibliographie

[1] J. Aleksic, D. Mitrovic *Strong traces for averaged solutions of heterogeneous ultra-parabolic transport equations* to appear in J. of Hyperbolic DE, available at arXiv :1309.1712 .

[2] N. Alibaud, G. Namah, *Travelling wave solution in a periodique medium.* Preprint

[3] H.W. Alt, S. Luckhaus, *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations.* Math. Z. **183** (3) (1983) 311-341.

[4] K. Ammar, J. Carrillo and P. Willbold, *Scalar conservation laws with general boundary condition and continuous flux function.* J. Diff. Equ **228** (2006) no. 1 111-139 MR 2254186.

[5] B. Andreianov, *Semigroup approach to conservation laws with discontinuous flux.* Springer Proc. in Math. and Stat. Vol.49, pp.1-22. Available as preprint HAL http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal...

[6] B. Andreianov, M. Bendahmane, K. H. Karlsen, *Discrete duality finite volume schemes for doubly nonlinear degenerate hyperbolic-parabolic equations.* Jour of Hyp Diff Equ **7** No 1 (2012) 1-67.

[7] B. Andreianov, F. Bouhsiss, *Uniqueness for an elliptic-parabolic problem with Neumann boundary condition.* J. Evol. Equ. **4** (2004) 273-295.

[8] B. Andreianov, N. Igbida, *On uniqueness techniques for degenerate convection-diffusion problems.* Int. J. Dyn. Syst. Diff. Equ. , accepted ; available at http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal.

[9] B. Andreianov, M. Karimou Gazibo, *Entropy formulation of degenerate parabolic equation with zero-flux boundary condition*, Z. Angew. Math. Phys., **64** (2013) no 5, pp 1471-1491.

[10] B. Andreianov, M. Karimou Gazibo, *Solutions processus intégrales des équations d'évolution abstraites et application à l'approximation numérique d'un problème parabolique dégénéré. [Integral-process solutions of abstract evolution equations and application to numerical approximation of a degenerate parabolic boundary-value problem.],* submitted. Preprint available at http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal...

[11] B. Andreianov, K. Sbihi, *Scalar conservation laws with nonlinear boundary conditions.* C. R. Acad. Paris. **345** (8) (2007) 431-434.

[12] B. Andreianov, K. Sbihi, *Well-posedness of general boundary-value problems for scalar conservation laws.* Trans. AMS, accepted. Available as preprint HAL http ://hal.archives-ouvertes.fr/ : hal-00708973, version 2.

[13] F. Andreu-Vaillo, V Casselles, J. M. Mazón, *Parabolic quasilinear Equations Minimizing Linear Growth Functionals.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2004, xiv+340 pp. ISBN : 3-7643-6619-2.

[14] C. Bardos, A.Y. Leroux, J.C. Nedelec, *First order quasilinear equations with boundary conditions.* Comm. PDE. **4** (1979) 1017-1034.

[15] L. Barthélemy and Ph. Bénilan, *Subsolutions for abstract evolution equations.* Potential Anal. (1992), 93-113.

[16] Ph. Bénilan, *Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications.* Thèse d'état, Orsay, 1972.

[17] Ph. Bénilan, Crandall, M. G. and Pazy, A., *Nonlinear evolution equations in Banach spaces*. Preprint book.

[18] Ph. Bénilan, H. Toure, *Sur l'équation générale* $u_t = a(., u, \phi(., u)_x)_x + v$ *dans* L^1. I. Etude du problème stationnaire, In Evolution equations (Baton Rouge, LA, 1992). pp. 35.62. Dekker, New York, 1995.

[19] Ph. Bénilan, P. Wittbold, *On mild and weak solutions of elliptic-parabolic problems.* Adv. Differential Equations. **1** (6) (1996) 1053-1073.

[20] C. M. Brauner, P.C Fife, G. Namah, C. Schmidt- Lainé, *Propagation of a combustion front in a striated solid medium : A homogenization Analysis.* Quart. Appl. Math. **51**(1993) no. 3 467-493.

[21] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Space and Partial Differential Equation.* Spring-Verlag New York Inc, (2010).

[22] R. Bürger, H. Frid, K. H. Karlsen, *On the well-posedness of entropy solution to conservation laws with a zero-flux boundary condition.* J. Math. Anal. Appl. **326** (2007), 108-120.

[23] R. Bürger, H. Frid, K. H. Karlsen, *On a free boundary problem for a strongly degenerate quasilinear parabolic equation with an application to a model of pressure filtration.* SIAM J. Math. Anal. **34** (2003) 611-635.

[24] R. Bürger, S. Evje and K.H. Karlsen, *On strongly degenerate convection diffusion problems modeling sedimentation-consolidation process.* J.Math. Anal. Appli. **247** (2000), 517-556.

[25] R. Bürger, Wendland W.L, *Existence, uniqueness and stability of generalized solutions of an initial-boundary value problem for a degenerating quasilinear parabolic equation.* J. Math. Anal. App., **218** (3) (1998) 207-239.

[26] C. Cances, Th. Gallouët, *On the time continuity of entropy solutions.* J. Evol Equ **11** (2011) 43-45.

[27] C. Cancès, Th. Gallouët and A. Porretta, *Two-phase flows involving capillary barriers in heterogeneous porous media.* Interfaces Free Bound. **11** no. 2 (2009), 239-258.

[28] J. Carrillo, *Entropy solutions for nonlinear degenerate problems.* Arch. Ration. Mech. Anal. **147** (4) (1999) 269-361.

[29] C. Chanais- Hillairet, *Finite volumes schemes for nonlinear hyperbolic equation. Convergence towards entropy solution and error estimate.* M2AN Math. Model. Numer. Anal. Arch. Ration Mech. Anal. **33**, (1) (1999), 129-156 Mr 2000a :65119.

[30] C. Chainais- Hillairet, *Schémas volumes finis pour des problèmes hyperboliques : convergence et estimations d'erreur.* Thèse de Doctorat Paris VI, 1998.

[31] G. Chavent, J Jaffre, *Mathematical models and finite elements for reservoir simulation.* Studies in Math. and Appl., North-Holland, 1986.

[32] G.Q Chen, H. Frid, *Divergence-measure fields and hyperbolic conservation laws.* Arch. Rational Mech. Anal. **147** (1999) 269-361.

[33] X. Chen, G. Namah *Wave propagation under curvature effets in a heterogeneous medium.* Appl Anal. **64** (1997), no 3-4, 219-233.

[34] M. G Crandall, P. L Lions : *Viscosity solutions of Hamilton Jacobi Equations.* Trans. Amer. Math. Soc. Vol 277 ,no. 1, 1983.

[35] J. Droniou, *Finite volume schemes for fully non-linear elliptic equations in divergence form.* ESAIM :M2AN **40** (6) (2006) 1069-1100.

[36] R.J. Diperna, *Measure-valued solutions to conservation laws.* Arch. Rational Mech. Anal., **88** (1985), 223-270.

[37] F. Dubois, Ph. LeFoch, *Boundary condition for nonlinear hyperbolic conservation laws.* J Diff Equ **71** no 1 (1988) 93-122.

[38] S. Evje and K.H. Karlsen. *Monotone difference approximations of BV solutions to degenerate convection-diffusion equations.* SIAM J. Numer. Anal. **37** no. 6 (2000), 1838-1860.

[39] L.C. Evans, *Partial Differential Equations.* second édition. Graduate Studies in Mathematics, 19, American Mathematic Society, Providence, RI, 2010, xxii+749pp. ISBN : 978-0-8218-4974-3.

[40] L.C Evans, R. F Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions.* Studies in Advanced Mathematics, CR C Press, Boca Raton, 1992 MR 1158660.

[41] R. Eymard, T. Galloüet, and R. Herbin, *Finite volume methods.* Handbook of numerical analysis, Vol. VII, North Hollande, Amsterdam, 2000, pp.713-1020. MR 1 804 748.

[42] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin and A. Michel. *Convergence of a finite volume scheme for nonlinear degenerate parabolic equations.* Numer. Math. **92** (1) :41-82, 2002.

[43] R. Eymard, T. Galloüet, and R. Herbin, *Convergence of finite volume schemes for semi-linear convection diffusion equations.* Numer .Math.**82** no1 (1999), 91-116.

[44] G. Gagneux , M. Madaune-Tort, *Analyse mathématique de modèles nonlinéaires de l'ingégnerie pétroliere ; Mathématique et Applications.* Springer-Verlag, Berlin, (1996).

[45] W. Hiroshi, O. Shinnosuke, *BV-entropy solutions for strongly degenerate parabolic equation.* Adv. Differential Equation **15** no 7-8 (2010), 757-800.

[46] N. Hungerbhüler *A refinement of Ball's Theorem on Young Measures.* New York J.Math. **3** (1997) 48-53.

[47] M . Karimou Gazibo, *Degenerate Convection-Diffusion Equation with a Robin boundary condition.* Proceedings of HYP-2012 conference in Padua, accepted. Available on http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00765309.

[48] M. Karimou Gazibo, *Degenerate parabolic equation with zero flux boundary condition and its approximations.* Preprint available at http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00855746.

[49] S.N. Kruzkhov, *First order quasi-linear equations in several independent variables.* Math. USSR Sb. **10** (2) (1970) 217-243.

[50] Y.S Kwon *Strong traces for degenerate parabolic-hyperbolic equations.* Discrete Contin. Dyn. Syst. **25** no 4 (2009), 1275-1286.

[51] Y.S Kwon and A. Vasseur, *Strong traces for solutions to scalar conservation laws with general flux.* Arch. Rat. Mech. Anal. **185** (2007) 495-513.

[52] G M. Liberman, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equation.* Nonlinear Anal, Theory, Methods and Applic, **12** (11) (1988) pp 1203-1219.

[53] O. A. Ladyenskaja, V. A. Solonnikov and N.NV. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva *Linear and quasilinear equations of parabolic type.* Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 196

[54] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires.* (French) Dunod, Gauthier-Villar, Paris 1969 xx+554 pp (1969).

[55] J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta, M. Ružička *Weak and Measure-valued Solution to Evolutionary PDEs.* Applied Mathematics and Mathematical Computation 13, Chapman and Hall, London, 1996, xii+317 pp ISBN : 0-412-57750-X..

[56] M. Maliki ; H. Touré, *Uniqueness of entropy solutions for nonlinear degenerate parabolic problem.* J. Evol Equ. **183** (3) (2003) 311-341.

[57] M. Marcus, V.J. Mizel, *Absolute continuity on Tracks and Mappings of Sobolev Spaces.* Arch. Ration Mech. Anal. **45**, (4) (1972), 294-320.

[58] C. Mascia, A. Porretta, A. Terracina, *Non-homogeneous Dirichlet problems for degenerate parabolic-hyperbolic equation.* Arch. Ration. Mech. Anal. **163** (2) (2002) 87-124.

[59] A. Michel, J. Vovelle, *Entropy formulation for parabolic degenerate equations with general Dirichlet boundary conditions and application to the convergence of FV methods.* SIAM J. Numer. Anal. **41** (2003) 2262-2293.

[60] G. Namah *Asymptotic solution of a Hamilton-Jacobi equation.* Asymptotic Anal. Vol (1996), no. 4, 355-370.

[61] G. Namah, *Propagation d'un front dans un milieu hétérogène :Comportement en temps long et homogénéisation. Application à la combustion du propergols solides.* Thèse-HDR Bordeaux I, 1997

[62] S. Osher, J. A. Sethian. *Front propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on Hamilton Jacobi formulation.* Journal of Comp. Physics, Vol. **79**, no 1, 12-48, (1988).

[63] F. Otto, *Initial-boundary value problem for a scalar conservation laws.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math. **322** (1996) pp 729-734. MR 1387428.

[64] F. Otto, L^1- *contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic equations.* J. Diff Equ. **131** n(1) (1996) 20-38. MR 1415045.

[65] E.Yu. Panov, *Existence of strong traces for quasi-solutions of multi-dimensional scalar conservation laws.* J. Hyp. Diff. Equ., 4 (2009),**4** , 729-770.

[66] E.Yu. Panov, *On the strong pre-compactness property for entropy solutions of a degenerate elliptic equation with discontinuous flux.* J. Differential Equations. **247** (2009) 2821-2870.

[67] E.Yu. Panov, *On the theory of generalized entropy solutions of Cauchy problem for a first-order quasilinear equation in the class of locally integrable functions.* Iszvestiya Math. **66**(6) (2002) 1171-1218 (in Russian).

[68] E. Rouvre and G. Gagneux, *Formulation forte entropique de lois scalaires hyperboliques-paraboliques dégénérées.* An. Fac. Sci. Toulouse. **X** (1) (2001) 163-183.

[69] D. A Tarzia, *Determination of the Unknown Coefficients in the Lamé-Clapeyron Problem (or One-Phase Stefan Problem).* Adv in Appli Math **3**, (1982), 74-82.

[70] T. Tassa, *Regularity of weak solutions of the nonlinear Fokker-Planck equation.* Math. Res. Lett. **3** no. 4(1996), 475-490.

[71] G. Vallet, *Dirichlet problem for a degenerate hyperbolic-parabolic equation.* Advance in Mathematical Sciences and Applications. **15** no. 2 (2005)

[72] G. Vallet, *Dirichlet problem for a nonlinear conservation law.* Revista Matemática Complutense XIII **1** (2000) 231-250.

[73] Vovelle, *Convergence of finite volume monotones schemes for scalar conservation laws on bounded domains.* Numer. Math., **90**, (3), (2002) 563-596.

[74] A. Vasseur, *Strong traces for solutions of multidimensional scalar conservation laws.* Arch. Ration. Mech. Anal. **160** (2001) 181-193.